DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Maģistra studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Diskrētā matemātika

2.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2007./2008.studiju gads

Saturs

1. Attēlojumi un funkcijas

1.1. Pamatdefinīcijas

Kopas parasti tiek uzskatītas par fiksētiem, statiskiem objektiem. Lai atļautu kopu un to elementu pārveidojumus, ievieš *attēlojuma* jēdzienu.

Attēlojums ir kāda darbība vai operācija, kas pārveido, pārstrādā dotās kopas elementus par kādas citas (vai tās pašas) kopas elementiem.

Par *attēlojumu f no kopas A uz kopu B*, apzīmē kā $f : A \to B$ vai $A \xrightarrow{f} B$) sauc atbilstības likumu, kas katram kopas A elementam a piekārto kādu kopas B apakškopu $f(a)$, ko sauc par a attēlu attiecībā uz f (f-attēlu).

Kopas A elementi, kuru attēli ir netukšas kopas, veido attēlojuma f *definīcijas apgabalu* $D(f)$.

Par kopas A apakškopas A' f-attēlu (apzīmē ar pierakstu $Im(f)$ vai $f(A')$) sauc kopu

$$\bigcup_{a\in A'} f(a).$$

Par attēlojuma f *vērtību kopu* sauc kopu $f(A)$.

Par kopas B elementa b *inverso attēlu* $f^{-1}(b)$ sauksim kopas A apakškopu

$$\{a \in A | b \in f(a)\}.$$

Par kopas B apakškopas B' inverso attēlu $f^{-1}(B')$ sauksim kopas A apakškopu

$$\bigcup_{b\in B'} f^{-1}(b).$$

Par attēlojuma $f : A \to B$ grafiku $G(f)$ sauc kopu

$$\{(a, b) \in A \times B | b \in f(a) \subseteq A \times B\}.$$

Divus attēlojumus $f : A \to B$ un $g : C \to D$ sauc par vienādiem ($f = g$) tad un tikai tad, ja $A = C$, $B = D$ un katram $a \in A$ izpildās nosacījums $f(a) = g(a)$.

1.1. piemērs. Skaitļu funkcijas ir attēlojumi no kādas reālu skaitļu kopas $\mathbb{R}$ apakškopas uz kādu (iespējams, citu) $\mathbb{R}$ apakškopu.

Pieņemsim, ka kopa A ir visu cilvēku kopa, B ir visu cilvēku valodu kopa, katrs cilvēks principā ir spējīgs pārvaldīt vismaz vienu valodu, tāpēc apskatīsim attēlojumu f, kas piekārto katram cilvēkam to valodu kopu, kuras viņš vai viņa pārvalda. Ievērojiet, ka ir cilvēki, kuriem tiek piekārtota tukša kopa (tie ir cilvēki, kas nepārvalda nevienu valodu, piemēram, mazi bērni), ir cilvēki, kas pārvalda vienu valodu (tādu ir vairākums) un ir cilvēki, kas pārvalda vairākas valodas.

1.2. Attēlojuma uzdošanas veidi

1.2.1. Attēlu pārskaitīšana

Attēlojumu var uzdot tieši definējot attēlu katram kopas A elementam. Šī metode der, ja kopas A un B ir galīgas kopas ar nelielu elementu skaitu.

1.2.2. Attēlojuma definējošā īpašība vai algoritms

Attēlojumu var uzdot definējot attēlojuma raksturīgu īpašību vai attēlu atrašanas algoritmu, izmantojot matemātiskas vai citas dabas terminus.

1.2. piemērs. $f(x) = \sin(x)$.

1.2.3. Attēlojuma vizualizācija

Attēlojumu ir lietderīgi vizualizēt šādā veidā:

- atzīmēsim visus kopu A un B elementus,
- katram $a \in A$ zīmē vienu bultiņu no a uz katru elementu kopā $f(a)$.

