DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Maģistra studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Diskrētā matemātika

3.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2007./2008.studiju gads

Saturs

1. Attiecības

1.1. Pamatfakti

1.1.1. Motivācija

Attiecība - īpašība, kas piemīt vai nepiemīt sakārtotai vienas vai vairāku kopu elementu virknei.

Bināra attiecība - īpašība, kas piemīt vai nepiemīt kopas (vai divu dažādu kopu) sakārtotiem elementu pāriem.

Ja elementu pārim (x, y) piemīt šī īpašība, tad teiksim, ka tie ir saistīti ar attiecību (kuru nosauksim vārdā ρ) un pierakstīsim to formā $x\rho y$, pretējā gadījumā - $x \not\rho y$.

Tātad attiecība definē kādu apakškopu R kopā $A \times B$: ja $x\rho y$, tad $(x, y) \in R$, pretējā gadījumā - $(x, y) \notin R$.

1.1.2. Definīcijas

Formāla bināras attiecības definīcija: bināra attiecība starp kopu A un B elementiem ir kopa $R \subseteq A \times B$.

Ja $A = B$, tad bināru attiecību sauc par bināru attiecību kopā A. Biežāk tiek izmantotas attiecības vienā kopā.

Attiecību ρ, kas atbilst apakškopai $R \subseteq A \times B (R \subseteq A^2)$ apzīmēsim ar pierakstu $\rho = (A, B, R)$ $(\rho = (A, R))$.

Kopu R sauksim par *attiecības grafiku.*

Strādājot ar konkrētām attiecībām, burta ρ vietā izmanto dažādus atdalošos simbolus, piemēram, $< . =, \neq, | \sim, \prec$.

1.1. piemērs. Attiecību piemēri:

- reālu skaitļu vienādība $(=)$, šajā gadījumā $\rho = (\mathbb{R}, R)$, kur $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = y\}$,

- reālo skaitļu sakārtojums ($\leq$), jeb attiecība "mazāks vai vienāds",
- veselo skaitļu dalāmības attiecība ($|$),
- kopu ietilpšanas attiecība ($\subseteq$),
- trijstūru līdzība.

Jebkuram sakārtotam kopu pārim (A, B) ir definētas divas speciālas attiecības:

- tukšā attiecība $\lambda = (A, B, \emptyset)$,
- pilnā attiecība $\omega = (A, B, A \times B)$.

Jebkurai kopai A ir vēl papildus speciāla attiecība - vienības attiecība $\epsilon = (A, diag(A))$, kur $diag(A) = \{(a, a) \in A^2\}$ (A^2 *diagonāle*).

Attiecību var interpretēt kā attēlojuma grafiku, tāpēc pastāv savstarpēji viennozīmīga atbilstība starp attiecībām un attēlojumiem.

1.2. Attiecības uzdošanas veidi

1.2.1. Attiecības grafika uzdošana

Attiecību $\rho = (A, B, R)$ var uzdot definējot kopas A un B un pārskaitot visus kopas R elementus.

Šī metode der, ja kopas A un B ir mazas galīgas kopas. Šajā gadījumā bieži izmanto attiecības uzdošanu matricas (tabulas) veidā:

- ja $|A| = n$ un $|B| = m$, tad konstruē tabulu, kurā ir n kolonnas un m rindas,
- tabulas kolonnas tiek indeksētas ar kopas A elementiem un rindas - ar kopas B elementiem,
- tabulas rūtiņā, kas atbilst rindai $x \in A$ un kolonnai $y \in B$ ieraksta 1, ja $x\rho y$ un 0, ja $x \not\rho y$.

Ja ir uzdota attiecības matrica to var vizualizēt *matricas grafa* vai *attiecības grafa* veidā:

1. grafa virsotnes ir kopu A un B elementi vai vienas kopas A elementi,
2. starp virsotnēm x un y ir orientēta šķautne (bultiņa no y uz x) tad un tikai tad, ja $x\rho y$.

1.2. piemērs.

1.2.2. Attiecības raksturīgas īpašības uzdošana

Attiecību var uzdot ar kādu attiecības grafika R raksturīgu īpašību.

1.3. piemērs. $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$.

