DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Maģistra studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Diskrētā matemātika

12.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2007./2008.studiju gads

Saturs

1. Ievads grafu teorijā

1.1. Operācijas ar grafiem

Grafu teorijā bieži rodas nepieciešamība veidot jaunus grafus no jau uzdotiem. Apskatīsim dažas operācijas ar grafiem.

Papildināšana. Šī operācija jau tika definēta.

Apvienošana. Ja doti 2 grafi $\Gamma = (V, E)$ un $\Gamma' = (V', E')$, tad par to apvienojumu sauksim grafu

$$\Gamma \cup \Gamma' = (V \cup V', E \cup E').$$

Piemēram, var redzēt, ka katrs grafs ir tā komponenšu apvienojums.

Savienošana. Ja doti 2 grafi $\Gamma = (V, E)$ un $\Gamma' = (V', E')$, tad par to savienojumu sauksim grafu

$$\Gamma + \Gamma' = (V \cup V', E \cup E' \cup E^*),$$

kur $E^* = (V \times V') \cup (V' \times V)$.

Virsotnes (virsotņu kopas) izdzēšana. Grafā tiek izdzēsta virsotne (virsotņu kopa) un visas tai incidentās šķautnes, virsotņu kopas U izdzēšanu grafā $\Gamma = (V, E)$ apzīmēsim ar $\Gamma - U$, tādējādi

$$\Gamma - U = (V \backslash U, E \backslash \{(u, v) \cup (v, u) | u \in U, v \in V\}).$$

Šķautnes (šķautņu kopas) izdzēšana. Grafā tiek izdzēsta šķautne vai šķautņu kopa, šķautņu kopas S izdzēšanu grafā $\Gamma = (V, E)$ apzīmēsim ar $\Gamma - S$, tādējādi

$$\Gamma - S = (V, E \backslash S).$$

Šķautnes savilkšana. Virsotnes, kas incidentas ar doto šķautni, tiek apvienotas vienā virsotnē, šķautnes e savilkšanu grafā Γ apzīmēsim ar Γ / e.

Virsotnes pievienošana. Tiek pievienota viena jauna virsotne un šķautnes, kas to savieno ar visām iepriekš eksistējošām virsotnēm.

Šķautnes pievienošana. Tiek pievienota šķautne, kas savieno divas izvēlētas nesavienotas virsotnes, šķautnes e pievienošanu grafā Γ apzīmēsim ar $\Gamma + e$.

Inducēta apakšgrafa savilkšana. Dotā inducētā apakšgrafa vietā pievienojam jaunu virsotni, kas ir savienota ar tām virsotnēm (ārpus savilktā apakšgrafa virsotņu kopas), ar kurām ir bijusi savienota vismaz viena no savilktā apakšgrafa virsotnēm. Speciālgadījums - divu virsotņu identifikācija.

Teiksim, ka grafu Γ var savilkt uz grafu Γ', ja Γ' var iegūt no Γ, veicot vairākas šķautņu savilkšanas operācijas.

Par grafa Γ *minoru* sauksim jebkuru grafu, ko var iegūt no Γ, vairākkārt pielietojot šķautņu izdzēšanas un savilkšanas operācijas, kā arī izolētu virsotņu izdzēšanas operācijas.

1.2. Datu struktūras grafu uzdošanai

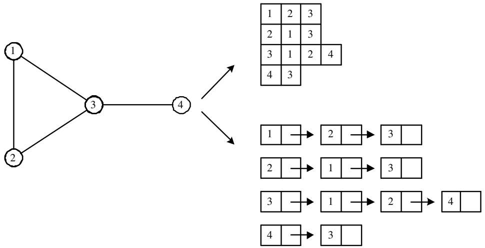
Grafus, tāpat kā jebkurus citus matemātiskus objektus, ir jāprot pilnvērtīgi un ekonomiski iekodēt ar piemērotu diskrētās matemātikas objektu palīdzību.

Ir vismaz divi būtiski dažādi datu struktūru veidi, kurus izmanto, lai uzdotu grafus.

