DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Maģistra studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Diskrētā matemātika

15.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2007./2008.studiju gads

Saturs

1. Cikli

1.1. Pamatfakti

1.1.1. Definīcijas un interpretācijas

Vispārīgā gadījumā grafs var stipri atšķirties no koka - tajā var būt inducēti apakšgafi, kas ir izomorfi cikliem.

Tātad ciklu skaits un izvietojums raksturo to, cik stipri grafs atšķiras no koka.

Ciklu var definēt/interpretēt šādos veidos:

- kēdi/vienkāršu ķēdi ar pozitīvu garumu, kuras pirmā virsotne sakrīt ar pēdējo,
- apakšgrafu, kas ir izomorfs ciklam,
- apakšgrafu, kura katras virsotnes pakāpe ir pāra skaitlis,
- cikla $\mathcal{C}_n$ attēlojumu uz grafu, kas saglabā šķautnes,

- šķautņu kopas apakškopu, no kuras var rekonstruēt ciklu vai ciklu apvienojumu.

Par grafa *ciklu matricu* sauksim bināru matricu, kurā

- rindas tiek indeksētas ar grafa vienkāršajiem cikliem (grafa apakšgrafiem, kas ir izomorfi cikliem $\mathcal{C}_n$),
- kolonnas tiek indeksētas ar šķautnēm,
- matricas elementi ir vienādi ar 1 tad un tikai tad, ja elementam atbilstošā šķautne pieder elementam atbilstošajam ciklam.

1.1.2. Fundamentālie cikli un ciklomātiskais skaitlis

Katram sakarīgam grafam eksistē pārklājošais koks.

Katram grafam eksistē pārklājošais mežs.

Par sakarīga grafa Γ *ciklisko rangu* vai *ciklomātisko skaitli* sauksim šķautņu skaitu, kuras nesatur pārklājošais koks - lielumu

$$m(\Gamma) = |E(\Gamma)| - (|V(\Gamma)| - 1) = |E(\Gamma)| - |V(\Gamma)| + 1.$$

Par grafa ciklisko rangu sauksim šķautņu skaitu, kuras nesatur pārklājošais mežs.

Fiksēsim sakarīga grafa Γ pārklājošo koku $\mathcal{T}$. Par Γ *fundamentālu ciklu*, kas ir asociēts ar $\mathcal{T}$ sauksim ciklu, kas veidojas pievienojot $\mathcal{T}$ vienu papildus šķautni.

Visu fundamentālo ciklu kopu sauksim par *fundamentālo ciklu sistēmu*.

Redzam, ka fundamentālās ciklu sistēmas elementu skaits ir vienāds ar $m(\Gamma)$ un nav atkarīgs no $\mathcal{T}$.

1.2. Eilera cikli

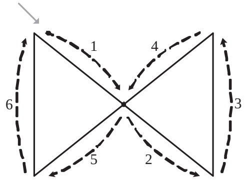
Par grafa *Eilera ciklu* sauksim ciklu, kas satur katru šķautni tieši vienu reizi.

Par grafa *Eilera ķēdi* sauksim ķēdi, kas satur katru šķautni tieši vienu reizi.

Ja grafā eksistē Eilera cikls, tad to sauksim par *Eilera grafu*.

Par orientēta grafa *virzītu Eilera ciklu* sauksim virzītu ciklu, kas satur katru šķautni tieši vienu reizi.

1.1. piemērs.



3.52. attēls. Eilera cikla piemērs

1.1. teorēma. Ja grafs $\Gamma = (V, E)$ ir sakarīgs un netriviāls, tad šādi apgalvojumi ir ekvivalenti:

1) Γ ir Eilera grafs;
2) grafā Γ katras virsotnes pakāpe ir pāra skaitlis;
3) grafa Γ šķautņu kopu var sadalīt ciklu apvienojumā.

PIERĀDĪJUMS Pierādīsim šo teorēmu ar cikla palīdzību.

(1) $\to$ (2) katrā virsotnē Eilera cikls ieiet un iziet vienādu skaitu reižu, tāpēc katras virsotnes pakāpe ir pāra skaitlis.