1.2.3. Salīdzināmo pāru raksturojošās īpašības uzdošana

Attiecību var uzdot ar salīdzināmo elementu pāru raksturojošo īpašību.

1.4. piemērs. $x|y$, kur $x, y \in \mathbb{Z}$.

1.3. Attiecību vienādība un salīdzināšana

Divas attiecības

$$\rho_1 = (A, B, R_1),$$
$$\rho_2 = (A, B, R_2)$$

sauksim par vienādām ($\rho_1 = \rho_2$) tad un tikai tad, ja $R_1 = R_2$.

Teiksim, ka attiecība ρ_1 *ietilpst* attiecībā ρ_2 vai, ka attiecība ρ_1 ir attiecības ρ_2 *apakšattiecība* ($\rho_1 \subseteq \rho_2$), tad un tikai tad, ja $R_1 \subseteq R_2$.

Ja $\rho_1 \subseteq \rho_2$ un $\rho_1 \neq \rho_2$, tad saka, ka attiecība ρ_1 *stingri ietilpst* attiecībā ρ_2.

1.5. piemērs. Jebkura attiecība ietilpst pilnajā attiecībā un tukšā attiecībā ietilpst jebkurā citā attieksmē.

$(=) \subseteq (\leq)$.

Ja ρ_1 ir attiecība "būt radiniekiem" un ρ_2 ir attiecība "būt pazīstamiem", tad $\rho_1 \subset \rho_2$ (mēs uzskatām, ka radinieki pazīst viens otru un ka kādam cilvēkam ir paziņas, kas nav viņa radinieki).

1.4. Operācijas ar attiecībām

Ja ir dotas divas attiecības

$$\rho_1 = (A, B, R_1),$$
$$\rho_2 = (A, B, R_2),$$

tad

- par šo attiecību apvienojumu sauc attiecību

$$\rho_1 \cup \rho_2 = (A, B, R_1 \cup R_2)$$

- par šo attiecību šķēlumu sauc attiecību

$$\rho_1 \cap \rho_2 = (A, B, R_1 \cap R_2)$$

- par šo attiecību starpību sauc attiecību

$$\rho_1 \backslash \rho_2 = (A, B, R_1 \backslash R_2)$$

Par attiecības $\rho = (A, B, R)$ papildinājumu jeb *papildinošo attiecību* sauc attiecību

$$\rho' = (A, B, (A \times B) \backslash R).$$

Par attiecības $\rho = (A, B, R)$ *apvērsto attiecību* sauc attiecību

$$\rho^{-1} = (B, A, R^{-1}).$$

kur

$$R^{-1} = \{(y, x) \in B \times A | (x, y) \in R\}.$$

Ja ir dotas divas attiecības

$$\rho_1 = (A, B, R_1),$$
$$\rho_2 = (B, C, R_2),$$

tad par šo attiecību kompozīciju vai reizinājumu sauc attiecību

$$\rho_1\rho_2 = (A, C, R_1R_2),$$

kur

$$R_1R_2 = \{(x, y) \in A \times C | \text{ eksistē } z \in B \text{ tāds, ka } (x, z) \in R_1 \text{ un } (z, y) \in R_2\}.$$

1.6. piemērs. Draugu draugu attiecība kā draugu attiecības kvadrāts.

1.1. teorēma. (attiecību īpašības) Ja $\rho = (A, R)$, $\sigma = (A, S)$ un $\tau = (A, T)$ ir attiecības kopā A, tad ir spēkā šādas īpašības

1. $\epsilon\rho = \rho\epsilon = \rho$,
2. $\lambda\rho = \rho\lambda = \lambda$,
3. $(\rho')^{-1} = (\rho^{-1})'$,
4. $(\rho \cup \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cup \sigma^{-1}$,
5. $(\rho \cap \sigma)^{-1} = \rho^{-1} \cap \sigma^{-1}$,
6. $\rho(\sigma \cup \tau) = (\rho\sigma) \cup (\rho\tau)$,
7. $(\sigma \cup \tau)\rho = (\sigma\rho) \cup (\tau\rho)$,
8. $\rho(\sigma \cap \tau) \subseteq (\rho\sigma) \cap (\rho\tau)$,
9. $(\sigma \cap \tau)\rho \subseteq (\sigma\rho) \cap (\tau\rho)$.