Šādu zīmējumu sauc par *attēlojuma grafu* vai *diagrammu*, kopu elementus sauc par grafa *virsotnēm* un bultiņas - par *šķautnēm*.

Ja attēlojums ir definēts no kopas A uz A (tādu attēlojumu sauc par *attēlojumu sevī* vai *endoattēlojumu*), tad pietiek atlikt kopas A elementus vienā eksemplārā.

1.3. Operācijas ar attēlojumiem

1.3.1. Apvērstais (inversais) attēlojums

Ja ir dots attēlojums $f : A \to B$, tad par tā *apvērsto attēlojumu* $f^{-1} : B \to A$ sauc attēlojumu, kas katram $b \in B$ ir definēts ar nosacījumu $g(b) = f^{-1}(b)$ (apzīmē ar f^{-1}).

Par attēlojuma f apvērsto attēlojumu ir lietderīgi domāt kā par attēlojumu, ko iegūst, izmainot uz pretējo visu bultiņu virzienus attēlojuma f grafā.

Pārejot uz apvērsto attēlojumu, definīcijas apgabals un vērtību apgabals mainās vietām.

$(f^{-1})^{-1} = f$, jo, mainot bultiņu virzienu divas reizes, iegūstam sākotnējo grafu.

1.3.2. Attēlojumu kompozīcija

Par attēlojumu $f : A \to B$ un $g : B \to C$ *kompozīciju* sauc attēlojumu $g \circ f : A \to C$, kas ir definēts šādi:

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) \text{ katram } a \in A.$$

Ja ir dots galīgs skaits attēlojumu

$$f_1 : A_1 \to A_2$$
$$f_2 : A_2 \to A_3$$
$$...$$
$$f_n : A_n \to A_{n+1},$$

tad par to kompozīciju $f_n \circ f_{n-1} \circ ... \circ f_1$ sauc attēlojumu no A_1 uz A_{n+1}, kas katram $a \in A_1$ ir definēts ar vienādību

$$(f_n \circ f_{n-1} \circ ... \circ f_1)(a) = f_n(f_{n-1}(...(f_1(a)))).$$

Attēlojuma $f : A \to A$ n-kārtīgo kompozīciju $\underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{n}$ sauksim par f *n-to pakāpi*.

Ja attēlojums $f : A \to B$ ir vienāds ar kompozīciju $g \circ h$, kur $h : A \to C$ un $g : C \to B$, tad teiksim, ka attēlojums f *faktorizējas caur* C.

1.1. teorēma. (kompozīcijas asociativitātes īpašība). Jebkuriem trīs attēlojumiem

$$f : A \to B,$$
$$g : B \to C,$$
$$h : C \to D$$

izpildās vienādība

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f).$$

PIERĀDĪJUMS Pierādīsim, ka katram $a \in A$ izpildās vienādība

$$((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ (g \circ f))(a).$$

Kopa pierādāmās vienādības kreisajā pusē ir

$$((h \circ g) \circ f)(a) = (h \circ g)(f(a)) = h(g(f(a))).$$

Kopa labajā pusē ir

$$(h \circ (g \circ f))(a) = (h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a))).$$

un vienādība ir acīmredzama. ■

1.4. Attēlojumu speciālgadījumi

1.4.1. Definīcijas

Attēlojumu $f : A \to B$ sauc par *visur definētu*, ja $D(f) = A$.

Attēlojumu sauc par *sirjektīvu (pārklājošu)*, ja $f(A) = B$.

Attēlojumu sauc par *funkciju*, ja tas ir visur definēts un katram $a \in A$ kopa $f(a)$ satur tieši vienu elementu.

Funkciju sauc par *injektīvu (iekļaujošu)*, ja jebkuriem dažādiem kopas A elementiem a_1 un a_2 ir dažādi attēli, tas ir,

$$\text{ja } a_1 \neq a_2, \text{ tad } f(a_1) \neq f(a_2).$$

Cita injektivitātes definīcija: katram $b \in f(A)$ kopa $f^{-1}(b)$ satur tieši vienu elementu.