(2) $\to$ (3) Γ ir sakarīgs un netriviāls grafs, tāpēc katras virsotnes pakāpe ir pozitīva un

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v) \geq 2|V|,$$

tātad

$$|E| > |V| - 1$$

un Γ satur vismaz vienu ciklu Z_1. $\Gamma - Z_1$ ir skeletāls apakšgrafs, kura visu virsotņu pakāpes ir pāra skaitļi un kurš satur vismaz vienu netriviālu sakarīgu komponenti Γ_1 (ignorējam izolētās virsotnes). Γ_1 apmierina tos pašus nosacījumus, kurus apmierina Γ, tāpēc tajā eksistē cikls, kuru izmetam ārā utt. Beigās pēc galīga soļu skaita iegūsim bezšķautņu grafu.

(3) $\rightarrow$ (1) No dotajiem cikliem pakāpeniski konstruējam lielo Eilera ciklu, izmantojot *divu ciklu apvienošanas* operāciju.

■

1.2. teorēma. Sakarīgam grafam Γ eksistē Eilera ķēde tad un tikai tad, ja Γ ir tieši divas nepāra virsotnes.

PIERĀDĪJUMS Ja grafā Γ eksistē Eilera ķēde, tad pievienojot vienu papildus šķautni no šīs ķēdes sākuma līdz beigām, iegūsim Eilera ciklu. Seko, ka sākotnējā grafā Γ tikai divām virsotnēm ir nepāra pakāpes.

Ja grafā Γ tikai divām virsotnēm ir nepāra pakāpes, tad pievienojot vienu papildus šķautni starp šīm virsotnēm iegūsim Eilera grafu. Izmetot no Eilera cikla jauno šķautni iegūsim Eilera ķēdi sākotnējā grafā Γ. ■

1.1. piezīme. Eilera ciklus un ķēdes pielieto uzdevumos, kuros ir jāauzzīmē kāda figūra tā, lai nekāda līnija nebūtu pārvilkta vairāk kā vienu reizi.

1.3. Hamiltona cikli

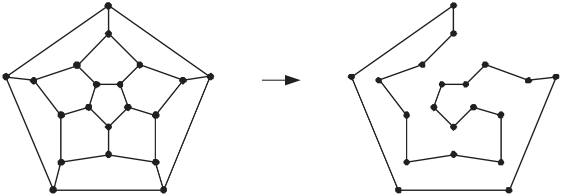
Par grafa *Hamiltona ciklu* sauksim ciklu, kas satur katru virsotni tieši vienu reizi.

Par grafa *Hamiltona ķēdi* sauksim ķēdi, kas satur katru virsotni tieši vienu reizi.

Ja grafā eksistē Hamiltona cikls, tad to sauksim par *Hamiltona grafu*.

Par *virzītu Hamiltona ciklu* sauksim virzītu ciklu, kas satur katru virsotni tieši vienu reizi.

1.2. piezīme. Par Hamiltona ciklu teorijas sākumu tiek uzskatīts matemātiķa V.Hamiltona uzdevums par dodekaedra grafa virsotņu apiešanu tā, lai katra virsotne tiek atzīmēta tieši vienu reizi. Var pierādīt, ka Hamiltona uzdevumam ir viens atrisinājums ar precizitāti līdz grafa automorfismam.

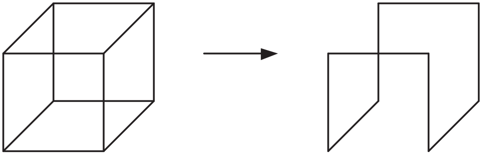


3.53. attēls. Hamiltona cikls dodekaedra grafā

Meklējot Hamiltona ciklu var izmantot šādus vienkāršus novērojumus:

- ja virsotne pakāpe ir 2, tad abas šķautnes ir Hamiltona ciklā,
- ja kādai virsotnei eksistē divas incidentas šķautnes, kuru piedalīšanās Hamiltona ciklā ir pierādīta, tad pārējās incidentās šķautnes var tikt nodzēstas.

1.2. piemērs. Kuba grafam H_3 arī ir viens Hamiltona cikls ar precizitāti līdz automorfismam.



3.54. attēls. Hamiltona cikls kuba grafā

Viegli redzēt, ka Hamiltona grafam nevar būt šarnīri, tātad Hamiltona grafs ir 2-sakarīgs.

Nākamā teorēma rāda, ka grafs ir Hamiltona grafs, ja virsotņu pakāpes ir pietiekoši lielas.

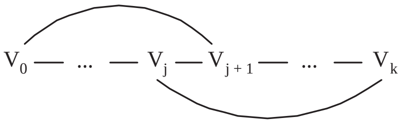
1.3. teorēma. Ja grafam $\Gamma = (V, E)$ izpildās nosacījumi $|V| \geq 3$ un $\delta(\Gamma) \geq \frac{|V|}{2}$, tad Γ ir Hamiltona grafs.

