DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Maģistra studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Diskrētā matemātika

13.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2007./2008.studiju gads

Saturs

1. Grafu sakarīgums

1.1. Pamatdefinīcijas

Atgādināsim, ka grafs ir sakarīgs, ja tā jebkuras divas virsotnes var savienot ar ķēdi.

Grafa sakarīgās komponentes ir maksimālie sakarīgie apakšgrafi.

Apzīmēsim ar

- $\kappa(\Gamma)$ - mazāko virsotņu skaitu, kuru iznīcināšana padara grafu par nesakarīgu vai triviālu (triviāls grafs - grafs, kas satur vienu virsotni), to sauc par Γ *virsotņu sakarīguma skaitli*,
- ar $\lambda(\Gamma)$ - mazāko šķautņu skaitu, kuru iznīcināšana padara grafu par nesakarīgu, to sauc par Γ *šķautņu sakarīguma skaitli*.

Grafu Γ sauksim par k-sakarīgu grafu, ja $\kappa(\Gamma) \geq k$.

Grafa k-sakarīgā komponente - maksimāls k-sakarīgs apakšgrafs.

1.1. piemērs. Visi grafi ir 0-sakarīgi. Nesakarīgi grafi ir tikai 0-sakarīgi.

Līdzīgā veidā definē k-šķautņsakarīgus grafus. Grafu Γ sauksim par k-šķautņsakarīgu grafu, ja $\lambda(\Gamma) \geq k$.

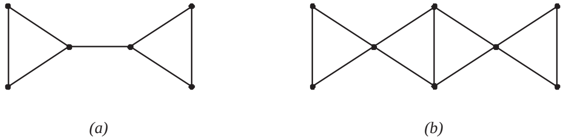
1.2. 1-sakarīgums

Virsotni sauksim par *šarnīru*, ja tās izdzēšana palielina grafa komponenšu skaitu.

Ja grafam ir šarnīrs, tas ir tikai 1-sakarīgs un 0-sakarīgs.

Grafa inducētu apakšgrafu sauksim par *bloku*, ja tas ir maksimāls 2-sakarīgs apakšgrafs (jebkurš apakšgrafs, kas to satur, satur šarnīrus).

1.2. piemērs. 3.34.(a) attēlā ir parādīts grafs ar diviem šarnīriem un vienu tiltu. 3.34.(b) attēlā ir parādīts grafs ar trīs blokiem.



3.34. attēls. (a) Grafs ar diviem šarnīriem un vienu tiltu, (b) grafs ar diviem šarnīriem, trīs blokiem un bez tiltiem

Grafa Γ *bloku grafs* - grafs, kur virsotnes ir grafa Γ bloki, divas virsotnes ir savienotas ar šķautni tad un tikai tad, ja attiecīgie bloki ir savienoti ar šarnīru. Grafa bloku grafs ir tā invariants.

Šķautni sauksim par *tiltu*, ja tās izdzēšana palielina grafa komponenšu skaitu.

Šķautņu kopas apakškopu sauksim par *griezumu*, ja tās izdzēšana palielina grafa komponenšu skaitu.

1.1. teorēma. Jebkurā sakarīgā grafā ar vismaz divām virsotnēm ir vismaz divas virsotnes, kas nav šarnīri.

PIERĀDĪJUMS Jebkuras diametrālas ķēdes gali nevar būt šarnīri. ■

1.2. teorēma. (Teorēma par šarnīriem) $\Gamma = (V, E)$ - sakarīgs grafs, $v \in \Gamma$. Nākamie apgalvojumi ir ekvivalenti:

1) v ir šarnīrs;
2) eksistē divas virsotnes u un w, atšķirīgas no v, tādas, ka v pieder jebkurai (u, w)-ķēdei;
3) eksistē kopas $V \backslash \{v\}$ sadalījums divās apakškopās U un W, tāds, ka jebkurām virsotnēm $u \in U, w \in W$ virsotne v pieder jebkurai (u, w)-ķēdei.