Funkciju, kas ir vienlaicīgi surjektīva un injektīva, sauc par *bijektīvu (savstarpēji viennozīmīgu)* funkciju (vai par *permutāciju*, ja iet runa par endofunkciju).

Jebkura kopā A funkciju f, kas katram $a \in A$ definēta ar formulu $f(a) = a$ sauc par *vienības attēlojumu* kas atbilst kopai A, apzīmē ar id_A.

Visplašāk pielietotais attēlojumu tips ir funkcijas.

Attēlojumu, kas nav funkcija, bieži sauc par *daudzvērtīgu funkciju*.

Ja attēlojumam $f : A \to B$ izpildās īpašība $f(a) = b$, $\forall a \in A$, kur b ir fiksēts, tad tādu attēlojumu sauksim par *konstantu attēlojumu*.

1.1. piezīme. Funkcijas starp mazām galīgām kopām ir ērti analizēt izmantojot funkciju grafus.

Tā, piemēram, funkcija ir surjektīva tad un tikai tad, ja katrā kopas elementā ieiet vismaz viena - bultiņa. Funkcija ir injektīva tad un tikai tad, ja katrā kopas elementā ieiet ne vairāk kā viena bultiņa.

Bijektīvu funkciju no (visbiežāk galīgas) kopas sevī parasti sauc par *permutāciju (pārkārtojumu)*.

1.2. teorēma.

1. Divu funkciju kompozīcija ir funkcija.
2. Divu bijektīvu funkciju kompozīcija ir bijektīva funkcija.
3. Ja funkcija $f : A \to B$ ir bijektīva funkcija, tad tās apvērstā funkcija f^{-1} arī ir bijektīva funkcija un izpildās vienādības

$$f \circ f^{-1} = id_B,$$
$$f^{-1} \circ f = id_A.$$

PIERĀDĪJUMS Patstāvīgs darbs. ■

1.3. teorēma. A - galīga kopa, $f : A \to A$.

1. Ja f ir injektīva funkcija, tad tā ir bijektīva.
2. ja f ir sirjektīva funkcija, tad tā ir bijektīva.

PIERĀDĪJUMS Patstāvīgs darbs. ■

1.4.2. Ar kopu operācijām saistītas funkcijas

Vairākas dabiski definējamas funkcijas var atrast, sīkāk aplūkojot kopu teorijas pamatdefinīcijas un operācijas ar kopām:

- Ja $S \subseteq A$, tad ir definēta injektīva funkcija ι_S, ko sauc par apakškopai S atbilstošo *dabisko iekļaušanu (immersiju, iegremdēšanu)*, un kas ir definēta ar formulu

  $$\iota_S(s) = s$$

  kur labajā pusē elements s tiek uzskatīts par kopas A elementu.

- Ja ir dots attēlojums $f : A \to B$, tad kompozīciju

  $$f \circ \iota_S : S \to B$$

  sauc par attēlojuma f *sašaurināšanu* uz apakškopu S.

- Ja ir dots attēlojums $g : S \to B$ un ja eksistē attēlojums $f : A \to B$, tāds, ka $f \circ \iota_S = g$, tad saka, ka f ir attēlojuma g *paplašinājums* no apakškopas S uz A.

- Katrai kopas A apakškopai S definēsim funkciju $\chi_S : S \to \{0, 1\}$ ar šādu sistēmu:

$$\chi_S(a) = \begin{cases} 1, & \text{ja } a \in S \\ 0, & \text{ja } a \notin S \end{cases}$$

  Funkciju χ_S sauc par apakškopas S *raksturīgo (harakteristisko) funkciju*.