PIERĀDĪJUMS Γ ir sakarīgs, jo pretējā gadījuma mazākajā komponentē virsotņu pakāpes būtu lielākas nekā komponentes virsotņu skaits.

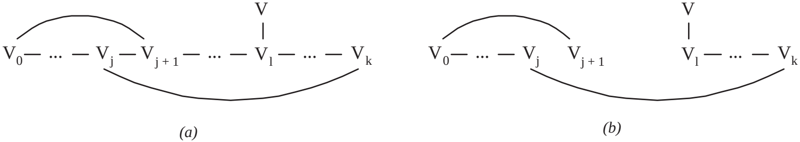
Pieņemsim, ka virsotņu virkne $K = (v_0, ..., v_k)$ ir garākā ķēde grafā Γ. No ķēdes K maksimalitātes seko, ka visas virsotnes, kas ir savienotas ar v_0 vai v_k, pieder virknei K, tātad vismaz $\frac{|V|}{2}$ no virsotnēm $\{v_0, ..., v_{k-1}\}$ ir savienotas ar v_k un vismaz $\frac{|V|}{2}$ virsotnēm $v_i \in \{v_1, ..., v_{k-1}\}$ piemīt šāda īpašība: v_{i+1} un v_0 ir savienotas. No Dirihlē principa seko, ka eksistē virsotne v_j, kas apmierina abus nosacījumus: Var redzēt, ka virsotņu virkne

$$H = (v_0, v_{j+1}, v_{j+2}, ..., v_k, v_j, v_{j-1}, ..., v_0)$$

ir Hamiltona cikls, tāpēc ka pretējā gadījumā šis cikls varētu tikt pārveidots par ķēdi, kuras garums ir lielāks nekā ķēdes K garums, pievienojot šim ciklam ar vienas šķautnes palīdzību kādu no kopas



3.56. attēls. Ilustrācija teorēmas 3.112. pierādījumam



3.57. attēls. Ilustrācija teorēmas 3.112. pierādījumam

$V \backslash \{v_0, ..., v_k\}$ virsotnēm, vismaz viena šāda šķautne eksistē, tā kā grafs Γ ir sakarīgs (skatīt 3.57.(b) attēlā) $\mathcal{QED}$

1.3. piezīme. Hamiltona cikla meklēšana ir grūts uzdevums, nav zināmi algoritmi, izņemot visu variantu pārmeklēšanu.

2. Neatkarīgums

Sekojot tradīcijām, teiksim, ka virsotne *sedz* tai incidentās šķautnes un šķautne sedz tai incidentās virsotnes.

Virsotņu kopu, kas sedz visas grafa šķautnes, sauksim par grafa *virsotņu segumu*.

Elementu skaitu minimālā virsotņu segumā sauksim par grafa *virsotņu seguma skaitli*, apzīmēsim to ar $\alpha_0(\Gamma)$.

Šķautņu kopu, kas sedz visas grafa virsotnes, sauksim par grafa *šķautņu segumu*.

Elementu skaitu minimālā šķautņu segumā sauksim par grafa *šķautņu seguma skaitli*, apzīmēsim to ar $\alpha_1(\Gamma)$.

Virsotņu kopu sauksim par neatkarīgu, ja nekādas divas no tām nav savienotas.

Elementu skaitu maksimālā neatkarīgā virsotņu kopā sauksim par grafa *virsotņu neatkarības skaitli*, $\beta_0(\Gamma)$.

Šķautņu kopu sauksim par neatkarīgu, ja nekādas divas no tām nav incidentas.

Elementu skaitu maksimālā neatkarīgā šķautņu kopā sauksim par grafa *šķautņu neatkarības skaitli*, $\beta_1(\Gamma)$.

Neatkarīgu šķautņu kopu sauksim par *perfektu*, ja tā sedz visas grafa virsotnes.

Perfekta neatkarīga šķautņu kopa var eksistēt tikai tad, ja grafa virsotņu skaits ir pāra skaitlis.

Grafa virsotņu kopu var mēģināt sadalīt apakškopu apvienojumā tā, lai katrā apakškopā virsotnes būtu neatkarīgas. Tradicionāli šādu procedūru sauc par grafu *krāsošanu*.