PIERĀDĪJUMS Patstāvīgi, pētot labo un kreiso pušu grafikus. ■

1.5. Attiecību speciālgadījumi

Attiecību $\rho = (A, R)$ sauksim par *refleksīvu*, ja katram a izpildās nosacījums $a\rho a$.

1.7. piemērs. Refleksīvu attiecību piemēri: skaitļu vienādība, ģeometrisku figūru vienādība un līdzība.

Attiecību ρ sauc par *antirefleksīvu*, ja katram a izpildās nosacījums $a \not\rho a$.

1.1. piezīme. Antirefleksīvu attiecību piemēri: skaitļu nevienādība, taišņu perpendikularitāte.

Attiecību ρ sauksim par *simetrisku*, ja jebkuriem diviem a un b izpildās šāds nosacījums: ja $a\rho b$, tad $b\rho a$.

1.8. piemērs. Simetrisku attiecību piemēri: skaitļu vienādība, figūru līdzība, cilvēku radniecība.

Attiecību ρ sauksim par *antisimetrisku*, ja jebkuriem diviem a un b izpildās nosacījums: ja $a\rho b$ un $b\rho a$, tad $a = b$.

1.9. piemērs. Antisimetrisku attiecību piemēri: skaitļu attiecība "mazāks vai vienāds", naturālu skaitļu dalāmība.

Attiecību ρ sauc par *asimetrisku*, ja jebkuriem diviem a un b izpildās nosacījums: ja $a\rho b$, tad $b \not\rho a$.

1.10. piemērs. Asimetrisku attiecība piemēri: skaitļu attiecība "mazāks".

Attiecību ρ sauc par *tranzitīvu*, ja jebkuriem trīs elementiem a, b un c izpildās nosacījums: ja $a\rho b$ un $b\rho c$, tad $a\rho c$.

Ja ρ ir patvaļīga attiecība, tad attiecību $\tau = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \rho^i$ sauc par attiecības ρ *tranzitīvo slēgumu* (var pierādīt, ka τ ir tranzitīva attiecība!).

1.11. piemērs. Tranzitīvu attiecību piemēri: skaitļu attiecība "mazāks" ($<$), skaitļu dalāmības attiecība, ģeometrisku figūru līdzības attiecība.

Attiecību ρ sauksim par *intranzitīvu*, ja jebkuriem trīs elementiem a, b un c izpildās nosacījums: ja $a\rho b$ un $b\rho c$, tad $a \not\rho c$.

Attiecību ρ sauksim par *dihotomisku (aptverošu)*, ja jebkuriem diviem a un b, tādiem, ka $a \neq b$ izpildās nosacījums: $a\rho b$ vai $b\rho a$.

1.12. piemērs. Dihotomisku attiecību piemēri: skaitļu attiecība "mazāks vai vienāds".

1.6. Sakārtojumi

1.6.1. Pamatfakti

Attiecību sauc par *daļēju sakārtojumu*, ja tā ir

- refleksīva,
- antisimetriska,
- tranzitīva.

Daļēju sakārtojumu sauc par *pilnu (lineāru) sakārtojumu*, ja tas ir dihotomisks.

Refleksīvu un tranzitīvu attiecību sauc par *pirmsakārtojumu* vai *kvazisakārtojumu*.

Kopu ar tajā uzdotu daļēju sakārtojumu sauc par *daļēji sakārtotu kopu (DSK)*, kopu ar pilnu sakārtojumu sauc par *pilnīgi sakārtotu kopu* vai *ķēdi*.

Daļēja un pilna sakārtojuma attiecības parasti apzīmē ar izteikti nesimetriskiem, orientētiem atdalošiem simboliem, piemēram, $\leq, \prec, \ll, \subseteq, \vdash, \trianglelefteq$. Mēs apzīmēsim vispārīgu daļēju sakārtojumu ar $\leq$.

Duālo DSK iegūst no dotās mainot uz pretējo salīdzināšanas kārtību jeb pārejot uz apvērsto attiecību.