1.2.1. Virsotņu blakusattiecības saraksts

Katrai virsotnei piekārtosim visas virsotnes, kas ar to ir savienotas.

Praktiski blakusattiecības sarakstu realizē divdimensionāla masīva vai saistītā saraksta veidā.

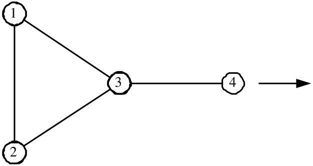


3.24. attēls. Grafa uzdošana ar blakusattiecības sarakstu

Blakusattiecības saraksts praktiski (programmēšanā) tiek izmantots visbiežāk.

1.2.2. Virsotņu blakusattiecības matrica

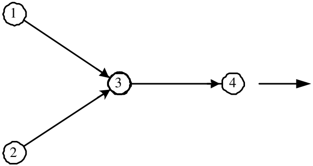
Grafu uzdod ar $|V| \times |V|$ bināru matricu, kurā rindas un kolonnas tiek indeksētas ar grafa virsotnēm noteiktā kārtībā, matricas rūtiņā, kas atbilst rindai u un kolonnai v tiek ierakstīts 1, ja virsotnes u un v ir savienotas, un 0, ja tās nav savienotas.



$$\begin{array}{c|cccc|} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

3.25. attēls. Neorientēta grafa uzdošana ar blakusattiecības matricu

Orientēta grafa gadījumā rūtiņā tiek ierakstīts 1 tad un tikai tad, ja eksistē šķautne (v, u) (no v uz u).



	1	2	3	4
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	1	1	0	0
4	0	0	1	0

3.26. attēls. Orientēta grafa uzdošana ar blakusattiecības matricu

Orientēta nosvērta grafa gadījumā rūtiņā tiek ierakstīts skaitlis w tad un tikai tad, ja eksistē šķautne (v, u) ar svaru w, pārējās rūtiņās tiek ierakstīta 0 tāpat kā iepriekšējos gadījumos;

Matricas biežāk izmanto grafu teorētiskos pētījumos.

1.3. Grafu pielietojumi modelēšanā

1.3.1. Modeļu teorija

Jebkuras dabas un izcelsmes sistēmas vai procesa uzdošanu matemātisku objektu un sakarību veidā sauksim par šīs parādības *modeli*.

Modelis ir realitātes vienkāršota un jēdzieniski noslēgta abstrakta uzdošana.

Modeļi tiek veidoti ar mērķi labāk saprast doto sistēmu. Pietiekoši sarežģītas sistēmas vispār nav iespējams analizēt bez vienkāršotu modeļu palīdzības.

Sistēmas pētīšanu, pārnesot tās īpašības uz modeli, sauksim par sistēmas *modelēšanu*.

Modelēšanas pamatprincipi ir šādi:

1) modeļa izvēle būtiski ietekmē uzdevuma atrisinājuma procesu un pašu atrisinājumu;
2) modeļu detalizācijas pakāpes var būt dažādas;
3) sīkāka detalizācijas pakāpe nozīmē lielāku modeļu sarežģītību;
4) ir vēlams izmantot vienlaicīgi vairākus modeļus.

Ir daudz piemēru, kur attiecību (grafu) modeļu saskatīšana un ieviešana padara uzdevuma analīzi un risinājumu uzskatāmu un efektīvu. Parasti tas ir iespējams, ja pētāmajai sistēmai ir diskrētas īpašības.

Galvenie grafu modeļu tipi ir šādi:

- virsotnes un šķautnes ir fiziski objekti, šķautņu objekti fiziski saista virsotņu objektus;
- virsotnes ir fiziski vai nefiziski objekti, šķautnes saista virsotnes atkarībā no to strukturālajām vai funkcionālajām īpašībām;

- virsotnes ir fiziski vai nefiziski objekti, iespējams, dažādos laika vai attīstības stāvokļos, šķautnes norāda virsotņu temporālo, evolucionāro vai cēloņsakarisko atkarību.