- Ja A_I ir kopas A faktorkopa, tad ir definēta sirjektīva funkcija $\pi : A \to A_I$, ko sauc par faktorkopai atbilstošo *dabisko projekciju*, un kas katram $a \in A_\alpha$ ir definēta ar formulu $\pi(a) = A_\alpha$.

- Ja ir dotas divas kopas A un B, tad ir definētas divas sirjektīvas funkcijas

$$\pi_A : A \times B \to A,$$
$$\pi_B : A \times B \to B,$$

  kuras sauc par *dabiskajām projekcijām uz tiešā reizinājuma* *komponentēm* šīs funkcijas ir definētas ar formulām

$$\pi_A((a,b)) = a,$$
$$\pi_B((a,b)) = b.$$

1.5. Orbītas un invariantās kopas

Pieņemsim, ka ir dots attēlojums $f : A \to A$. Kopu

$$Orb_f(a) = \bigcup_{i=0}^{\infty} f^i(a)$$

sauksim par elementa a *orbītu* attiecībā uz f. Apakškopai $S \subseteq A$ kopu

$$Orb_f(S) = \bigcup_{i=0}^{\infty} f^i(S)$$

arī sauksim par tās orbītu.

Apakškopu $S \subseteq A$ sauksim par *invariantu (fiksētu) apakškopu* attiecībā uz f, ja

$$Orb_f(S) \subseteq S \text{ vai } Orb_f(S) = S.$$

Elementu a sauksim par *fiksētu punktu*, ja tam atbilstošā vienelementa apakškopa ir fiksēta, citiem vārdiem sakot - $f(a) = a$.

Katras apakškopas orbīta ir fiksēta apakškopa. Diviem kopas elementiem orbītas var sakrist.

1.6. Attēlojumu izomorfizms

$$f : A \to B,$$
$$g : C \to D$$

sauksim par *izomorfiem*, ja eksistē bijektīvas funkcijas

$$\varphi : A \to C,$$
$$\psi : B \to D$$

tādas, ka

$$\psi \circ f = g \circ \varphi.$$

Citiem vārdiem sakot, izomorfi attēlojumi atšķiras tikai ar elementu apzīmējumiem.

1.7. Permutācijas un to struktūra

1.7.1. Permutāciju pieraksta veidi

Permutāciju pierakstam var izmantot šādus veidus:

- attēlu saraksts;
- vertikālais pieraksts;
- horizontālais pieraksts - -šajā gadījumā funkciju pieraksta divu rindu veidā, kas ir savienotas ar iekavām, augšējā rindā raksta kopas elementus kaut kādā noteiktā kārtībā, apakšējā rindā raksta kopas elementu attēlus attiecībā uz doto funkciju tā, ka katrā kolonnā apakšējais elements ir augšējā elementa attēls;
- diagrammas veidā.

1.3. piemērs. Izmantojot jebkuru no pieraksta veidiem noteikt divu permutāciju kompozīciju, inverso permutāciju.

1.7.2. Cikli

Funkciju $f : A \to A$ no galīgas kopas A sevī sauc par *ciklisku attēlojumu* vai *ciklu*, ja

- vai nu $|A| \geq 2$ un kopas A elementus var sanumurēt noteiktā kārtībā $a_0, ..., a_{n-1}$ tā, ka $f(a_i) = a_{i+1 \text{ mod n}}$,
- vai arī $|A| = 1$ (un kopas A vienīgais elements a apmierina vienādību $f(a) = a$).

Ja A ir galīga kopa un $f : A \to A$, tad kopas A apakškopu C sauc par f-ciklu vai ciklu attiecībā uz funkciju f, ja funkcijas sašaurinājums uz C ir cikls.

Elementu skaitu ciklā sauc par *cikla garumu*.

Ciklu, kura garums ir 1, sauc par funkcijas *fiksēto punktu*. Ciklu, kura garums ir 2 sauksim par *transpozīciju*.

