***DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE***
*Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte*
*Matemātikas katedra*
*Maģistra studiju programma "Matemātika"*

*Studiju kurss*

# Diskrētā matemātika

## 14.lekcija

*Docētājs: Dr. P. Daugulis*

*2007./2008.studiju gads*

# Saturs


**1. Koki** **3**
- 1.1. Neorientētie koki . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 3
- 1.2. Orientēti, sakārtoti un bināri koki . . . . . . . . . . . . 13

**2. 14.mājasdarbs** **19**
- 2.1. Obligātie uzdevumi . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 19
- 2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi 20

# 1. Koki

## 1.1. Neorientētie koki

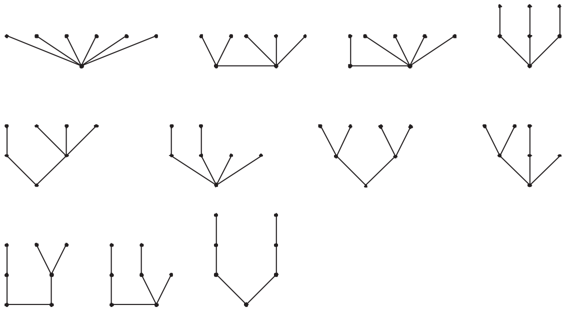
Par *aciklisku grafu* jeb *mežu* sauksim grafu, kurā nav inducētu apakšgrafu, kas ir izomorfi cikliem.

Par *koku* sauksim sakarīgu aciklisku grafu.

Grafa apakšgrafu, kas satur visas virsotnes un ir koks, sauksim par grafa *pārklājošo koku*.

Vienkāršākās koku īpašības:

- katra koka virsotne, kuras pakāpe ir lielāka nekā 1, ir šarnīrs, tādējādi kokiem $\kappa = 1$.
- katra koka šķautne ir tilts, tādējādi kokiem $\lambda = 1$,
- katra koka virsotne ir bloks,
- katrs koks ir pārklājošais koks attiecībā uz sevi.



3.41. attēls. Visi koku izomorfisma tipi ar 7 virsotnēm

**1.1. teorēma.** $\Gamma = (V, E)$ - grafs ar $|V|$ virsotnēm un $|E|$ šķautnēm. Šādi apgalvojumi ir ekvivalenti:

1) $\Gamma$ - koks;
2) $\Gamma$ - sakarīgs grafs un $|E| = |V| - 1$;
3) $\Gamma$ - aciklisks grafs un $|E| = |V| - 1$;
4) grafā $\Gamma$ jebkuras divas dažādas virsotnes savieno tieši viena ķēde;
5) $\Gamma$ - aciklisks grafs, kuram pievienojot vienu jaunu šķautni iegūst grafu ar tieši vienu ciklu.

PIERĀDĪJUMS Pierādīsim teorēmu, izmantojot ciklisko pierādīšanas tehniku. Ir jāpierāda, ka $(1) \to (2) \to (3) \to (4) \to (5) \to (1)$.

$(1) \to (2)$**:** izmantosim matemātisko indukciju ar argumentu $|V|$. Indukcijas bāze: ja $|V| = 1$, tad izteikums ir acīmredzams. Ja $|V| > 1$, tad jebkurai šķautnei $e$ grafs $\Gamma - e$ satur 2 komponentes - kokus (grafā $\Gamma$ nav ciklu) $T_1$ un $T_2$. Pieņemsim, ka šajās komponentēs ir $|V_1|$

vai $|V_2|$ virsotnes un $|E_1|$ vai $|E_2|$ šķautnes, kas saskaņā ar induktīvo pieņēmumu apmierina nosacījumus $|E_i| = |V_i| - 1$. Iegūstam, ka

$$|E| = |E_1| + |E_2| + 1 = (|V_1| - 1) + (|V_2| - 1) + 1 = (|V_1| + |V_2|) - 1 = |V| - 1.$$

(2) → (3)**:** $\Gamma$ ir sakarīgs grafs un $|E| = |V| - 1$. Jāpierāda, ka grafā nav ciklu. Pieņemsim, ka eksistē cikls, kas satur šķautni $e$. Grafs $\Gamma - e$ ir sakarīgs un satur $|V| - 2$ šķautnes. Tāds grafs nevar būt sakarīgs, jo tam šķautņu skaits ir par 2 mazāks nekā virsotņu skaits.

(3) → (4)**:** pieņemsim, ka $\Gamma$ ir aciklisks un $|E| = |V| - 1$. Pieņemsim, ka grafa komponenšu skaits ir $C$ un $i$-tās komponentes virsotņu un šķautņu skaits ir $|V_i|$ un $|E_i|$. Tā kā katra komponente ir koks, tad $|E_i| = |V_i| - 1$ un

$$|E| = \sum_{i=1}^{C} (|V_i| - 1) = |V| - C.$$

Redzam, ka $C = 1$ un grafs ir sakarīgs. Ja eksistētu 2 virsotnes, kuras saista 2 dažādas ķēdes, tad eksistētu cikls.