Lai izveidotu efektīvu dotās sistēmas/procesa grafu modeli, ir

1) jānosaka svarīgākās dotās modelējamās sistēmas apakšsistēmas/stāvokļi, kas tiks definētas kā grafa virsotnes;
2) jānosaka svarīgākās modelējamās attiecības starp virsotņu objektiem.

Pēc modeļa izveidošanas tiek risināti uzdevumi, kas attiecas uz modelējamo sistēmu.

1.3.2. Grafu modeļu piemēri

Zemāk ir pārskaitīti daži konkrēti grafu modeļi:

1. *matemātiskas teorijas apgalvojumu grafs* (virsotnes - apgalvojumi, šķautnes - loģiskās secināšanas);
2. *funkcionālais grafs* (virsotnes - kopas elementi, šķautnes - funkcijas darbība);
3. *lielumu-sakarību grafs* (virsotnes - skaitliski lielumu un sakarības starp tiem, šķautnes - lieluma piedalīšanās sakarībā);
4. *metrikas grafs* (virsotnes - jebkura veida fiziski vai nefiziski objekti vai to kopas, šķautnes - objektu ģeometriskā, strukturālā, funkcionālā vai evolucionārā tuvība, pielieto lielu kopu analīzē);
5. *lēmumu koks* (virsotnes - krīzes stāvokļi, šķautnes - lēmumi, izmanto lēmumu pieņemšanā ekonomikā, vadīšanā, inženierkonstrukciju diagnosticēšanā u.c.);
6. *sistēmas grafs* (virsotnes - sistēmas komponentes, šķautnes -

komponenšu mijiedarbība, pielieto sistēmu projektēšanā un analīzē);

7. *atgriezenisko saišu grafs* (virsotnes - kāda procesa parametri, orientētas šķautnes ar svaru (+) vai (−) - virsotnēm atbilstošo parametru izmaiņu atkarība, pielieto sistēmas vai procesa sastāvdaļu izmaiņu atkarības, atgriezenisko saišu un to ciklu pētīšanai);
8. *spēles grafs* (virsotnes - spēles stāvokļi, šķautnes - spēles noteikumu atļautas pārejas (gājieni) starp stāvokļiem, pielieto spēļu uzvarošo stratēģiju izstrādāšanā);
9. *datortīkls* (vispārīgā gadījumā - komunikāciju tīkls) (virsotnes - datori vai komunikāciju mezgli, šķautnes - sakaru līnijas, pielieto datortīklu projektēšanā un analīzē);
10. *sociālais grafs* (virsotnes - cilvēki vai to kopas, šķautnes - pazīšanās, ekonomiskas vai cita veida attiecības, pielieto sabiedrības analīzē un attīstības plānošanā);
11. *organizācijas grafs* (virsotnes - cilvēki vai to kopas, šķautnes - attiecības, kas raksturo organizācijas struktūru);

12. *projekta grafs* (virsotnes - projekta darbi vai stāvokļi, šķautnes - attiecības starp darbiem vai darbi, kas saista stāvokļus);
13. *darbinieku-pienākumu grafs* (virsotnes - darbinieki un pienākumi vai darbi, šķautnes - attiecības, kas darbiniekiem piekārto to iespējamos pienākumus);
14. *ģenealoģiskais koks* (virsotnes - cilvēki, šķautnes - "vecāku-bērnu" attiecības);
15. *ekonomisko aģentu grafs* (virsotnes - ekonomiskie aģenti (cilvēki, privātas firmas utt.), šķautnes - ekonomiskās attiecības);
16. *makroekonomiskais finanšu plūsmas grafs* (virsotnes - tautsaimniecības nozares, šķautnes - finanšu plūsmas starp nozarēm, pielieto ekonomiskos pētījumos un plānošanā);
17. *ceļu grafs* (virsotnes - pilsētas, šķautnes - ceļi);
18. *ielu grafs* (virsotnes - krustojumi, šķautnes - ielas);
19. *molekulas grafs* (virsotnes - atomi, šķautnes - ķīmiskās saites);
20. *elektriskās ķēdes grafs* (virsotnes - elektromagnētiski aktīvi elementi, šķautnes - vadi vai kontakti);

