DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Maģistra studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Diskrētā matemātika

4.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2007./2008.studiju gads

Saturs

1. Kopu apjoms

1.1. Pamatfakti

Kā salīdzināt kopas vai "skaitīt" elementus kopās?

Dabisks kopu salīdzināšanas veids ir attēlot vienu kopu otrā, jeb konstruēt funkcijas no vienas kopas uz otru.

Divas kopas A un B sauksim par *izomorfām* vai *ekvivalentām* vai *vienlielām* (apzīmē ar pierakstu $A \simeq B$) tad un tikai tad, ja eksistē bijektīva funkcija $f : A \to B$.

1.1. teorēma. Attiecība $\simeq$ ir ekvivalence.

PIERĀDĪJUMS.
Refleksivitāte.
Attiecība $\simeq$ ir refleksīva, jo katrai kopai A vienības attēlojums $id_A : A \to A$ ir bijektīvs attēlojums, tātad $A \simeq A$.

Simetrija.
Ja $A \simeq B$, tad eksistē bijektīva funkcija $f : A \to B$, kurai ir definēta inversā funkcija $f^{-1} : B \to A$, kas arī ir bijektīva, tātad $B \simeq A$ un attiecība ir simetriska.

Tranzitivitāte.
Ja $A \simeq B$ un $B \simeq C$, tad eksistē bijektīvas funkcijas $f : A \to B$ un $g : B \to C$, kuru kompozīcija $g \circ f : A \to C$ ir bijektīva funkcija, tātad $A \simeq C$ un attiecība ir tranzitīva.
■

Par kopas A *apjomu (elementu skaitu, kardinalitāti, kardinālo skaitli)* sauc kopas A ekvivalences klasi attiecībā uz $\simeq$.

1.2. Galīgas kopas

1.2. teorēma. Ja A un B ir galīgas kopas, tad $A \simeq B$ tad un tikai tad, ja $|A| = |B|$.

PIERĀDĪJUMS

Ja $A \simeq B$, tad $|A| = |B|$.

Ja funkcija $f : A \to B$ ir bijektīva, tad tā ir sirjektīva, jo katram elementam kopā B eksistē netukšs inversais attēls, tātad $|A| \geq |B|$.

Bijektīva funkcija f ir arī injektīva, jo katra kopas B elementa inversais attēls satur tieši vienu elementu, tātad $|A| \leq |B|$.

Apvienojot nevienādības $|A| \geq |B|$ un $|A| \leq |B|$, iegūstam vienādību $|A| = |B|$.

Ja $|A| = |B|$, tad $A \simeq B$.

Pieņemsim, ka galīgas kopas A un B apmierina nosacījumu $|A| = |B|$. Sanumurēsim kopu elementus patvaļīgā kārtībā:

$$A = \{a_1, ..., a_n\},$$
$$B = \{b_1, ..., b_n\}.$$

Definēsim funkciju $f : A \to B$ ar šādu nosacījumu $f(a_i) = b_i$ katram $a_i \in A$. Acīmredzami funkcija f ir injektīva un sirjektīva, tātad bijektīva. ■

1.1. piezīme. Ja kopa A ir galīga, tad saskaņā ar teorēmu tās apjomu var identificēt ar tās elementu skaitu A, kas ir naturāls skaitlis.

1.3. Bezgalīgas kopas

1.3.1. Sanumurējamas kopas

Visvienkāršākā bezgalīgā kopa, kas ir vienlaicīgi vēsturiski pirmais bezgalīgas kopas piemērs, ar kuru ir nācies sastapties matemātiķiem, ir naturālo skaitļu kopa $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$ - visi skaitļi, kurus var iegūt dabiskā skaitīšanas rezultātā.

Kopas $\mathbb{N}$ konstrukcijas vienkāršība motivē salīdzināt bezgalīgās kopas ar šo kopu.

Ja kopa A ir vienliela visu naturālo skaitļu kopai $\mathbb{N}$, tad to sauc par *sanumurējamu (countable)*. Sanumurējamas kopas apjomu apzīmē ar $\aleph_0$.

Nosaukuma izvēle ir saistīta, ar to, ka bijektīva funkcija $f : A \to \mathbb{N}$, kas eksistē saskaņā ar kopu vienlieluma definīciju, katram kopas A elementam a piekārto naturālu skaitli $f(a)$, ko var interpretēt kā elementa a kārtas numuru, funkciju f vai tās inverso funkciju bieži sauc par kopas A *numurējošo (pārskaitošo) funkciju*.