Funkciju $f : A \to A$ sauc par *vispārinātu ciklu*, ja eksistē apakškopa $C \subseteq A$, kas ir f-cikls ar garumu lielāku kā 1 un visi elementi kopā

$A \backslash C$ ir fiksēti punkti.

Divus vispārinātus ciklus, kas uzdoti vienā kopā sauc, par *neatkarīgiem vispārinātiem cikliem*, ja to netriviālo ciklu šķēlums ir tukša kopa.

1.4. teorēma. Divi neatkarīgi cikli c un c' apmierina sakarību $c \circ c' = c' \circ c$ (komutē).

PIERĀDĪJUMS Katram koaps elementam a pierādām, ka

$$(c \circ c')(a) = (c' \circ c)(a).$$

■

Ciklu ir viegli interpretēt funkcijas grafa terminos: tas ir sakarīgs grafs (grafs, kuru nevar sadalīt divos vai lielākā skaitā grafos), kurā katrai virsotnei ir tieši viena izejoša un tieši viena ieejoša šķautne.

Ja funkcija $f : A \to A$ ir cikls un

$$f(a_0) = a_1,$$
$$f(a_1) = a_2$$
$$...$$
$$f(a_{n-1}) = a_0$$

tad šādu funkciju ir pieņemts apzīmēt ar pierakstu $f = (a_0, a_1, ..., a_{n-1})$.

1.7.3. Permutācijas sadalījums ciklos

1.5. teorēma. (permutācijas sadalījums ciklos) Galīgas kopas permutācija ir vienāda ar galīgu neatkarīgu vispārinātu ciklu kompozīciju. Šādas kompozīcijas reizinātāji ir noteikti viennozīmīgi ar precizitāti līdz to kārtībai kompozīcijā.

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka ir dota galīgas kopas A permutācija $f : A \to A$ un $|A| = n$. Uzdosim permutāciju f kā grafu.

Tā kā permutācija ir injektīva un surjektīva funkcija, tās grafam piemīt īpašība, ka katrai virsotnei ir tieši viena ieejoša un tieši viena izejoša šķautne.

Tas nozīmē, ka sākot ar jebkuru virsotni a_1 šajā grafā mēs iegūsim virsotņu kopu $C_1 = \{a_1, ..., a_k\}$, kas apmierinās vienādības

$$f(a_1) = a_2,$$
$$f(a_2) = a_3,$$
$$...,$$
$$f(a_k) = a_1.$$

Ja $k = n$, tad permutācija f ir cikls un teorēma ir pierādīta.

Ja $k < n$, tad izvēlēsimies jebkuru elementu $A \backslash C_1$ un atradīsim otro ciklu C_2. Turpināsim šo procedūru tik ilgi, kamēr nebūsim ieguvuši kopas A sadalījumu $\{C_1, ..., C_m\}$, tādu, ka permutācijas f sašaurinājums uz katru apakškopu C_i ir cikls.

Katrs kopas A elements pieder vienam un tikai vienam ciklam, tāpēc šāds sadalījums ir noteikts viennozīmīgi.

Ja $c_1, ..., c_k$ ir atbilstošie vispārināti cikli, kuru netriviālo ciklu šķēlums ir tukša kopa, tad visu šo ciklu kompozīcija nav atkarīga no reizinātāju kārtības.

Redzam, ka $f = c_1 \circ c_2 \circ ... \circ c_k$.
■

1.2. piezīme. (*permutācijas cikliskais pieraksts*) Teorēma rāda, ka permutāciju var uzdot pārskaitot tās ciklus un kārtību, kādā tiek sakārtoti elementi katrā ciklā, šo pierakstu sauc par permutācijas ciklisko pierakstu.

Šajā pierakstā ciklus ar garumu 1 parasti neuzrāda.

1.4. piemērs. Atrast dotās permutācijas sadalījumu ciklos un ciklisko pierakstu.