21. *"barošanās ķēde"* (virsotnes - dzīvnieku sugas, šķautnes - "barošanās" attiecība, pielieto biosistēmu analīzē);
22. *evolucionārais (filoģenētiskais) koks* (virsotnes - sugas vai populācijas, šķautnes - evolucionārās izcelsmes attiecība);
23. *ķīmiskās vielas priekšteču grafs* (virsotnes - ķīmiskas vielas, kuras tiek iegūtas kādas vielas ražošanas procesā (priekšteči), šķautnes - priekšteču izmaiņas ražošanas procesā);
24. *ķīmisko vielu reaģētspējas grafs* (virsotnes - ķīmiskas vielas, šķautnes - reaģēšanas iespējas);
25. *asinsvadu grafs* (virsotnes - asinsvadu sazarojumi, šķautnes - asinsvadi);
26. *kulinārijas izstrādājuma gatavošanas grafs* (virsotnes - kulinārijas izstrādājuma stāvokļi (sākot no pamatkomponentēm), šķautnes - pārejas starp stāvokļiem gatavošanas procesā, pielieto ēdienu gatavošanā).

2. Grafu izomorfisms un invarianti

2.1. Izomorfizms

Dabiski ir uzdot jautājumu - kad divi grafi ir neatšķirami kā matemātiski objekti jeb, citiem vārdiem sakot, kad divi grafi ir "vienādi", ja mēs ignorējam to virsotņu dabu un attēlošanas veidu.

Tā kā grafs ir struktūra, kas satur informāciju par virsotņu savienojamību vai nesavienojamību, piemēram, matricas veidā, tad dabiski ir pieprasīt, ka divi grafi ir matemātiski neatšķirami, ja to virsotņu kopas var sakārtot tā, ka grafu matricas ir vienādas.

Divus neorientētus vai orientētus grafus

$$\Gamma = (V, E),$$
$$\Gamma' = (V', E')$$

sauksim par *izomorfiem* ($\Gamma \simeq \Gamma'$), ja eksistē bijektīva funkcija

$$f : V \to V'$$

tāda, ka

$$(v_1, v_2) \in E$$

tad un tikai tad, ja

$$(f(v_1), f(v_2)) \in E'.$$

Var redzēt, ka Γ un Γ' blakusattiecības matricas ir vienādas, ja to rindu (un kolonnu) indeksi ir sakārtoti kārtībā

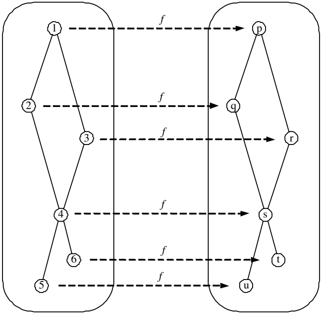
$$(v_1, v_2, ..., v_n) \text{ un}$$
$$(f(v_1), f(v_2), ..., f(v_n)).$$

Šādā gadījumā funkciju f sauksim par *grafu izomorfismu*.

Bieži vien izomorfus grafus identificē un neatšķir vienu no otra.

Pētot grafus ar precizitāti līdz izomorfismam, bieži vien nodzēš grafu virsotņu indeksus un strādā ar grafiem, kuriem virsotnes ir neiezīmētas.

2.1. piemērs. 3.27.attēlā ir parādīts izomorfisma piemērs



3.27. attēls. Grafu izomorfisma piemērs

Par grafa Γ *izomorfisma tipu (klasi)* sauksim visu ar Γ izomorfo grafu kopu.

Bijektīvu funkciju $f : V \to V$ sauksim par *grafa V automorfismu* (Γ-*automorfismu*), ja tā ir grafa Γ izomorfisms uz sevi, citiem vārdiem sakot, $(v_1, v_2) \in E$ tad un tikai tad, ja $(f(v_1), f(v_2)) \in E$.

Grafa Γ automorfismu kopu apzīmēsim ar $Aut(\Gamma)$.