1.1. piemērs. Sanumurējamu kopu piemēri:

- pati naturālo skaitļu kopa $\mathbb{N}$,
- visu pozitīvo pāra skaitļu kopa,
- visu veselo skaitļu kopa $\mathbb{Z}$,
- visu racionālo skaitļu kopa $\mathbb{Q}$,
- visu kopas $\mathbb{N}^m$ elementu kopa, kur m ir naturāls skaitlis.

Pierādīsim, ka visu pozitīvo pāra skaitļu kopa $2\mathbb{N}$ ir sanumurējama. Lai to izdarītu, ir jāuzrāda bijektīva funkcija $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, definēsim šādu funkciju ar formulu $f(x) = 2x$, viegli redzēt, ka tā ir bijektīva.

1.3. teorēma. Katra sanumurējamas kopas apakškopa ir galīga vai sanumurējama.

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka A ir sanumurējama kopa un $B \subseteq A$. Sanumurēsim kopas A elementus: $A = \{a_1, a_2, ...\}$. Pieņemsim, ka $B = \{a_{i_1}, a_{i_2}, ...\}$, kur $i_k < i_{k+1}$ katram k. Ja kopa B nav galīga, tad funkcija $f : B \to \mathbb{N}$, kas definēta ar formulu $f(b_{i_k}) = k$, ir kopas B numurējošā funkcija. ■

1.4. teorēma. Pieņemsim, ka ir dota galīga vai sanumurējama kopa $\{A_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, kur katrs elements ir sanumurējama kopa. Apvienojums $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ ir sanumurējama kopa.

PIERĀDĪJUMS Uzskatīsim, ka $A_i \cap A_j = \emptyset$, ja $i \neq j$, jo pretējā gadījumā mēs varam pāriet uz kopu

$$\{A_1, A_2\backslash A_1, A_2\backslash(A_1 \cup A_2), ..., A_n\backslash \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i, ...\},$$

kuras elementu apvienojums ir vienāds ar $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$, bet katru divu elementu šķēlums ir tukša kopa.

Katrā kopā A_i sanumurēsim elementus: $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, ...\}$ un ierakstīsim visu kopu elementus tabulā šādā veidā:

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... \\ ... & ... & ... & ... \end{array}$$

Tabula turpinās bezgalīgi par labi un uz leju. Ievērosim, ka katrs apskatāmā apvienojuma elements šajā tabulā tiek ierakstīts vienu un tieši vienu reizi.

Sanumurēsim tabulas elementus šādā veidā:

- sāksim ar elementu a_{11},
- iesim pa labi uz elementu a_{12},
- iesim pa diagonāli uz leju un pa kreisi uz elementu a_{21},
- iesim uz leju uz elementu a_{31},
- iesim pa diagonāli uz augšu un pa labi uz elementiem a_{22} un a_{31},
- iesim pa labi uz elementu a_{14},
- ...

Definēsim tagad nākošo numurējamo elementu vispārīgā gadījumā, izmantosim apzīmējumu $a_{ij} \to a_{kl}$, kas nozīmē to, ka elements a_{kl} seko elementam a_{ij}. Pārejas ir šādas:

- $a_{1,n} \to a_{1,n+1}$, ja n ir nepāra skaitlis,
- $a_{1,n} \to a_{2,n-1}$, ja n ir pāra skaitlis,
- $a_{n,1} \to a_{n+1,1}$, ja n ir pāra skaitlis,
- $a_{n,1} \to a_{n-1,2}$, ja n ir nepāra skaitlis,
- $a_{i,j} \to a_{i-1,j+1}$, ja ne i, ne j nav vienādi ar 1 un $i+j$ ir pāra skaitlis,
- $a_{i,j} \to a_{i+1,j-1}$, ja ne i, ne j nav vienādi ar 1 un $i+j$ ir nepāra skaitlis.

Konstruētā numerācija pierāda, ka apskatāmais apvienojums ir sanumurējama kopa. ■

1.5. teorēma. Galīga skaita sanumurējamu kopu Dekarta reizinājums ir sanumurējama kopa.

PIERĀDĪJUMS Ir dotas sanumurējamas kopas $A_1, ...A_n$, jāpierāda, ka $A_1 \times ... \times A_n$ ir sanumurējama kopa.

Izmantosim matemātisko indukciju pēc n.