PIERĀDĪJUMS Pierādījums tiek veikts ar cikla palīdzību. Patstāvīgs darbs vai diskusija. ■

1.3. teorēma. (Teorēma par tiltiem) $\Gamma = (V, E)$ - sakarīgs grafs, $e \in E$. Nākamie apgalvojumi ir ekvivalenti:

1) e ir tilts;
2) e nepieder nekādam ciklam grafā Γ;
3) eksistē divas virsotnes u un w, tādas, ka e pieder jebkurai (u, w)-ķēdei;
4) eksistē kopas V sadalījums divās apakškopās U un W, tāds, ka jebkurām virsotnēm $u \in U, w \in W$ šķautne e pieder jebkurai (u, w)-ķēdei.

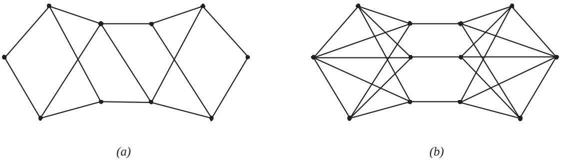
PIERĀDĪJUMS Pierādījums tiek veikts ar cikla palīdzību. Patstāvīgs darbs vai diskusija. ■

1.4. teorēma. (Teorēma par blokiem) $\Gamma = (V, E)$ - sakarīgs grafs ar vismaz 3 virsotnēm. Nākamie apgalvojumi ir ekvivalenti:

1) Γ ir bloks;
2) caur jebkurām divām virsotnēm grafā Γ var novilkt ciklu;
3) caur jebkuru virsotni un jebkuru šķautni grafā Γ var novilkt ciklu;

PIERĀDĪJUMS Pierādījums tiek veikts ar cikla palīdzību. Patstāvīgs darbs vai diskusija. ■

1.3. Augstāku kārtu sakarīgums

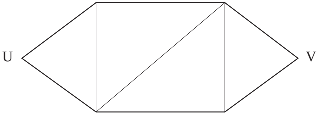


3.35. attēls. 2-sakarīga un 3-sakarīga grafa piemēri

1.5. teorēma. $\kappa(\Gamma) \leq \lambda(\Gamma) \leq \delta(\Gamma)$

PIERĀDĪJUMS Patstāvīgs darbs vai diskusija. ■

Pieņemsim, ka Γ - sakarīgs grafs, u un v - divas nesavienotas virsotnes. Divas (u, v)-ķēdes sauksim par *virsotņu šķirtām*, ja tām nav kopīgu virsotņu, izņemot u un v.



3.36. attēls. Piemērs grafam, kurā virsotnes u un v savieno divas virsotņu šķirtas ķēdes

Teiksim, ka virsotņu kopa $S \subset V$ *atdala* virsotnes u un v, ja u un v pieder dažādām grafa $\Gamma - S$ komponentēm, šajā gadījumā kopu S sauksim par *atdalošo kopu* attiecībā uz dotajām virsotnēm u un v jeb par (u, v)-atdalošo kopu.

1.6. teorēma. (Whitney 2-sakarīguma kritērijs) Dots, ka Γ ir sakarīgs grafs ar vismaz 3 virsotnēm. Γ ir 2-sakarīgs tad un tikai tad, ja jebkurām divām virsotnēm u un v eksistē vismaz divas virsotņu šķirtas (u, v)-ķēdes.

PIERĀDĪJUMS

Ja katram virsotņu pārim $\{u, v\}$ eksistē vismaz divas virsotņu šķirtas (u, v)-ķēdes, tad Γ ir 2-sakarīgs.

Ja Γ nav 2-sakarīgs, tad tam eksistē šarnīrs. Seko, ka starp divām virsotnēm dažādās pusēs no šarnīra nevar eksistē divas virsotņu šķirtas ķēdes.

Ja Γ ir 2-sakarīgs, tad katram virsotņu pārim $\{u, v\}$ eksistē vismaz divas virsotņu šķirtas (u, v)-ķēdes.