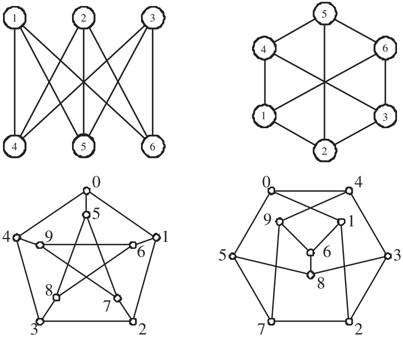
2.1. teorēma. Visi grafa automorfismi veido grupu attiecībā uz funkciju kompozīcijas operāciju.

PIERĀDĪJUMS Var redzēt, ka virsotņu kopas vienības funkcija ir jebkura grafa automorfisms. Jebkura grafa automorfisma inversā funkcija ir grafa automorfisms un divu grafa automorfismu kompozīcija ir grafa automorfisms. ■

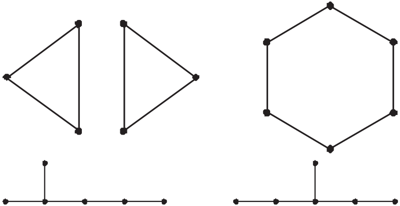
2.2. piemērs. 3.28.attēlā ir parādīti izomorfu grafu pāri.

3.29.attēlā ir parādīti neizomorfu grafu pāri, kuriem pakāpju vektori ir vienādi.

2.3. piemērs. Apskatīsim mazu grafu automorfismu kopas. 3.30.attēlā ir parādīti visi cikla C_4 automorfismi. Var redzēt, ka $|Aut(C_4)| = 8$ un par minimālu veidotājsistēmu var izvēlēties divu funkciju kopu, kas atbilst virsotņu permutācijām $a = (24)$ un $b = (12)(34)$.



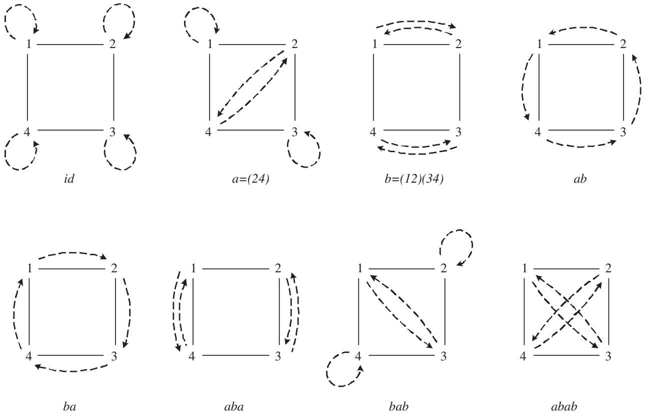
3.28. attēls. Izomorfu grafu pāru piemēri



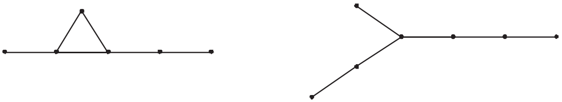
3.29. attēls. Neizomorfu grafu pāru piemēri

2.4. piemērs. 3.31.attēlā attēloto grafu automorfismu grupas satur tikai vienu elementu - vienības funkciju.

Grafa automorfismu grupu var uzskatīt par grafa simetrijas mēru - jo lielāka ir attiecība $\frac{|Aut(\Gamma)|}{|V(\Gamma)|}$, jo grafs ir simetriskāks.



3.30. attēls. Visi cikla C_4 automorfismi



(a) (b)

3.31. attēls. Grafi ar triviālu automorfismu grupu

2.2. Invarianti

Vienkāršs veids, kā noteikt, vai divi grafi ir izomorfi, ir fiksēt viena grafa matricu un apskatīt visas otrā grafa matricas, kas atbilst dažādām virsotņu kopas permutācijām.

Acīmredzami, šis algoritms nav efektīvs, jo virsotņu permutāciju skaits grafam ar n virsotnēm ir $n!$.

Pētot, vai divi grafi ir izomorfi, ir lietderīgi izmantot to (skaitliskās) īpašības, kuras sakrīt izomorfiem grafiem un var nesakrist neizomorfiem grafiem.