Par grafa *virsotņu krāsojumu (krāsojumu)* sauksim funkciju no grafa virsotņu kopas uz krāsu kopu, tādu, ka nekādām divām savienotām virsotnēm nav piekārtota viena krāsa.

Mazāko krāsu skaitu, ar kuru dotajam grafam eksistē krāsojums, sauksim par grafa *virsotņu hromatisko skaitli*, to apzīmēsim ar $\chi(\Gamma)$.

Grafu Γ sauksim par *k-krāsojamu*, ja $k \geq \chi(\Gamma)$.

Par grafa *hromatisko polinomu* sauksim funkciju $\pi_\Gamma : V \to \mathbb{N}$, kur $\pi_\Gamma(i)$ ir dažādo grafa krāsojumu skaits ar i krāsām.

Līdzīgi var definēt grafa šķautņu krāsojumu un ar to saistītās īpašības. Par grafa šķautņu krāsojumu sauksim funkciju no grafa šķautņu kopas uz krāsu kopu, tādu, ka nekādām divām incidentām šķautnēm nav piekārtota viena krāsa. Mazāko krāsu skaitu, ar kuru dotajam grafam Γ eksistē šķautņu krāsojums, sauksim par grafa *šķautņu hromatisko skaitli*, apzīmēsim to ar $\chi_1(\Gamma)$.

2.1. piemērs. Augstskolā tiek organizētas vairākas nodarbības tā, lai katrs students var piedalīties vienā nodarbībā. Katram studentam obligāti ir jāpiedalās katrā viņam/viņai paredzētā nodarbībā. Katra nodarbība ilgst fiksētu laika intervālu. Kāds ir minimāli iespējamais laiks, kas ir nepieciešams, lai notiktu visas nodarbības, kas ir nepieciešamas studentiem? Modelēsim šo uzdevumu ar grafu Γ, kura virsotnes ir nodarbības un šķautnes savieno divas nodarbības tad un tikai tad, ja vismaz viens students piedalās abās nodarbībās. Var redzet, ka minimālais laiks ir vienāds ar $\chi(\Gamma)$.

3. Planaritāte

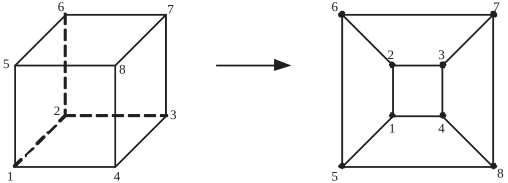
Grafu sauksim par *plakanu*, ja tas ir uzzīmēts plaknē tā, ka šķautnes nekur nekrustojas, izņemot virsotnes.

Grafu sauksim par *planāru*, ja to var uzzīmēt plaknē tā, ka šķautnes krustojas tikai galapunktos.

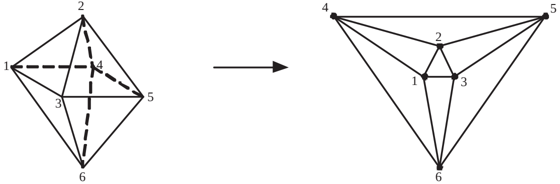
Planāra grafa pārveidošanu par plakanu grafu sauksim par *plakanizāciju*.

Viegli redzēt, ka katrs planāra grafa apakšgrafs ir planārs. Sakarīgs grafs ir planārs tad un tikai tad, ja katrs tā bloks ir planārs.

3.1. piemērs. Pierādīsim, ka grafs K_5 nav planārs. Jebkurš tā inducētais apakšgrafs, kas satur četras virsotnes, ir planārs, tāpēc to var attēlot plaknē kā plakanu grafu. Pēdējā piektā virsotne var atrasties vai nu ārējā skaldnē, vai arī vienā no iekšējām skaldnēm. Šī virsotne ir jāsavieno ar katru no pārējām četrām virsotnēm, un katrā



(a)



(b)