Par kopas A permutācijas f *dekrementu* d_f sauc skaitli $|A|-k$, kur k ir permutācijas neatkarīgo ciklu skaits, ieskaitot fiksētos punktus.

Par funkcijas $f : A \to A$ kārtu sauksim mazāko naturālo skaitli k tādu, ka $f^k = id_A$.

1.7.4. Permutācijas paritāte

1.6. teorēma. Katra permutācija ir vienāda ar transpozīciju kompozīciju.

PIERĀDĪJUMS Tā kā jebkura permutācija ir neatkarīgu ciklu kompozīcija, pietiek pierādīt teorēmu, ja permutācija ir cikls. Vienkāršības pēc uzskatīsim, ka $A = \{1, 2, ..., n\}$.

Pieņemsim, ka ir dots cikls $f = (1, 2, ..., n-1, n)$. Var redzēt, ka

$$f = (1, n) \circ (1, n-1) \circ ... \circ (1, 2).$$

(paskatīties katra elementa attēlu). ■

1.7. teorēma. Dota permutācija $f : A \to A$, kas ir izteikta kā transpozīciju kompozīcija $f = t_1 ... t_k$. Tad ir spēkā šādi apgalvojumi:

1. Skaitlis $\epsilon_f = (-1)^k$ ir atkarīgs tikai no f un nav atkarīgs no transpozīcijām.
2. Izpildās vienādība $\epsilon_{fg} = \epsilon_f \epsilon_g$ (paritātes multiplikatīvā īpašība).

PIERĀDĪJUMS Vienkāršības pēc uzskatīsim, ka $A = \{1, 2, ..., n\}$.

1. Pieņemsim, ka eksistē vēl viena kompozīcija

$$f = s_1 ... s_l,$$

kur skaitļi k un l pieder dažādām atlikumu klasēm mod 2. Iegūstam, ka

$$t_1 ... t_k = s_1 ... s_l.$$

Ievērosim, ka katras transpozīcijas kvadrāts ir vienības attēlojums, tātad $t_i^{-1} = t_i$ un $s_i^{-1} = s_i$. Veidosim kompozīcijas ar t_1,...,t_k (no kreisās puses), beigās iegūsim vienādību

$$id_A = t_k t_{k-1} ... t_1 s_1 s_2 ... s_l.$$

Ievērosim, ka $k+l$ ir nepāra skaitlis pēc pieņēmuma.

Pierādīsim šādu apgalvojumu: ja $id_A = \sigma_1\sigma_2...\sigma_m$, kur katram i permutācija σ_i ir transpozīcija, tad m ir pāra skaitlis, no tā sekos pretruna un teorēmas pirmā punkta pierādījums.

Šo apgalvojumu mēs pierādīsim, parādot, ka reizinājums ir vienāds ar $m-2$ transpozīciju reizinājumu. Atkārtojot šo operāciju vairākas reizes, iegūsim, ka pieņemot to, ka m ir nepāra skaitlis, seko, ka vienības attēlojums ir vienāds ar vienu transpozīciju, kas ir pretruna.

Pieņemsim, ka visas transpozīcijas, sākot ar σ_{j+1}, nesatur elementu 1 (1 ir to fiksētais punkts) (ja neviena transpozīcija nesatur 1, tad izvēlēsimies jebkuru elementu, kuru satur vismaz viena transpozīcija). Pieņemsim, ka $\sigma_j = (1p)$. Attiecībā uz σ_{j-1} ir iespējami 4 gadījumi:

a) $\sigma_{j-1} = (1p)$, tad $\sigma_{j-1}\sigma_j = id$ un $id_A = \sigma_1...\sigma_{j-2}\sigma_{j+1}...\sigma_m$;

b) $\sigma_{j-1} = (1q)$, $q \neq p$, tad $\sigma_{j-1}\sigma_j = (1q)(1p) = (1p)(pq)$;

c) $\sigma_{j-1} = (pq)$, $q \neq p$, tad $\sigma_{j-1}\sigma_j = (pq)(1p) = (1q)(pq)$;

d) $\sigma_{j-1} = (qr)$, $q \neq p$, $r \neq p$,$q \neq r$, tad $\sigma_{j-1}\sigma_j = (qr)(1p) = (1p)(qr)$.