$(4) \to (5)$**:** ja grafā $\Gamma$ būtu cikls, tad eksistētu divas dažādas ķēdes, kas savienotu divas virsotnes. Ja, pievienojot vienu šķautni, iegūtu divus dažādus ciklus, tad sākotnējā grafā starp attiecīgajām virsotnēm eksistētu divas dažādas ķēdes.

$(5) \to (1)$**:** pierādīsim, ka grafs $\Gamma$ ir sakarīgs. Ja virsotnes $u$ un $v$ piederētu 2 dažādām komponentēm, tad, pievienojot šķautni $(u, v)$, mēs neiegūtu ciklu.

■

**1.1. piezīme.** Ja sakarīgam grafam ar $n$ virsotnēm ir vismaz $n$ šķautnes, tad tas satur ciklu.

**1.2. teorēma.** Kokā ir vismaz 2 virsotnes ar pakāpi 1.

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka kokā $T$ ir $|V|$ virsotnes. Tā kā

$$\sum_{v \in V(T)} d(v) = 2(|V| - 1),$$

tad vismaz 2 saskaitāmie kreisajā pusē ir vienādi ar 1. ■

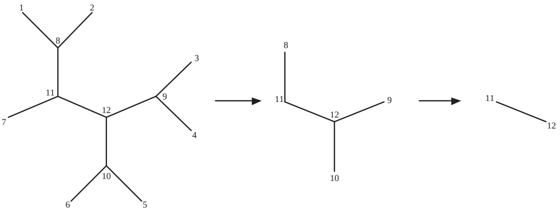
Kokam, tāpat kā vispārīgam grafam, ir definēts centrs, diametrs un rādiuss.

Par koka virsotnes *apakšzaru* sauksim jebkuru koka maksimālu apakšgrafu, kas ir koks un satur doto virsotni kā virsotni ar pakāpi 1 (tādējādi katras virsotnes dažādo apakšzaru skaits ir vienāds ar tās pakāpi).

Par virsotnes *svaru* sauksim maksimālo šķautņu skaitu tās apakšzaros. Par koka *centroīdu* sauksim virsotņu kopu, kuru svars ir minimāls.

**1.3. teorēma.** Koka centrs satur 1 vai 2 virsotnes.

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka grafs satur vismaz 3 virsotnes. Sāksim izdzēst virsotnes ar pakāpi 1 šādā veidā. Sākotnējā grafā $\Gamma$ atzīmēsim visas virsotnes ar pakāpi 1 un izdzēsīsim tās. Iegūsim jaunu grafu $\Gamma_1$, kura centrs sakrīt ar sākotnējā grafa $\Gamma$ centru. Atkārtosim šo operāciju vairākas reizes, kamēr iegūsim triviālo grafu vai $K_2$, kuriem centrs satur vienu vai divas virsotnes. ■




3.42. attēls. Ilustrācija teorēmas par koka centru pierādījumam

**1.2. piezīme.** Piebildīsim, ka, ja grafs nav koks, tad tā centrs var saturēt arī vairāk kā 2 virsotnes. Piemēram, pilnajam grafam vai ciklam centrs sakrīt ar visu virsotņu kopu.

**1.4. teorēma.** Katram sakarīgam grafam eksistē pārklājošais koks.

PIERĀDĪJUMS Ja grafs sākotnēji nav koks, tad pakāpeniski pa vienai izdzēsīsim šķautnes, kas ieiet ciklos, katrā solī izdzēšot jebkuru no šķautnēm, kas piedalās kādā no cikliem.

Tā kā neviena šāda šķautne nevar būt tilts, tad tās izdzēšana nepadara grafu par nesakarīgu.

Katrā šādā šķautnes izdzēšanas operācijā virsotņu skaits nemainās, bet šķautņu skaits samazinās par 1.

Pēc galīga skaita soļu mēs iegūsim sakarīgu grafu, kuram izpildās nosacījums $|E| = |V| - 1$, tādējādi šis jauniegūtais grafs ir sākotnējā grafa apakšgrafs, kas satur visas virsotnes un ir koks. ■

Grafa dažādo pārklājošo koku skaits ir tā invariants, ko sauksim par grafa *kompleksitāti*.

**1.5. teorēma.** Katrs koks ir divdaļīgs grafs.

PIERĀDĪJUMS Patstāvīgs darbs vai diskusija. ■

## 1.2. Orientēti, sakārtoti un bināri koki

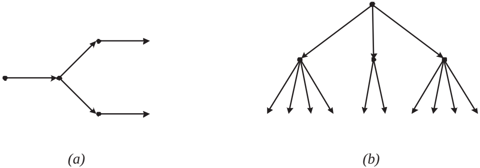
Orientētu grafu sauksim par *orientētu koku (orientētu sakņotu koku)*, ja izpildās šādi nosacījumi:

1) eksistē viena virsotne (*sakne*), kuras pozitīvā puspakāpe ir vienāda ar 0;

2) visu pārējo virsotņu pozitīvā puspakāpe ir vienāda ar 1;

3) eksistē tieši viena virzīta ķēde no saknes uz jebkuru citu virsotni.

