DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Maģistra studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Diskrētā matemātika

6.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2007./2008.studiju gads

Saturs

1. Klasiski kombinatorikas uzdevumi

1.1. Uzdevumi, kas ir reducējami uz kombinācijām vai variācijām

1.1.1. Kombinācijas ar atkārtojumiem

Cik ir dažādu m elementus lielu apakšmultikopu multikopā, kas satur n dažādu tipu elementus neierobežotā skaitā (n-multikopa)? Šo skaitli apzīmēsim ar $\bar{C}_n^m$.

Atrisināsim šo uzdevumu ar vienlieluma likuma metodi - piekārtosim savstarpēji viennozīmīgi katrai apakšmultikopai noteikta veida bināru virkni.

Katrai apakšmultikopai ar dotajām īpašībām piekārtosim bināru virkni šādā veidā:

1) sanumurēsim n-multikopas elementu tipus ar naturāliem skaitļiem no 1 līdz n;

2) pieņemsim, ka apakšmultikopā ir r_i elementi, kuru tips ir i ($\sum_{i=1}^{n} r_i = m$), sākot no kreisās puses rakstīsim r_1 nulles un 1 vieninieku, r_2 nulles un 1 vieninieku,..., r_n nulles un 1 vieninieku (piemēram, ja elementu tipi ir kopā $\{1, 2, 3\}$, tad apakšmultikopai $\{1, 1, 1, 2, 2, 3\}$ atbilst bināra virkne $(0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1)$);

3) pēdējo vieninieku nodzēsīsim.

Iegūsim viennozīmīgi definētu virkni, kurā ir m nulles un $n-1$ vieninieks.

Otrādi, katrai šādai virknei atbilst viena vienīga apakšmultikopa ar dotajām īpašībām.

Tātad meklējamais multikopu skaits $\bar{C}_n^m$ ir vienāds ar tādu bināru virkņu skaitu, kuras satur m nulles un $n - 1$ vieninieku, jo ir konstruēta bijektīva funkcija no mūs interesējošās apakšmultikopu kopas uz aprakstīto bināro virkņu kopu.

Saskaņā ar iepriekš pierādīto bijekciju starp binārām virknēm un apakškopām, šis skaits ir vienāds ar $n-1$ elementu lielu apakškopu skaitu $n+m-1$ elementus lielā kopā, tātad

$$\bar{C}_n^m = C_{n+m-1}^{n-1} = C_{n+m-1}^m.$$

1.1. piemērs. Veikalā ir 5 dažādu veidu markas neierobežotā skaitā. Cik dažādos veidos var iegādāties 10 marku komplektu? Redzam, ka mums ir jāatrod 10 elementus lielu apakšmultikopu skaits multikopā, kas satur 5 tipu elementus. Atbilde ir vienāda ar $\bar{C}_5^{10} = C_{14}^4 = 1001$.

1.1. piezīme. Kombinācijas ar atkārtojumiem var interpretēt kā identisku objektu ievietošanu dažādās kastēs - cik veidos var izvietot m identiskus objektus n indeksētās kastēs? Katrai šādai ievietošanai atbilst n-multikopas m-apakšmultikopa, tātad variantu skaits ir vienāds ar $\bar{C}_n^m$.

1.1.2. Apakškopu virkņu skaits

Cik veidos kopu, kas satur n elementus, var sadalīt k apakškopu virknē tā, ka i-tā apakškopa satur m_i elementus, kur $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$, šo skaitli apzīmēsim ar $C_n^{m_1,m_2,\ldots,m_k}$ vai $P_n(m_1, m_2, ..., m_k)$.

Pirmo apakškopu var izvēlēties $C_n^{m_1}$ veidos, otro apakškopu, ja pirmā ir izvēlēta, var izvēlēties $C_{n-m_1}^{m_2}$ veidos, trešo var izvēlēties $C_{n-m_1-m_2}^{m_3}$ veidos utt, iegūstam, ka

$$C_n^{m_1,m_2,\ldots,m_k} = C_n^{m_1} C_{n-m_1}^{m_2} C_{n-m_1-m_2}^{m_3} ... C_{n-m_1-\ldots-m_{k-1}}^{m_k}.$$

Pēc pārveidojumiem iegūstam, ka

$$C_n^{m_1,m_2,\ldots,m_k} = \frac{n!}{m_1!m_2!...m_k!}.$$

1.2. piemērs. Uzdevums par pāriem.