Indukcijas bāze.
Ja $n = 1$, tad nekas nav jāpierāda.

Indukcijas solis.
Pieņemsim, ka ir pierādīts, ka $A' = A_1 \times ... \times A_{s-1}$ ir sanumurējama. Pierādīsim, ka kopa $A'' = A' \times A_s$ ir sanumurējama. To var izdarīt, jo A'' sakārto tabulā un izmanto numerāciju, kas ir aprakstīta iepriekšējā teorēmā. ∎

1.6. teorēma. Katra bezgalīga kopa satur sanumurējamu apakškopu.

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka A ir bezgalīga kopa. Izvēlēsimies patvaļīgu kopas A elementu un apzīmēsim to ar a_1. Tā kā kopa A ir bezgalīga, tad tajā eksistē elements, kas nav vienāds ar a_1, apzīmēsim to ar a_1. Tā kā kopa A ir bezgalīga, tad tajā eksistē elements, kas nav vienāds ne ar a_1, ne ar a_2, apzīmēsim šo elementu ar a_3, un tā tālāk.

Šis elementu apzīmēšanas process nevar pārtraukties, tā kā kopā A ir bezgalīgi daudz elementu. Rezultātā iegūsim apakškopu $\{a_1, a_2, ...\}$, kas ir sanumurējama. ■

1.3.2. Kontinuālās kopas

Vai eksistē kopas, kas nav ne galīgas, ne sanumurējamas?

Atbilde ir pozitīva un vienkāršākais nesanumurējamas kopas piemērs - bezgalīgu virkņu vai sanumurējamā kopā definētu funkciju kopa.

TEORĒMA Ja A ir sanumurējama kopa un $|B| \geq 2$, tad $Fun(A, B)$ nav sanumurējama kopa.

PIERĀDĪJUMS Izmantosim *diagonalizācijas metodi*.

Sakārtosim kopas A elementus atbilstoši numerācijai -

$$A = \{a_1, a_2, ...\}.$$

Funkcija $f : A \to B$ ir bezgalīga virkne

$$f_1, f_2, ...$$

kur $f_i = f(a_i) \in B$.

Pieņemam pretējo.
Pieņemsim, ka kopa $Fun(A, B)$ ir sanumurējama. Sakārtosim tās

elementus kādā noteiktā kārtībā:

$$f_1 \leftrightarrow (f_{11}, f_{12}, ...),$$
$$f_2 \leftrightarrow (f_{21}, f_{22}, ...),$$
$$...$$
$$f_n \leftrightarrow (f_{n1}, f_{n2}, ...),$$
$$...$$

Elementi f_{ij} var tikt sakārtoti tabulā:

$$\begin{array}{cccc} f_{11} & f_{12} & f_{13} & ... \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & ... \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & ... \\ ... & ... & ... & ... \end{array}$$

Konstruēsim funkciju $g : A \to B$ tā, lai $g_i \neq f_{ii}$, tad $g \neq f_i$ katram i. Tātad kopas $Fun(A, B)$ elementus nevar sanumurēt. ■

1.2. piemērs. Bezgalīgu bināru virkņu kopa nav sanumurējama.

Bez naturāliem un racionāliem skaitļiem, matemātikā plaši izmanto arī reālos skaitļus, kurus var definēt kā bezgalīgus, ne obligāti periodiskus, daļskaitļus.

Reālo skaitļu kopas var interpretēt arī ģeometriski, piemēram, reālo skaitļu intervālu var interpretēt kā taisnes nogriezni.

Kopu, kas ir vienliela ar reālo skaitļu kopas apakškopu $[0, 1]$, sauc par *kontinuumu (kontinuālu kopu)*. Kontinuālas kopas apjomu apzīmē ar $\aleph_1$.

1.7. teorēma. Kopa $[0, 1]$ nav sanumurējama.

PIERĀDĪJUMS Katru kopas $[0, 1]$ elementu var domāt kā skaitli decimālajā pierakstā, tātad bezgalīgu virkni jeb funkciju

$$\mathbb{N} \to \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Tālāk seko diagonalizācijas pierādījums tāpat kā iepriekšējā teorēmā.

■

1.3. piemērs. Kontinuālu kopu piemēri:

- visa reālo skaitļu kopa,
- visu iracionālo skaitļu kopa,
- visu jebkuras nepārtrauktas līknes punktu kopa,
- visu plaknes un telpas punktu kopa,
- plaknes vai telpas apgabala punktu kopa.