1.13. piemērs. Vienības attiecība ϵ acīmredzami ir daļējs sakārtojums, to sauc par *triviālo* vai *diskrēto* sakārtojumu. Daži klasiski sakārtojumu piemēri: $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{N}, |)$,$(\mathcal{P}(X), \subseteq)$.

Ja uzdota daļēji sakārtota kopa $(A, \leq)$, tad apakškopu B sauc par *ķēdi*, ja $(B, \leq)$ ir pilnīgi sakārtota kopa, apakškopu B sauc par *antiķēdi*, ja $(B, \leq)$ ir triviāli sakārtota kopa.

Ķēdi (attiecīgi, antiķēdi) B sauc par maksimālu, ja jebkuram $a \in A \backslash B$ apakškopa $B \cup \{a\}$ nav ķēde (attiecīgi, antiķēde).

Saka, ka daļēji sakārtotas kopas garums (platums) ir n, ja tajā eksistē ķēde (antiķēde), kas satur n elementus un neeksistē ķēde (antiķēde), kas satur $n+1$ elementu.

DSK, kuras garums ir 2, sauksim par *divdaļīgu* DSK.

Elementu a sauc par *vislielāko (vismazāko)*, ja katram $x \in A$ izpildās $x \leq a (a \leq x)$.

Ja DSK eksistē vislielākais (vismazākais) elements, tad to sauc par *ierobežotu no augšas (apakšas)*.

Elementu a sauc par *maksimālu (minimālu)*, ja no tā, ka $a \leq x$ seko, ka $a = x$ (no tā, ka $x \leq a$ seko, ka $a = x$).

1.6.2. Sakārtojuma vizualizēšana - Hasses grafs

Daļējā sakārtojuma orientētais grafs - grafs kā vispārīgai attiecībai.

Vizualizējot daļējus sakārtojumus grafu veidā, ir lietderīgi nedaudz modificēt attiecības grafa jēdzienu - no sākotnējā attiecības grafa tiek izdzēstas tās šķautnes, kuru eksistenci var izsecināt.

Ja ir dots daļējs sakārtojums $(A, \leq)$, tad

1. no sākumā konstruē šī sakārtojuma grafu parastajā nozīmē,
2. izdzēš visas cilpas, jo to eksistence ir refleksivitātes sekas,
3. izdzēš visas šķautnes, kuru eksistence ir tranzitivitātes sekas.

Šādu grafu sauc par *sakārtojuma (Hasses) grafu*.

Ja kopa A ir galīga, tad šī definīcija nozīmē, ka starp dažādiem elementiem a un b ir šķautne $a \leftarrow b$ tad un tikai tad, ja $a \leq b$ un neeksistē c tāds, ka $a \leq c$ un $c \leq b$. Šādā gadījumā teiksim, ka b *nosedz* a.

1.6.3. DSK īpašības

Par intervālu $[x, y]$ sauksim DSK $(A, \leq)$ apakškopu $B = \{z \in A | x \leq z \leq y\}$.

Divas DSK $(A, \leq_A)$ un $(B, \leq_B)$ sauksim par *izomorfām*, ja eksistē bijektīva funkcija $f : A \to B$ tāda, ka $a \leq_A b$ tad un tikai tad, ja $f(a) \leq_B f(b)$.

1.2. teorēma. Jebkura galīga DSK ir izomorfa kādas kopas X pakāpes kopas $\mathcal{P}(X)$ apakškopai ar apakškopu iekļaušanas attiecību $\subseteq$.

PIERĀDĪJUMS Patstāvīgi. Izomorfisms tiek pierādīts konstruktīvi. Ja ir dota DSK A un elements x, tad atbilstošo apakškopu saista ar to elementu apakškopu, kas ir mazāki vai vienādi kā x. ■

Par DSK *kēžu sadalījumu* sauksim tās elementu kopas sadalījumu apakškopās, kurām atbilstošās apakšDSK ir ķēdes.

1.3. teorēma. (Dilvorts) Galīgai DSK platums ir vienāds ar minimālo ķēžu sadalījuma elementu skaitu (minimālo skaitu ķēžu, kurās var sadalīt doto DSK).