**1.1. piemērs.** 3.43.attēlā ir doti orientētu koku piemēri.




3.43. attēls. Orientētu koku piemēri

**1.6. teorēma.** Orientētiem kokiem piemīt šādas īpašības:

1) aizmirstot šķautņu orientāciju orientētajā kokā, iegūst koku;
2) inducētais apakšgrafs, kura virsotņu kopa ir vienāda ar to virsotņu kopu, kuras ir sa-sniedzamas no kādas fiksētas virsotnes $v$, ir orientēts koks ar sakni $v$;
3) ja ir dots (neorientēts) koks, tad, izvēloties jebkuru virsotni par sakni, var viennozīmīgi konstruēt orientētu koku.

PIERĀDĪJUMS Patstāvīgs darbs vai diskusija. ■

Orientēto koku teorijā tradicionāli tiek pielietota botāniskas vai ģenealoģiskas izcelsmes terminoloģija.

Orientēta koka virsotni ar negatīvo puspakāpi 0 sauksim par *lapu*.

Ķēdi no saknes līdz lapai sauksim par *zaru*.

Par orientēta koka *augstumu sauksim maksimāla zara garumu (šķautņu skaitu).*

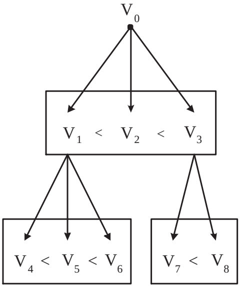
*Par virsotnes līmeni* sauksim šo virsotni un sakni savienojošas ķēdes garumu.

Viena līmeņa virsotņu kopu sauksim par *paaudzi*.

Virsotņu kopu, uz kurām iet ķēdes (šķautnes) no kādas fiksētas virsotnes $v$, sauksim par $v$ pēctečiem (dēliem) un sauksim $v$ par šīs kopas senci (tēvu). Virsotni, kas nav lapa, sauksim par iekšēju virsotni.

**1.2. piemērs.** Orientētos kokus izmanto, lai vizualizētu summas likumu kombinatorikā. Ja $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ un $A_i \cap A_j$ visiem $i \neq j$, tad uzskatīsim $A$ par tēvu un apakškopas $A_i$ par tā dēliem.

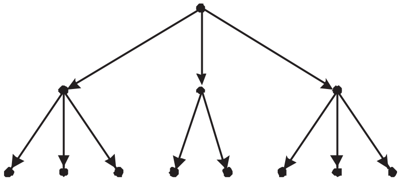
Orientētu koku sauksim par *sakārtotu koku*, ja katras virsotnes dēlu kopā ir definēts pilns sakārtojums.




3.44. attēls. Sakārtota koka piemērs

Var redzēt, ka pilns sakārtojums katras virsotnes dēlu kopā inducē pilnu sakārtojumu viena līmeņa virsotņu kopā.

Par *m-āru koku* sauksim sakārtotu koku, kurā katrai virsotnei ir ne vairāk kā $m$ dēli.

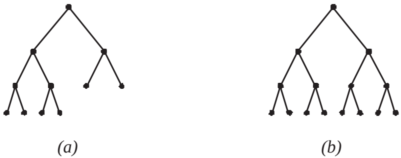


3.45. attēls. 3-āra koka piemērs

*Binārs koks* ir orientēts koks, kurā katrai virsotnei ir ne vairāk kā 2 dēli un katras virsotnes dēlu kopā ir dota funkcija uz divu elementu kopu {*kreisais (jaunākais)*, *labais (vecākais)*} (citiem vārdiem sakot, ir noteikts, kāds dēls ir kreisais (jaunākais) un kāds - labais (vecākais)).

Par binārа koka virsotnes apakškoku sauksim visu tās pēcteču veidoto koku (ieskaitot pašu virsotni). Par binārа koka virsotnes kreiso (labo) apakškoku sauksim tās kreisā (labā) dēla apakškoku.

Par *pilnu bināru koku* sauksim bināru koku, kura katrai virsotnei ir nulle vai divi dēli.




3.46. attēls. Bināru koku piemēri

Parasti binārus kokus attēlo ar neorientētām šķautnēm un pēc noklusēšanas uzskata, ka šķautnes ir orientētas no augšas uz apakšu.

# 2. 14.mājasdarbs

## 2.1. Obligātie uzdevumi

14.1 Uzzīmēt visas koku izomorfisma klases ar 8 virsotnēm.

14.2 Pierādīt, ka ja $\Gamma$ ir koks ar vismaz 5 virsotnēm, tad $\bar{\Gamma}$ nav koks.

14.3 Atrast kompleksitāti šādiem grafiem:

(a) ciklam $\mathcal{C}_n$,
(b) kuba grafam,
(c) pilnajam grafam $\mathcal{K}_n$.

14.4 Volejbola tīklam ir taisnstūrveida rūtiņas, tā izmēri ir $40 \times 500$. Kāds ir maksimālais virvīšu skaits, kuras var pārgriezt tā, lai tīkls nesadalītos divās daļās?

14.5 Uzzīmēt visus dažādos bināros kokus ar ne vairā kā 5 virsotnēm.

## 2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

14.6 Atrodiet visus automorfismus katrai no koku izomorfisma klasēm ar 8 virsotnēm.