1.4. Daži pamatfakti par kopu apjomu

1.4.1. Kantora-Bernšteina teorēma

1.8. teorēma. (Kantora-Bernšteina teorēma) Dotas divas kopas A un B. Ja eksistē injektīva funkcija $f : A \to B$ un injektīva funkcija $g : B \to A$, tad $A \simeq B$.

PIERĀDĪJUMS Uzskatīsim, ka $A \cap B = \emptyset$.

Fiksēsim elementu $a \in A$ un konstruēsim elementu virkni $a_0, a_1, \ldots$ šādā veidā:

- $a_0 = a$,
- ja n ir pāra skaitlis, tad $a_{n+1} \in B$, ja eksistē, apmierina nosacījumu $g(a_{n+1}) = a_n$,
- ja n ir nepāra skaitlis, tad $a_{n+1} \in A$, ja eksistē, apmierina nosacījumu $f(a_{n+1}) = a_n$.

Ir iespējami divi varianti:

a) eksistē n tāds, ka a_{n+1} neeksistē, citiem vārdiem sakot, virkne $\{a_0, a_1, ...\}$ ir galīga, šajā gadījumā sauksim n par elementa a kārtu,

b) virkne $\{a_0, a_1, ...\}$ ir bezgalīga, šajā gadījumā teiksim, ka elementa a kārta ir bezgalīga.

Definēsim trīs apakškopas kopā A:

- A_P - visu to elementu kopa, kuru kārta ir pāra skaitlis,
- A_N - visu to elementu kopa, kuru kārta ir nepāra skaitlis,
- A_∞ - visu to elementu kopa, kuru kārta ir bezgalīga.

Acīmredzami šīs apakškopas definē kopas A sadalījumu:

$$A = A_P \cup A_N \cup A_\infty.$$

Līdzīgā veidā katram elementam $b \in B$ konstruēsim elementu virkni $\{b_0, b_{1,...}\}$, kur

- $b_0 = b$,

- ja n ir pāra skaitlis, tad $b_{n+1} \in A$, ja eksistē, apmierina nosacījumu $f(b_{n+1}) = b_n$,
- ja n ir nepāra skaitlis, tad b_{n+1}, ja eksistē, apmierina nosacījumu $g(b_{n+1}) = b_n$.

Definēsim elementa kārtu tāpat kā kopas A gadījumā, definēsim atbilstošo kopas B sadalījumu:

$$B = B_P \cup B_N \cup B_\infty .$$

Var redzēt, ka

- $f|_{A_P}$ ir sirjektīva funkcija no A_P uz B_N,
- $f|_{A_\infty}$ ir sirjektīva funkcija no A_∞ uz B_∞,
- $g^{-1}|_{A_N}$ ir sirjektīva funkcija no A_N uz B_P.

Funkcija

$$f' = (f|_{A_P}) \cup (f|_{A_\infty}) \cup (g^{-1}|_{A_N})$$

ir bijektīva funkcija no A uz B un līdz ar to teorēma ir pierādīta.
■

Kopām A un B ir iespējami 4 gadījumi:

a) eksistē injektīva funkcija $f : A \to B$ un injektīva funkcija $g : B \to A$,

b) eksistē injektīva funkcija $f : A \to B$ un neeksistē injektīva funkcija $g : B \to A$,

b) neeksistē injektīva funkcija $f : A \to B$ un eksistē injektīva funkcija $g : B \to A$,

c) neeksistē injektīva funkcija $f : A \to B$ un neeksistē injektīva funkcija $g : B \to A$.

Ja ir spēkā gadījums a), tad saskaņā ar teorēmu kopas ir ekvivalentas.

Var pierādīt, ka gadījums d) nekad nerealizējas.

Gadījumi b) un c) realizējas, ja kopām ir dažādi apjomi.

Ja eksistē injektīva funkcija $f : A \to B$, tad saka, ka kopas A apjoms ir mazāks vai vienāds nekā kopas B apjoms (apzīmē ar pierakstu $c(A) \leq c(B)$).

Ja eksistē injektīva funkcija $f : A \to B$ un neeksistē injektīva funkcija $g : B \to A$, tad saka, ka kopas A apjoms ir stingri mazāks nekā kopas B apjoms (apzīmē ar pierakstu $c(A) < c(B)$).

1.4. piemērs. Var redzēt, ka jebkurai galīgai kopai A un jebkurai bezgalīgai kopai B izpildās nosacījums $c(A) < c(B)$.