PIERĀDĪJUMS Patstāvīgi, izmantot matemātisko indukciju pēc platuma. ■

Operācijas ar DSK:

- apvienojums - ja dotas DSK $D_1 = (A_1, R_1)$ un $D_2 = (A_2, R_2)$ un $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, tad
$$D_1 + D_2 = (A_1 \cup A_2, R_1 \cup R_2),$$
- lineārā summa - ja dotas DSK $D_1 = (A_1, R_1)$ un $D_2 = (A_2, R_2)$ un $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, tad
$$D_1 \oplus D_2 = (A_1 \cup A_2, R_1 \cup R_2 \cup (A_1 \times A_2)),$$
- Dekarta reizinājums - ja dotas DSK $D_1 = (A_1, R_1)$ un $D_2 = (A_2, R_2)$ un $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, tad
$$D_1 \times D_2 = (A_1 \times A_2, S),$$
kur elementi (a_1, a_2) un (b_1, b_2) ir salīdzināmi tad un tikai tad, ja $a_1 \leq_{R_1} b_1$ un $a_2 \leq_{R_2} b_2$.

1.14. piemērs. Kēde ir viena elementa DSK iterētā lineārā summa. Antiķēde ir viena elementa DSK iterēts apvienojums.

Ja ir dotas divas DSK $D_1 = (A_1, R_1)$ un $D_2 = (A_2, R_2)$, tad var definēt *leksikogrāfisko sakārtojumu* (kopu) Dekarta reizinājumā $A_1 \times A_2$ šādi: $(a_1, a_2) \leq (b_1, b_2)$ tad un tikai tad, ja $a_1 \leq b_1$ vai $a_1 = b_1$ un $a_2 \leq b_2$.

1.15. piemērs. Ja ir dota pilnīgi sakārtota kopa $(A, \leq)$, tad katram $n \in \mathbb{N}$ kopā A^n var definēt pilnu sakārtojumu, ko sauc par sakārtojumam $\leq$ atbilstošo leksikogrāfisko sakārtojumu, kuru mēs apzīmēsim ar $\preceq$, šādā veidā: $(a_1, ..., a_n) \preceq (b_1, ..., b_n)$ tad un tikai tad, ja mazākajam indeksam i, tādam, ka $a_i \neq b_i$ izpildās nosacījums $a_i \leq b_i$.

DSK sauc par *graduētu*, ja visām maksimālām ķēdēm ir vienāds garums. Par graduētas kopas *rangu* sauc jebkuras tās maksimālas ķēdes garumu.

DSK $(B, \leq_B)$ ir DSK $(A, \leq_A)$ *paplašinājums*, ja $(\leq_A) \subseteq (\leq_B)$. Ja B ir lineārs sakārtojums, to sauc par *lineāru paplašinājumu*.

1.4. teorēma. Ja $(A, \leq_A)$ ir DSK un ja eksistē divi nesalīdzināmi elementi x un y, tad eksistē A paplašinājums $(A, \leq)$, kurā $x \leq y$.

PIERĀDĪJUMS Definējam $x \leq y$ un pievienojam jaunā daļējā sakārtojuma grafikam visas iespējamās šīs definīcijas sekas. Ja sākotnēji attiecības grafiks bija R, tad tagad tas būs

$$R' = R \cup (x, y) \cup (D_x \times U_y),$$

kur $D_x = \{(a, x) | (a, x) \in R\}$ un $U_x = \{(y, b) | (y, b) \in R\}$ ■

1.5. teorēma. Jebkurai galīgai DSK eksistē lineārs paplašinājums.

PIERĀDĪJUMS Pierāda izmantojot matemātisko indukciju pēc elementu skaita.

1.2. piezīme. Topoloģiskās šķirošanas problēma: atrast dotās DSK lineāro paplašinājumu.

Par DSK A *realizatoru* sauc visu tādu tās lineāro paplašinājumu kopu, kuru šķēlums ir A. Par DSK A *dimensiju* sauc minimāli iespējamo elementu skaitu tās realizatorā.