Apzīmēsim visu grafu kopu ar G un fiksēsim kādu kopu S.

Funkciju $\phi : G \to S$ sauksim par *grafu invariantu*, ja

$$\Gamma \simeq \Gamma' \Longrightarrow \phi(\Gamma) = \phi(\Gamma').$$

Ekvivalenta definīcija:

$$\phi(\Gamma) \neq \phi(\Gamma') \Longrightarrow \Gamma \not\simeq \Gamma'.$$

No invariantiem var veidot sistēmas (piemēram, virknes), tādējādi konstruējot jutīgākus invariantus.

Invariantu sistēmu $\{\phi_i\}_{i\in I}$ sauksim par *pilnu*, ja no tā, ka

$$\phi_i(\Gamma) = \phi_i(\Gamma') \text{ visiem } i \in I$$

seko, ka $\Gamma \simeq \Gamma'$.

Invariantus izmanto, lai atšķirtu neizomorfus grafus: ja uz diviem grafiem invariants pieņem dažādas vērtības, tad uzreiz var secināt, ka grafi nav izomorfi.

Biežāk izmantotos grafu invariantus pēc to izcelsmes var iedalīt šādās grupās:

- *apakšgrafu* invarianti, kas ir saistīti ar grafa apakšgrafiem, piemēram, virsotņu skaits, šķautņu skaits, maksimālā virsotnes pakāpe, minimālā virsotnes pakāpe, pakāpju vektors, komponenšu skaits, fiksēta garuma ķēžu un ciklu skaits, fiksēta izomorfisma tipa apakšgrafu skaits u.c.;
- *metriskie* invarianti, kas saistīti ar "attālumu" starp grafa virsotnēm;
- *strukturālie* invarianti, kas saistīti ar sakarīgumu;
- *algebriskie* invarianti, kas ir saistīti ar algebras jēdzieniem - grafa matricas īpašvērtības un raksturīgais polinoms, grafa automorfismu grupa u.c.;
- *grafiskie* invarianti, kas atbilst grafiem, kas atvasināti no dotajiem grafiem.

Grafu invariantus var klasificēt arī pēc to aprēķināšanai nepieciešamajiem laika un telpas resursiem asimptotiku nozīmē, kā arī pēc to aprēķinošo algoritmu kompleksitātes.

Uz šo brīdi nav zināma pilna un viegli aprēķināma invariantu sistēma -

- vai nu invariants ir pilns un aprēķināms tikpat lēni kā izomorfisms,
- vai arī tas nav pilns un ātri aprēķināms (piemēram, virsotņu un šķautņu skaits).

2.3. Apakšgrafu invarianti

Apzīmēsim ar $\mathcal{N}_\Delta(\Gamma)$ tādu Γ apakšgrafu skaitu, kas ir izomorfi ar Δ.

2.5. piemērs. Ja $\Delta = K_1$ (triviālais grafs), tad $\mathcal{N}_\Delta(\Gamma) = |V(\Gamma)|$.
Ja $\Delta = K_2$, tad $\mathcal{N}_\Delta(\Gamma) = |E(\Gamma)|$.
Ja $\Delta = K_3$, tad $\mathcal{N}_\Delta(\Gamma)$ ir vienāds ar trijstūru skaitu grafā.

2.2. teorēma. Ja $\Gamma \simeq \Gamma'$, tad katram Δ izpildās vienādība

$$\mathcal{N}_\Delta(\Gamma) = \mathcal{N}_\Delta(\Gamma').$$

PIERĀDĪJUMS Skaitļus $\mathcal{N}_\Delta(\Gamma)$ un $\mathcal{N}_\Delta(\Gamma')$ viennozīmīgi nosaka grafu matricas. Tā kā $\Gamma \simeq \Gamma'$, tad ir iespējams sakārtot Γ' virsotnes tā, ka matrica ir vienāda ar Γ matricu, tāpēc izpildās vienādība. ■

Redzam, ka katram Δ funkcija $\mathcal{N}_\Delta$ ir grafu invariants.