Veiksim minētos pārveidojumus. Jebkurai permutācijai $\tau = \sigma_1\sigma_2...\sigma_m$ mēs šādu pārveidojumu varam veikt, apzīmēsim to ar $\urcorner(\tau)$.

Ir spēkā šādi apgalvojumi:

- Ja ir spēkā gadījums a), tad pārveidojums $\urcorner$ samazina transpozīciju skaitu par 2.
- Ja ir spēkā gadījumi b), c) vai d), tad pārveidojums $\urcorner$ panāk to, ka elements 1 pirmo reizi tiek kustināts transpozīcijā, kuras indekss ir par 1 mazāks nekā sākotnējā permutācijā.

Veiksim pārveidojumu $\urcorner$ tik reizes, kamēr vai nu nebūs spēkā gadījums a), vai arī tiek panākts, ka $id_A = \sigma'_1...\sigma'_m$, kur $\sigma'_1 = (1s)$ un pārējās transpozīcijas nekustina elementu 1. Iegūstam, ka $id_A(1) = \sigma'_1(1) = s \neq 1$, kas ir pretruna.

2. Ja $f = t_1 t_2 ... t_k$ un $g = s_1 s_2 ... s_l$, tad $fg = t_1 t_2 ... t_m s_1 s_2 ... s_l$ un

$$\epsilon_{fg} = (-1)^{k+l} = (-1)^k (-1)^l = \epsilon_k \epsilon_l.$$

■

Lielumu $\epsilon_f = (-1)^k$ sauc par f *paritāti*.

Atkarībā no paritātes permutāciju sauksim par pāra vai nepāra permutāciju.

1.8. Operācijas

Ja ir dota kopa A, tad funkciju $\mu : A^n \to A$ sauc par n-vietīgu operāciju.

1-vietīga operācija ir vienkārši funkcija $A \to A$.

2-vietīga operācija (bināra operācija) ir funkcija, kas katram sakārtotam kopas A elementu pārim piekārto kādu kopas A elementu.

Bināru operāciju piemēri: skaitļu aritmētiskās operācijas, funkciju kompozīcija.

n-vietīgās operācijas ar $n > 2$ tiek pielietotas relatīvi reti.

2. 1.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

2.1 Pierādīt vai atspēkot: ja dotas divas funkcijas $f : A \to B$ un $g : B \to A$ un $g \circ f = id_A$, tad abas funkcijas ir bijektīvas.

2.2 Kāda ir permutācijas kārta, ja tās neatkarīgajiem cikliem ir kārtas $k_1, k_2, ..., k_s$?

2.3 Dots, ka permutācija f ir cikls. Pierādīt, ka jebkurai permutācijai σ kompozīcija $\sigma f \sigma^{-1}$ arī ir cikls.

2.4 Izteikt permutāciju $(1, 3, 5)(2, 4, 6, 8)$ kā transpozīciju

$$(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 7), (7, 8)$$

kompozīciju.

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

2.5 Kā mainās permutācijas sadalījums ciklos, ja veic tās kompozīciju ar transpozīciju?

2.6 Pierādīt, ka jebkurai permutācijai f izpildās vienādība

$$\epsilon_f = (-1)^{d_f}.$$

2.7 Permutāciju sauksim par involūciju, ja tās kārta ir vienāda ar 2. Pierādīt, ka katru permutāciju var izteikt kā divu involūciju kompozīciju.

2.8 Vispāriniet teorēmu par permutācijas sadalījumu ciklos uz gadījumu, kad ir dota patvaļīga, ne obligāti bijektīva, funkcija $f : A \to A$.