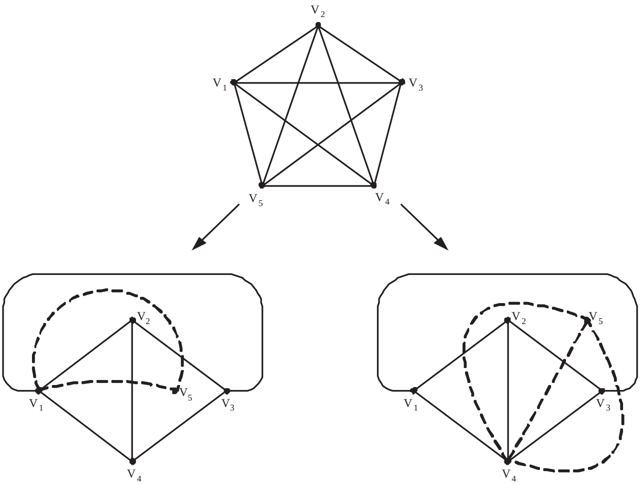
3.61. attēls. Planāru grafu plakanizācijas piemēri no šiem diviem gadījumiem eksistē viena virsotne, kuru nevar savienot ar piekto virsotni tā, lai nekrustotu pilnā grafa K_4 šķautnes.

3.2. piemērs. Pierādīsim, ka grafs $K_{3,3}$ nav planārs. Jebkurš tā apakšgrafs, kas satur visas virsotnes un visas šķautnes, izņemot vienu, ir planārs, tāpēc to var attēlot plaknē kā plakanu grafu. Pēdējā šķautne savieno divas pretējās virsotnes, un tā var atrasties vai nu ārējā skaldnē, vai divās iekšējās skaldnēs. Katrā no šiem diviem gadījumiem pēdējā šķautne krusto vismaz vienu no pārējām šķautnēm.

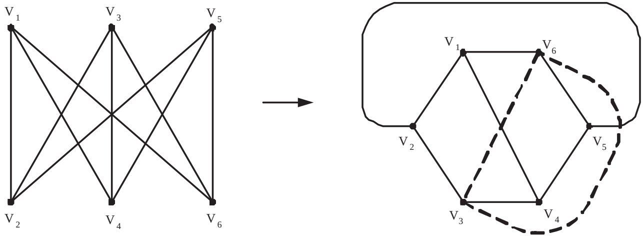
Par grafa *biezumu* sauksim tā minimālu planāru apakšgrafu skaitu, kuru apvienojums ir vienāds ar doto grafu.

Par plakana grafa *skaldni* sauksim plaknes apgabalu, ko norobežo šķautnes un kurš nesatur virsotnes vai šķautnes (ieskaitot ārējo apgabalu), plakana grafa Γ skaldņu skaitu apzīmēsim ar $r(\Gamma)$.

Var redzēt, ka katram plakanam grafam ir tieši viena neierobežota skaldne, kuru sauksim par *ārējo skaldni*, pārējās skaldnes sauksim par



3.62. attēls. Ilustrācija grafa K_5 neplanaritātes pierādījumam

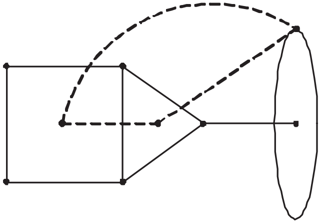


3.63. attēls. Ilustrācija grafa $K_{3,3}$ neplanaritātes pierādījumam

iekšējām.

Var redzēt arī, ka planāru grafu var uzzīmēt plaknē tā, ka izvēlēta virsotne piederēs ārējai skaldnei.

Par plakana grafa *duālo multigrafu* sauksim multigrafu Γ^*, kas tiek konstruēts šādā veidā. Katrā grafa Γ skaldnē izvēlēsimies vienu punktu, visi šie punkti veidos duālā multigrafa Γ^* virsotņu kopu. Katrai grafa Γ šķautnei piekārtosim vienu multigrafa Γ^* šķautni, savienojot tās virsotnes, kurām atbilstošās skaldnes ierobežo dotā šķautne. Ievērosim, ka multigrafā Γ^* tiešām var būt vairākas šķautnes starp divām virsotnēm un var būt arī cilpas.



3.64. attēls. Plakana grafa un tā duālā multigrafa piemērs

Planāru grafu sauksim par *ārēji planāru*, ja to var uzzīmēt plaknē tā, ka visas tā virsotnes pieder ārējai skaldnei.

Planāro grafu teorija tiek pielietota tādās inženierzinātnēs kā autoceļu projektēšana, mikroshēmu projektēšana u.c.

3.1. teorēma. (Eilera formula). Sakarīgam plakanam grafam $\Gamma = (V, E)$ ar $|V|$ virsotnēm un $|E|$ šķautnēm ir spēka formula

$$|V| - |E| + r = 2.$$

PIERĀDĪJUMS Pielietosim matemātisko indukciju ar indukcijas parametru $|E|$.