Pārskaitīsim vienkāršākos $\mathcal{N}_\Delta$ tipa invariantus:

- virsotņu skaits ($\Delta = K_1$),
- šķautņu skaits ($\Delta = K_2$),
- trijstūru skaits ($\Delta = K_3$),
- dota lieluma kliķu skaits grafā vai tā papildinājumā ($\Delta = K_n$ vai $\Delta = O_n$),
- virsotņu skaits ar dotu pakāpi (Δ ir zvaigzne ar dotu staru skaitu),
- dota garuma vienkāršu ķēžu skaits ($\Delta = P_n$),
- dota garuma vienkāršu ciklu skaits ($\Delta = C_n$).

Tālāk no šiem invariantiem var veidot sistēmas un pat veidotājfunkcijas.

2.6. piemērs. Pakāpju virkne.

2.4. Grafu metriskie invarianti

Svarīga invariantu klase ir invarianti, kas ir saistīti ar virsotnes savienojošo ķēžu īpašībām.

Grafu teorijā var definēt ģeometriskā attāluma analogu.

Par *attālumu* starp divām virsotnēm v un w sauksim (v, w) - ķēžu garumu minimumu, attālumu starp virsotnēm v un w apzīmēsim ar $dist(v, w)$, tā ir divu argumentu funkcija

$$dist : V \times V \to \mathbb{N} \cup 0.$$

Papildus tam attālumu starp divām virsotnēm dažādās komponentēs definēsim vienādu ar bezgalību.

Par sakarīga grafa *diametru* sauksim maksimālo attālumu starp divām virsotnēm grafā, jeb, citiem vārdiem sakot, attāluma funkcijas maksimālo vērtību grafā, šo lielumu grafam Γ apzīmēsim ar $D(\Gamma)$.

Ķēdi, kuras garums ir vienāds ar grafa diametru, sauksim par *diametrālu ķēdi*.

Par virsotnes v *ekscentritāti* sauksim attāluma funkcijas maksimālo vērtību, ja viens no tās argumentiem ir v, citiem vārdiem sakot, maksimālo attālumu no šīs virsotnes līdz kādai citai virsotnei dotajā grafā, virsotnes v ekscentritāti apzīmēsim ar $\epsilon(v)$.

Par grafa *centru* sauksim inducēto apakšgrafu, kura virsotņu kopu veido grafa virsotņes ar minimālo ekscentritāti, to apzīmēsim ar $Z(\Gamma)$.

Centra virsotņu ekscentritāti sauksim par grafa *rādiusu*, to apzīmēsim ar $r(\Gamma)$.

Virsotnes, kuru ekscentritāte ir vienāda ar grafa diametru, sauksim par *perifērijas virsotnēm*.

Grafa inducēto apakšgrafu, kura virsotņu kopa sakrīt ar visu perifērijas virsotņu kopu, sauksim par *grafa perifēriju* un apzīmēsim ar

$Per(\Gamma)$.

Par grafa *ekscentritāšu vektoru* sauksim virkni $(a_1, ..., a_k)$, kur a_i ir virsotņu skaits ar ekscentritāti i.

Par grafa *attālumu vektoru* sauksim virkni $(b_1, ..., b_m)$, kur b_i ir virsotņu pāru skaits ar attālumu i.

Ir skaidrs, ka diametrs, rādiuss, centra virsotņu skaits, ekscentritāšu vektors un attālumu vektors ir grafa invarianti.

2.3. teorēma. (Hedetniemi) Katram grafam Γ eksistē grafs Γ', tāds, ka $Z(\Gamma') = \Gamma$.

PIERĀDĪJUMS Grafu Γ' konstruēsim šādā veidā. Grafam Γ pievienosim četras jaunas virsotnes a, a_1, b, b_1. Virsotnes a un b savienosim ar visām Γ virsotnēm, a_1 savienosim tikai ar a, b_1 savienosim tikai ar b. Iegūtajā grafā Γ' centrs sakrīt ar Γ. ■

2.4. teorēma. Attāluma funkcija apmierina šādas īpašības:

1) jebkurām virsotnēm v un w izpildās
$$dist(v,w) = dist(w,v)$$
(simetrija);

2) $dist(v,w) = 0$ tad un tikai tad, ja $v = w$ (nedeğenerētība);

3) jebkurām virsotnēm v,w un u izpildās
$$dist(v,w) \leq dist(v,u) + dist(u,w)$$
(trijstūra nevienādība).