1.5. piemērs. Ja A ir sanumurējama un B ir jebkura bezgalīga kopa, tad no iepriekšējas teorēmas seko, ka $c(A) \leq c(B)$. Ja kopa B ir kontinuāla, tad seko, ka $c(A) < c(B)$.

1.4.2. Pakāpes kopas apjoms

Sekojošā teorēma rāda, ka jebkuram kopu apjomam eksistē par to stingri lielāks.

1.9. teorēma. Jebkurai kopai A izpildās nosacījums $c(A) < c(\mathcal{P}(A))$.

PIERĀDĪJUMS Tā kā $A \subseteq \mathcal{P}(A)$, tad dabiskā iekļaušana

$$i : A \to \mathcal{P}(A)$$

ir injektīva funkcija.

Atliek pierādīt, ka neeksistē injektīva funkcija no $\mathcal{P}(A)$ uz A.

Pieņemsim pretējo: eksistē injektīva funkcija $f : \mathcal{P}(A) \to A$. Konstruēsim kopas A apakškopu C šādā veidā:

$$c \in C \text{ tad un tikai tad, ja } c \notin f^{-1}(c) \text{ un } f^{-1}(c) \neq \emptyset.$$

Apskatīsim kopas A elementu $x = f(C)$:

- ja $x \notin C$, tad saskaņā ar kopas C konstrukciju $x \in C$, jo $x = f(C)$,
- ja $x \in C$, tad $x \notin C$, jo atkal jāievēro tas, ka $x = f(C)$.

Mēs esam ieguvuši pretrunu, kas nozīmē to, ka nav iespējam konstruēt injektīvu funkciju $\mathcal{P}(A) \to A$.■

1.2. piezīme. Kā mēs noskaidrojām iepriekš, ja kopa A ir galīga kopa un $|A| = n$, tad $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$. Šis novērojums ir motivējis apzīmējumu kopai $\mathcal{P}(A)$ definēt kā 2^A.

1.6. piemērs. Var pierādīt, ka var izvēlēties kopu teorijas aksiomas tā, ka kopa $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, ir kontinuāla, tas ir, tās apjoms ir vienāds ar kopas $[0, 1]$ apjomu.

1.4.3. Kardinālie skaitļi un darbības ar tiem

Kopu apjomu sauc arī par kopas *kardinālo skaitli*, jo tas vispārina skaitļa jēdzienu.

Var mēğināt definēt operācijas ar kardinālajiem skaitļiem, kas vispārina operācijas ar parastajiem skaitļiem.

Kardinālo skaitli (KS) m sauksim par KS n_1 un n_2 summu n_1+n_2, ja m ir vienāds ar n_1 un n_2 apjomu kopu apvienojuma apjomu.

KS r sauksim par KS n_1 un n_2 reizinājumu $n_1 n_2$, ja r ir vienāds ar n_1 un n_2 apjomu kopu Dekarta reizinājuma apjomu.

KS e sauksim par KS n_1 un n_2 pakāpi $n_1^{n_2}$ ja e ir vienāds ar jebkuras kopas $Fun(A, B)$ apjomu, kur A apjoms ir n_2 un B apjoms ir n_1.

1.10. teorēma. (kardinālo skaitļu īpašības)

1. $a + b = b + a$, $ab = ba$,
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$,
3. $(a + b)c = ac + bc$,
4. $a^{b+c} = a^b a^c$.

2. 4.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

4.1 Dota funkcija $f : A \to B$, kur A ir sanumurējama kopa. Pierādīt, ka $f(A)$ ir galīga vai sanumurējama kopa.

4.2 Dotas kopas A un B, kur A ir sanumurējama kopa un B - galīga kopa. Pierādīt, ka $A \backslash B$ ir sanumurējama kopa.

4.3 Pierādīt, ka visu veselo skaitļu kopa $\mathbb{Z}$ ir sanumurējama

4.4 Pierādīt, ka visu plaknes trijstūru kopa nav sanumurējama.

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

4.5 Apzīmēsim kopu $\mathbb{N} \cup \{0\}$ ar $\mathbb{N}_0$.

(a) Pierādīt, ka funkcija

$$f(x, y) = \frac{(x+y)^2 + 3x + y}{2}$$

ir bijektīva funkcija no $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ uz $\mathbb{N}_0$.

(b) Atrodiet bijektīvu polinomiālu funkciju no $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ uz $\mathbb{N}_0$.