Pierādīsim šo faktu ar matemātisko indukciju pēc attāluma starp u un v - $dist(u, v)$.

<u>Indukcijas bāze.</u> Ja $dist(u, c) = 1$, tad $u \sim v$. Šķautne (u, v) nevar būt tilts, jo Γ ir 2-sakarīgs. Seko, ka eksistē vēl viena (u, v)-ķēde, kas ir virsotņu šķirta attiecībā uz esošo ķēdi $(u, (u, v), v)$.

Indukcijas solis. Pieņemsim, ka apgalvojums ir pierādīts visos gadījumos, kad $dist(u, v) < m$ un pierādīsim, ka tad tas ir spēkā, ja $dist(u, v) = m$.

Fiksēsim jebkādu (u, v)-ķēdi P. Definēsim p kā iepriekšpēdējo virsotni šajā ķēdē, eksistē šķautne (p, v).

Divi svarīgi fakti:

- tā kā $dist(u, p) < m$, tad saskaņā ar indukcijas hipotēzi eksistē 2 virsotu šķirtas (u, v)-ķēdes P_1 un P_2,
- tā kā Γ ir 2-sakarīgs, tad eksistē (u, v)-ķēde Q, kas nesatur p, jo pretējā gadījumā p būtu šarnīrs.

Ir iespējami 2 gadījumi:

A. ķēdei Q nav kopīgu starpvirsotņu ar P_1 un P_2;

B. ķēdei Q ir kopīga starpvirsotne ar P_1 vai P_2.

Gadījums A. Jebkura no ķēdēm $P_1 + (p, v)$ vai $P_2 + (p, v)$ kopā ar Q veido virsotņu šķirtu ķēžu pāri;

Gadījums B. Pieņemsim, ka pirmā virsotne ķēdē Q, kas krusto kādu no ķēdēm P_1 vai P_2, ir q un pieder P_1. Apzīmēsim ar R ķēdi, kas iet no v pa Q līdz q, un tad iet pa P_2 līdz u. Redzam, ka R un P_2 ir virsotņu šķirtas. ■

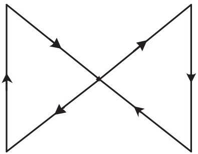
1.1. piezīme. Pieņemsim, ka grafam Γ ir vismaz 3 virsotnes. Γ ir 2-sakarīgs tad un tikai tad, ja jebkuras divas virsotnes pieder kādam ciklam.

1.7. teorēma. (Mengera teorēma). Pieņemsim, ka u un v ir nesavienotas virsotnes grafā. Minimālās (u, v)-atdalošas kopas elementu skaits ir vienāds ar maksimālu virsotņu šķirto (u, v)-ķēžu skaitu.

PIERĀDĪJUMS Patstāvīgs darbs.

Analizējot Mengera teorēmu, iegūsim grafa augstāku kārtu sakarīguma īpašību (Whitney kritērija vispārinājumu).

1.2. piezīme. Ja grafs ir k-sakarīgs, tad jebkurām divām virsotnēm eksistē k virsotņu šķirtas ķēdes.



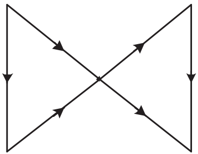
3.37. attēls. Stingri sakarīga grafa piemērs

1.4. Sakarīgums orientētos grafos

$\Gamma = (V, E)$ - orientēts grafs. Virsotnes v un w sauksim par *stingri sakarīgām*, ja eksistē virzītas ķēdes, kas saista v un w (abos virzienos), v un w sauksim par *vienpusīgi sakarīgām*, ja eksistē virzīta ķēde, kas saista v un w vismaz vienā virzienā.

Orientētu grafu sauksim par stingri sakarīgu, ja jebkuras divas virsotnes ir stingri sakarīgas.

Orientētu grafu sauksim par vienpusīgi sakarīgu, ja jebkuras divas vir-



3.38. attēls. Vienpusīgi sakarīga grafa piemērs

sotnes ir vienpusīgi sakarīgas.