PIERĀDĪJUMS Pirmie divi apgalvojumi ir acīmredzami. Lai pierādītu trešo apgalvojumu, pieņemsim pretējo. Ja eksistē virsotne u tāda, ka
$$dist(v,w) > dist(v,u) + dist(u,w),$$
tad tā ir pretruna, jo tad eksistē maršruts no v uz w caur u, kura garums ir mazāks kā $dist(v,w)$. ■

2.5. Grafu lineāri algebriskie invarianti

Šīs nodaļas lasīšanai ir nepieciešamas priekšzināšanas lineārajā algebrā.

Ja ir dota (neorientēta vai orientēta) grafa (V, E) blakusattiecības matrica $M(\Gamma)$, tad to var uzskatīt par kāda lineāra attēlojuma matricu un pētīt tās lineāri algebriskās īpašības un invariantus:

- īpašvērtības un īpašvektorus,
- raksturīgo polinomu

$$p_{M(\Gamma)}(x) = \det(M(\Gamma) - xE),$$

Šādu pētījumu rezultātu apkopojums ir *spektrālā grafu teorija*.

Jāatzīmē, ka grafa blakusattiecības matricas īpašvērtību multikopa (grafa *spektrs*) nav pilns invariants - eksistē neizomorfu grafu pāri ar vienādām īpašvērtībām.

Grafus, kuriem ir vienādi spektri, sauksim par *kospektrāliem*.

Tiek pētītas arī citas matricas, kas ir viegli atvasināmas no $M(\Gamma)$, piemēram, neorientēta grafa *Laplasa (Kirhofa) matrica*

$$L(\Gamma) = D(\Gamma) - M(\Gamma),$$

kur $D(\Gamma)$ ir diagonālmatrica ar elementiem $d_{ii} = deg(i)$. Var uzskatīt, ka šīs $V(\Gamma) \times V(\Gamma)$ matricas darbojas lineārajā telpā $\mathbb{R}^{|V(\Gamma)|}$ vai $\mathbb{C}^{|V(\Gamma)|}$.

Neorientētam grafam Γ blakusattiecības matrica $M(\Gamma)$ ir simetriska ar nulles diagonāli, tāpēc no lineārās algebras seko šādi fakti:

- visas $M(\Gamma)$ īpašvērtības ir reālas;
- telpā $\mathbb{R}^{|V(\Gamma)|}$ (vai $\mathbb{C}^{|V(\Gamma)|}$) matricai eksistē ortonormēta bāze attiecībā uz kanonisko skalāro reizinājumu;
- $Tr(M(\Gamma)) = 0$;

3. 12.mājasdarbs

3.1. Obligātie uzdevumi

12.1 Kā grafu iekodēt virknes veidā?

12.2 Atrodiet blakusattiecības matricas visiem regulāro daudzskaldņu grafiem.

12.3 Atrodiet visus automorfizmus šādiem grafiem:

(a) ķēdei ar garumu n,
(b) pilnajam grafam $\mathcal{K}_n$,
(c) apvienojumam $\mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_1$.

12.4 Atrodiet diametru un centru šādiem grafiem:

(a) ķēdei ar garumu n,
(b) pilnajam grafam $\mathcal{K}_n$,
(c) kuba grafam,
(d) Petersena grafam.

3.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

12.5 Atrodiet visus automorfizmus šādiem grafiem:

(a) oktaedra grafam,

(b) Petersena grafam,

(c) apvienojumam $\mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_2$.

12.6 Pierādīt, ka ja grafā Γ ir vismaz 18 virsotnes, tad vai nu Γ vai $\overline{\Gamma}$ satur K_4.