1.1.3. Kopas sadalījums apakškopās ar noteiktu elementu skaitu

Cik veidos kopu, kas satur n elementus, var sadalīt šķirtās apakškopās tā, ka katram $i : 0 \leq i \leq n$ ir tieši m_i apakškopas, kas satur i elementus, tādējādi izpildās nosacījums

$$1 \cdot m_1 + 2 \cdot m_2 + 3 \cdot m_3 + ... + n \cdot m_n = n,$$

šo skaitli apzīmēsim ar $S_n^{m_1, m_2, \ldots, m_n}$.

Tāpat kā gadījumā ar skaitļiem A_n^m un C_n^m, no sākuma atradīsim noteikta veida apakškopu virkņu skaitu tā, lai tiktu izpildīts to elementu summas nosacījums.

Konstruējot šādu apakškopu virkni, sākot ar mazāka elementu skaita apakškopām, iegūstam, ka apakškopu virkņu skaits, kuru mēs apzīmēsim ar $R_n^{m_1,m_2,\ldots,m_n}$, ir vienāds ar

$$\underbrace{C_n^1 \cdot C_{n-1}^1 \cdot \ldots \cdot C_{n-1m_1+1}^1}_{m_1} \cdot$$
$$\cdot \underbrace{C_{n-1m_1}^2 \cdot C_{n-1m_1-2}^2 \cdot \ldots \cdot C_{n-1m_1-2m_2+2}^2}_{m_2} \cdot$$
$$\cdot \underbrace{C_{n-1m_1-2m_2}^3 \cdot \ldots \cdot C_{n-1m_1-2m_2-3m_3+3}^3}_{m_3} \cdot \ldots$$

Vienkāršosim $R_n^{m_1,m_2,\ldots,m_n}$:

$$R_n^{m_1,m_2,\ldots,m_n} = \frac{n!}{1!(n-1)!} \cdot \frac{(n-1)!}{1!(n-2)!} \cdot \ldots$$
$$\cdot \frac{(n-1m_1+1)!}{1!(n-1m_1)!} \cdot \frac{(n-1m_1)!}{2!(n-1m_1-2)!} \cdot \ldots =$$
$$= \frac{n!}{(1!)^{m_1}(2!)^{m_2}\ldots(n!)^{m_n}}$$

Lai atrastu nesakārtotu šādu sadalījumu skaitu, ievērosim, ka katram i apakškopas, kas satur i elementus, var sakārtot $m_i!$ veidos neatkarīgi no citu elementu skaita apakškopām, tātad saskaņā ar dalīšanas likumu

$$S_n^{m_1,m_2,\ldots,m_n} = \frac{R_n^{m_1,m_2,\ldots,m_n}}{m_1!m_2!\ldots m_n!} = \frac{n!}{(1!)^{m_1}(2!)^{m_2}\ldots(n!)^{m_n}m_1!m_2!\ldots m_n!}.$$

1.3. piemērs. Uzdevums par pāriem.

1.1.4. Cikliskas virknes

Cik veidos n elementus lielu kopu var izvietot ciklā (ap riņķa līniju), ja ir fiksēts cikla apiešanas virziens?

Šis uzdevums atšķiras no uzdevuma par A_n^m ar to, ka katram ciklam var piekārtot vairākas virknes atkarībā no tā, no kuras vietas šo ciklu sāk lasīt.

Katrai n elementus garai virknei atbilst n cikli, tāpēc, izmantojot dalīšanas likumu, iegūstam, ka ciklu skaits ir vienāds ar

$$\frac{A_n^n}{n} = (n-1)!$$

1.2. Uzdevumi, kas nav reducējami uz kombinācijām vai variācijām

1.2.1. Kopu sadalījumu skaits - otrā veida Stirlinga skaitļi un Bella skaitļi

Ar $\left\{ {n \atop m} \right\}$ vai $S(n,m)$ apzīmēsim n elementus lielas kopas dažādu sadalījumu skaitu m netukšās apakškopās. Definēsim arī

$$S(n,0) = \begin{cases} 1, & \text{ja } n = 0, \\ 0, & \text{ja } n > 0. \end{cases}$$

Skaitļu $S(n,m)$ aprēķināšanai nav zināma nekāda formula elementāras funkcijas vai vienkārša reizinājuma veidā. Tos sauksim par *Stirlinga apakškopu skaitļiem* vai *otrā veida Stirlinga skaitļiem*.