Orientētu grafu sauksim par *vāji sakarīgu (sakarīgu)*, ja tam atbilstošais neorientētais grafs ir sakarīgs.

Par orientēta grafa *stingri sakarīgu komponenti* sauksim maksimālu stingri sakarīgu apakšgrafu.

Par orientēta grafa *vājās sakarības komponentēm* sauksim sakarības komponentes grafā, ko iegūst no dotā orientētā grafa, aizmirstot par šķautņu orientāciju.

Par orientēta grafa $\Gamma = (V, E)$ *kondensāciju (Herca grafu)* sauksim grafu

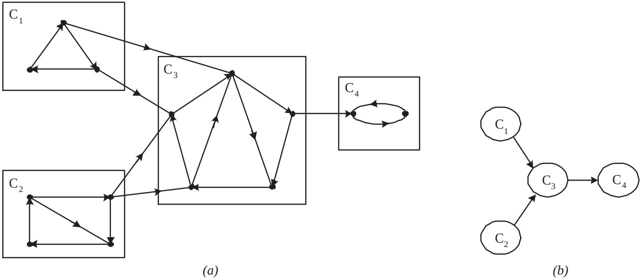
$$H(\Gamma) = (H(V), H(E)),$$

ko iegūst, savelkot uz vienu virsotni katru stingri sakarīgo komponenti. Citiem vārdiem sakot, $H(V)$ ir visu stingri sakarīgo komponenšu kopa, eksistē šķautne $h_1 \to h_2$, tad un tikai tad, ja eksistē šķautne no vismaz vienas virsotnes komponentē, kas atbilst h_1, uz vismaz vienu virsotni komponentē, kas atbilst h_2. Orientēta grafa kondensācija ir tā invariants.

Orientētu grafu sauksim par *aciklisku orientētu grafu (AOG)*, ja tajā nav virzītu ciklu.

Var redzēt, ka jebkura orientēta grafa kondensācijas grafs ir AOG.

Orientēta grafa virsotni sauksim par *avotu*, ja tās pozitīvā puspakāpe ir 0. Orientēta grafa virsotni sauksim par *noteku*, ja tās negatīvā puspakāpe ir 0.



3.40. attēls. Orientēta grafa (a) un tā kondensācijas (b) piemērs

Teiksim, ka orientēta grafa virsotnes ir *lineārajā sakārtojumā*

$$(v_1, ..., v_n),$$

ja izpildās šāds nosacījums: ja eksistē šķautne $v_i \to v_j$, tad $i < j$.

AOG ir svarīga orientētu grafu klase, kuras pārstāvji bieži tiek izmantoti modelēšanā.

1.3. piemērs. Katrai daļēji sakārtotai kopai var viennozīmīgi piekārtot AOG, kas sakrīt ar tās Hasses grafu.

2. 13.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

13.1 Kāds var būt maksimāli iespējamais šarnīru skaits grafam ar n virsotnēm?

13.2 Konstruēt 3-regulāru grafu, kuram virsotņu sakarīgums ir vienāds ar 1.

13.3 Pierādīt, ka grafa šarnīrs nevar būt šarnīrs tā papildgrafam.

13.4 Atrast virsotņu un šķautņu sakarīguma skaitļus šādiem grafiem:

(a) ķēdei $\mathcal{P}_n$,
(b) ciklam $\mathcal{C}_n$,
(c) pilnajam grafam $\mathcal{K}_n$,
(d) kuba grafam,
(e) Petersena grafam.

13.5 Atrodiet visu vāji sakarīgu AOG izomorfisma klašu pārstāvjus ar ne vairāk kā 7 virsotnēm.

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

13.6 Pierādīt, ka katru neorientētu sakarīgu grafu, kuram katras virsotnes pakāpe ir pāra skaitlis, var orientēt tā, lai tam būtu viena stipri sakarīga komponente.