1.16. piemērs. DSK pielietojumi šķirošanā. Šķirošanas uzdevuma mērķis ir sakārtot dotos skaitļus (vispārīgā gadījumā, lineāri sakārtotas kopas elementus) pieaugošā kārtībā veicot vairākkārtīgi divu elementu salīdzināšanas operācijas. Tādējādi, jebkurā laika momentā uzkrāto zināšanu apjoms ir DSK, kas apraksta visu salīdzināšanu rezultātus. Algoritms ir jāizstrādā tā, lai katra nākamā salīdzināšana pēc iespējas samazinātu DSK dimensiju.

1.7. Ekvivalence

Attiecību sauc par *ekvivalenci*, ja tā ir

- refleksīva;
- simetriska;
- tranzitīva.

Ekvivalences parasti apzīmē ar simboliem, kas ir izteikti simetriski attiecība pret vertikālo asi, piemēram, $=, \equiv, \sim, \simeq, \asymp, \approx, \cong\ .\ \doteq, \approxeq, \div$.

Visus elementus, kas ir salīdzināmi ar kādu elementu a dotajā ekvivalences attiecībā, sauksim par *a ekvivalences klasi*.

1.17. piemērs. Klasiski ekvivalenču piemēri: skaitļu un, vispārīgāk, matemātisku objektu vienādība vai "izomorfisms", ģeometrisku figūru līdzība.

Ja ir dota funkcija $f : A \to B$, tad ir definēta kodola ekvivalences attiecība kopā A: $a \sim b$ tad un tikai tad, ja $f(a) = f(b)$.

1.6. teorēma. Jebkurai kopai A pastāv bijekcija starp ekvivalencēm, kas uzdotas kopā A un kopas A sadalījumiem.

PIERĀDĪJUMS

Sadalījumam piekārtojam ekvivalenci.

Ja ir dots kopas A sadalījums $A = \{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$, tad definēsim tam atbilstošu ekvivalenci $\equiv$ šādā veidā: $a \equiv b$ tad un tikai tad, ja a un b pieder vienai un tai pašai sadalījuma apakškopai A_x, apzīmēsim šo attēlojumu no kopas A sadalījumu kopas uz kopas A attieksmju kopu ar φ.

Pierādīsim, ka katram sadalījumam definētā attiecība tiešām ir ekvivalence: refleksivitāte - katram $a \in A$ izpildās $a \equiv a$, simetrija - ja $a \equiv b$, tad $\{a, b\} \in A_x$ kādai apakškopai A_x un $b \equiv a$, tranzitivitāte - ja $a \equiv b$ un $b \equiv c$, tad $\{a, b\} \in A_x$ un $\{b, c\} \in A_y$, tātad $A_x = A_y$ un $a \equiv c$.

Ekvivalencei piekārtojam sadalījumu.

No otras puses, pieņemsim, ka ir dota ekvivalence $\equiv$ un parādīsim, ka šādai attiecībai var viennozīmīgi piekārtot kopas A sadalījumu, apzīmēsim šo attēlojumu no kopas A ekvivalenču kopas uz kopas A sadalījumu kopu ar ψ.

Katram $a \in A$ definēsim $A_a = \{x \in A | x \equiv a\}$ (elementa a ekvivalences klasi). Katram a izpildās $a \in A_a$, tātad $A_a \neq \emptyset$ un $\bigcup_{a \in A} A_a$, tātad kopa $\{A_a\}_{a \in A}$ ir kopas A pārklājums.

Pierādīsim vēl, ka ja $A_a \neq A_b$, tad $A_a \cap A_b = \emptyset$. Ja $A_a \cap A_b \neq \emptyset$, tad eksistē c tāds, ka $c \in A_a$ un $c \in A_b$, no kā seko, ka $a \equiv c$ un $b \equiv c$. No tranzitivitātes seko, ka $a \equiv b$.

Pieņemsim, ka eksistē x tāds, ka $x \in A_a$ un $x \notin A_b$, tad iegūstam, ka $x \equiv a$ un $x \not\equiv b$. Tā kā $a \equiv b$, tad no tranzitivitātes seko, ka $x \equiv b$, kas ir pretruna.

Līdzīgā veidā iegūsim pretrunu, ja pieņemsim, ka eksistē x tāds, ka $x \in A_b$ un $x \notin A_a$.