1.4. piemērs. $S(n,1) = S(n,n) = 1$. $S(3,2) = 3$. $S(4,2) = 7$. $S(4,3) = 6$.

1.2. piezīme. Var redzēt, ka otrā veida Stirlinga skaitļi apmierina identitātes

$$S(n,2) = 2^{n-1} - 1,$$
$$S(n,n-1) = C_n^2.$$

Visu n elementu lielas kopas sadalījumu skaitu netukšās apakškopās sauksim par *n-to Bella skaitli* un apzīmēsim ar B_n. Var redzēt, ka saskaņā ar summas likumu

$$B_n = \sum_{i=1}^{n} S(n,i).$$

Definējam arī $B_0 = 1$.

1.5. piemērs. $B_0 = 1$. $B_1 = 1$. $B_2 = 2$. $B_3 = 5$. $B_4 = 15$.

1.3. piezīme. Bella skaitļus var interpretēt izmantojot dažādu objektu ievietošanu identiskās kastēs.

1.2.2. Kopu ciklisko sadalījumu skaits - pirmā veida Stirlinga skaitļi

Ar $c(n,m)$ vai $\left[{n \atop m} \right]$ apzīmēsim n elementus lielas kopas tādu permutāciju skaitu,kurās ir tieši m cikli. Definēsim arī $c(0,0) = 1$.

Skaitļu $c(n,m)$ aprēķināšanai nav zināma nekāda formula elementāras funkcijas vai vienkārša reizinājuma veidā. Tos sauksim par *pirmā veida absolūtajiem (unsigned) Stirlinga skaitļiem*.

Skaitļus $c(n,m) \cdot (-1)^{n-m}$ sauksim par *otrā veida Stirlinga skaitļiem*, apzīmēsim ar $s(n,m)$.

1.6. piemērs. $c(n,n) = 1$. $c(n,1) = (n-1)!$. $c(4,2) = 11$.

1.4. piezīme. Var redzēt, ka pirmā veida absolūtie Stirlinga skaitļi apmierina identitātes

$$c(n,n-1) = C_n^2,$$

$$c(n,n-2) = 2C_n^3 + \frac{1}{2}C_n^2 C_{n-2}^2 = \frac{1}{4}(3n-1)C_n^3.$$

1.2.3. Naturālo skaitļu sadalījumu skaits

Naturāla skaitļa n izteikšanu nesakārtotā naturālu skaitļu summā mēs sauksim par tā *sadalījumu*, apzīmēsim sadalījumu skaitu ar $p(n)$ un sauksim to par *n-to sadalījuma skaitli*.

Tā kā sadalījuma elementus var sakārtot augošā vai dilstošā kārtībā, tad parasti skaitļa n sadalījumu uzdod kā monotonu, piemēram, nedilstošu, naturālu skaitļu virkni $n_1 \geq n_2 \geq ...n_k$, kas apmierina nosacījumu

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n.$$

1.7. piemērs. $p(1) = 1$. $p(2) = 2$. $p(3) = 3$. $p(4) = 5$. $p(5) = 7$. $p(6) = 11$.

Sadalījumu var definēt arī kā vienādojuma

$$x_1 + 2x_2 + ... + mx_m = n$$

atrisinājumu nenegatīvos skaitļos, šajā gadījumā x_i nozīmē skaitļa i multiplicitāti jeb kārtu sadalījumā.

Sadalījumus var arī vizualizēt, izmantojot *Janga diagrammas*: ja ir dots sadalījums $n = n_1 + n_2 + ... + n_k$, kur $n_i \geq n_j$, ja $i > j$, tad šādu sadalījumu uzdosim kā kreisajā malā nolīdzinātu tabulu ar mainīga garuma rindām, kur i-tā rindas satur n_i rūtiņas.