Bāze: ja $|E| = 1$, tad $|V| = 1$, $r = 1$ un apgalvojums acīmredzami ir patiess.

Pieņemsim, ka formula ir pareiza visiem grafiem ar $|E|$ šķautnēm ($|V|$ virsotnēm un r skaldnēm).

Pievienosim vēl vienu šķautni, iegūsim grafu ar $|E'| = |E| + 1$ šķautnēm, $|V'|$ virsotnēm un r' skaldnēm un pierādīsim, ka formula paliek spēkā:

- ja pievienotā šķautne savieno jau eksistējošas virsotnes, tad

  $$|E'| = |E| + 1, |V'| = |V|, r' = r + 1,$$

  tātad

  $$|V'| - |E'| + r' = 2;$$

- ja pievienotā šķautne savieno jau eksistējošu virsotni ar jaunu virsotni, tad

  $$|E'| = |E| + 1, |V'| = |V| + 1, r' = r$$

  un atkal izpildās vienādība

  $$|V'| - |E'| + r' = 2.$$

■

3.1. piezīme. Ja $\Gamma = (V, E)$ - sakarīgs planārs grafs ar vismaz 3 virsotnēm, tad

$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

PIERĀDĪJUMS Katru skaldni ierobežo vismaz 3 šķautnes, katra šķautne ierobežo ne vairāk kā 2 skaldnes. Apiesim katru skaldni un skaitīsim šķautnes. Pieņemsim, ka šis skaitlis ir vienāds ar N. No vienas puses,

$$N \geq 3r,$$

jo katras skaldnes ieguldījums ir ne mazāks par 3. No otras puses,

$$N \leq 2|E|,$$

jo katras šķautnes ieguldījums ir ne lielāks kā 2. Iegūstam, ka

$$3r \leq 2|E|,$$

tātad

$$2 = |V| - |E| + r \leq |V| - |E| + \frac{2|E|}{3}$$

un

$$|E| \leq 3|V| - 6.$$

Grafus Γ_1 un Γ_2 sauksim par *homeomorfiem*, ja tos var iegūt no kāda grafa Γ', veicot galīgu skaitu šķautņu sadalīšanas operāciju.

3.2. teorēma. (Kuratovska planaritātes kritērijs). Grafs ir planārs tad un tikai tad, ja tas nesatur apakšgrafu homeomorfu ar K_5 vai $K_{3,3}$.

3.2. piezīme. *"Četru krāsu problēma"*. 1970.gados izmantojot datorus, tika pierādīta šāda teorēma - jebkuram planāram grafam eksistē krāsojums ar četrām krāsām - ja grafs Γ ir planārs, tad

$$\chi(\Gamma) \leq 4.$$

Šīs teorēmas pierādījums tika iegūts, apskatot lielu skaitu grafu speciālgadījumu.

4. 15.mājasdarbs

4.1. Obligātie uzdevumi

15.1 Uzzīmēt fundamentālo ciklu sistēmas piemēru šādiem grafiem:

(a) ciklam $\mathcal{C}_n$,
(b) pilnajam grafam $\mathcal{K}_4$,
(c) oktaedra grafam,
(d) Petersena grafam.

15.2 No stieples ir jāizloka dotās figūras tā, lai neviena līnija netiktu dublēta (stieples gabali var krustoties). Kāds ir minimālais stieples gabalu skaits, kas ir nepieciešams, lai iegūtu šādas figūras:

(a) tetraedru,
(b) kubu,
(c) Dāvida zvaigzni,
(d) tabulu ar izmēriem 5×5?

15.3 Siera gabals ar izmēriem $3 \times 3 \times 3$ ir sadalīts mazākās daļās ar izmēriem $1 \times 1 \times 1$. Pele grauž sieru, katru dienu apēdot vienu no mazajiem gabaliem un pārejot uz citu gabalu, kuram ar apēsto gabalu bija kopīga skaldne. Vai pele var grauzt sieru tā, lai pēdējais apēstais gabals būtu centrā?

15.4 Izpētīt Petersena grafu atbildot uz šādiem jautājumiem:

(a) vai Petersena grafs ir Hamiltona grafs,
(b) kādi ir skaitļi α_0, α_1, β_0, β_1 Petersena grafam,
(c) kāds ir hromatiskais skaitlis Petersena grafam,
(d) vai Petersena grafs ir planārs?

4.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

15.5 Atrast Petersena grafa hromatisko polinomu.