No funkciju φ un ψ konstrukcijām seko, ka to kompozīcijas jebkurā kārtībā ir vienādas ar vienības attēlojumiem attiecīgajās kopās, tātad abas šīs funkcijas ir bijekcijas. ■

Tādējādi, par ekvivalences attiecībām ir lietderīgi domāt, kā par kopas sadalījumiem jeb ekvivalences klasēm.

Kopas A ekvivalenču kopā kā visu kopas A attiecību apakškopā var uzdot daļēja sakārtojuma attiecību $\leq$ un no tās atvasināto attiecību $(<) = (\leq)\backslash(=)$. Ja $\epsilon_1 < \epsilon_2$, tad saka, ka attiecība ϵ_1 ir *smalkāka* nekā ϵ_2.

Var definēt divas operācijas ar ekvivalences attiecībām: summu un reizinājumu:

- divu ekvivalences attiecību ϵ_1 un ϵ_2 summa $\epsilon_1 \vee \epsilon_2$ ir ekvivalences attiecība, kuras ekvivalences klases ir minimāli ϵ_1 un ϵ_2 klašu apvienojumi, citiem vārdiem sakot $\epsilon_1 \vee \epsilon_2$ ir smalkākā ekvivalence, tas ir rupjāka kā ϵ_1 un ϵ_2;

- divu ekvivalences attiecību ϵ_1 un ϵ_2 reizinājums $\epsilon_1 \wedge \epsilon_2$ ir ekvivalences attiecība, kuras ekvivalences klases ir ϵ_1 un ϵ_2 klašu netukši šķēlumi, $x(\epsilon_1 \wedge \epsilon_2)y$ tad un tikai tad, ja $x\epsilon_1 y$ un $x\epsilon_2 y$, citiem vārdiem sakot $\epsilon_1 \wedge \epsilon_2$ ir rupjākā ekvivalence, kas ir smalkāka kā ϵ_1 un ϵ_2.

2. 3.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

3.1 Dotas attiecības ρ_1 un ρ_2 ar grafikiem

$$R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x + 2y > 0\},$$
$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 3x > y\}.$$

Aprakstīt grafikus attiecībām $\rho_1 \backslash \rho_2$,$\rho_1\rho_2$,$\rho_2\rho_1$.

3.2 Atrast piemēru attiecībai, kas nav refleksīva, ir antisimetriska un tranzitīva.

3.3 Atrast galīgas negraduētas DSK piemēru (uzzīmēt Hasses grafu).

3.5 Uzzīmēt Hasses grafus DSK $A_n = (\mathcal{P}(X_n), \subseteq)$, kur $n = 2, 3, 4$ un $X_n = \{1, ..., n\}$.

3.5 Definēt daļēju sakārtojumu kopā $\mathbb{R}^2$ (reālo skaitļu kopas Dekarta kvadrātā).

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

3.6 Atrast DSK piemēru, kurai eksistē tieši viens minimāls elements un neeksistē neviens vismazākais elements (uzzīmēt Hasses diagrammu).

3.7 Teiksim, ka kopas X sadalījums netukšās kopās $\mathcal{P} = \{P_i\}_{i \in I}$ ir smalkāks nekā sadalījums $\mathcal{Q} = \{Q_j\}_{j \in J}$, ja katram indeksam i eksistē indekss j tāds, ka $P_i \subseteq Q_j$, apzīmēsim to ar pierakstu $\mathcal{P} \preceq \mathbb{Q}$. Pierādīt, ka attiecība $\preceq$ ir daļējs sakārtojums. Visu kopas X sadalījumu kopu apzīmēsim ar $\mathcal{B}(X)$. Uzzīmēt Hasses grafus DSK $(\mathcal{B}(X_n), \preceq)$, kur $n = 2, 3, 4$ un $X_n = \{1, ..., n\}$. Visos gadījumos atrast DSK garumu un platumu, minimālos un maksimālos elementus.

3.8 Kāds ir platums DSK $A_n = (\mathcal{P}(X_n), \subseteq)$, kur $X_n = \{1, ..., n\}$?

3.9 (Neatrisināta problēma) Kāds ir dažādo antiķēžu skaits DSK $A_n = (\mathcal{P}(X_n), \subseteq)$, kur $X_n = \{1, ..., n\}$.?