Katram sadalījumam var konstruēt *duālo sadalījumu*, kas atbilst transponētajai (simetriskajai attiecībā pret diagonāli, kas iziet no augšējā kreisā stūra) Janga diagrammai.

1.8. piemērs.

Tā kā transponēšana ir bijektīva operācija, tad saskaņā ar vienlieluma likumu varam iegūt šādu rezultātu: naturāla skaitļa n to sadalījumu skaits, kuros katrs saskaitāmais nepārsniedz m (apzīmē ar $q_m(n)$), ir vienāds ar to sadalījumu skaitu, kuros ir ne vairāk kā m saskaitāmie (apzīmē ar $p_m(n)$).

1.5. piezīme. Naturālu skaitļu sadalījumu var interpretēt kā identisku objektu ievietošanu identiskās kastēs.

1.2.4. Vienādojuma $x_1+x_2+...+x_n=m$ atrisinājumi veselos skaitļos

Šim uzdevumam var būt dažādas variācijas:

- *nenegatīvu atrisinājumu skaits* - katram šādam atrisinājumam atbilst n-multikopas m-apakšmultikopa, tātad kopējais variantu skaits ir vienāds ar
$$\bar{C}_n^m = C_{n+m-1}^m;$$
- *pozitīvu atrisinājumu skaits* - katram šādam atrisinājumam atbilst nenegatīvs atrisinājums vienādojumam
$$x_1+x_2+...+x_n = m-n,$$
tātad variantu skaits ir vienāds ar
$$\bar{C}_n^{m-n} = C_{m-1}^{m-n} = C_{m-1}^{n-1};$$
- *no apakšas ierobežotu nenegatīvu atrisinājumu skaits* - meklēsim atrisinājumus ar īpašību $0 \le a_i \le x_i$, katram šādam atrisinājumam atbilst nenegatīvs atrisinājums vienādojumam
$$x_1+x_2+...+x_n = m-(a_1+...+a_n).$$

Apzīmēsim $\sum_{i=1}^{n}$ ar S, tad variantu skaits ir vienāds ar

$$\bar{C}_n^{m-S} = C_{n+m-S-1}^{n-1};$$

- *augošu atrisinājumu skaits* - meklēsim atrisinājumus ar īpašību $0 \leq x_1 \leq ... \leq x_n$. Katram šādam atrisinājumam atbilst skaitļa m sadalīšana ne vairāk kā n pozitīvu saskaitāmo summā, tātad kopējais variantu skaits ir vienāds ar $p_n(m)$.

2. 6.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

6.1 Ribonukleīnskābes (RNS) tipa molekulas var saturēt 4 tipu elementārās sastāvdaļas, kuras apzīmēsim ar A,C,G,T. Elementārās sastāvdaļas tiek izvietotas virknē. Cik eksistē

(a) RNS virkņu ar garumu 8, kurās ir 3 C un 5 A elementi?

(b) RNS virkņu ar garumu 12, kurās ir 4 C un 4 A elementi?

6.2 Cik veidos n zēnus un n meitenes var sasēdināt ap apaļu galdu tā, lai nekur blakus nesēdētu 2 zēni vai 2 meitenes.

6.3 Pierādiet, ka

(a) otrā veida Stirlinga skaitļi $S(n,m)$ apmierina sakarību

$$S(n,3) = \frac{1}{2}(3^{n-1}+1) - 2^{n-1}.$$

(b) pirmā veida absolūtie Stirlinga skaitļi $c(n,m)$ apmierina sakarību

$$c(n,n-3) = \frac{1}{48}n^2(n-1)^2(n-2)(n-3) = C_n^2 C_n^4.$$

6.4 Izmantojot skaitīšanu divos dažādos veidos, pierādiet sakarības

(a) $C_n^k C_k^m = C_n^m C_{n-m}^{k-m}$,

(b) $C_n^m = \frac{n}{m} C_{n-1}^{m-1}$.

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

6.5 Pierādīt, ka

(a) $c(n,2) = (n-1)!H_{n-1}$, kur $H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$,

(b)

$$c(n, n-4) = \frac{5}{16} C_n^5 (x^3 - 2x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{15}),$$