DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Maģistra studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Diskrētā matemātika

11.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2007./2008.studiju gads

Saturs

1. Ievads grafu teorijā

1.1. Motivācija

Viens no fundamentāliem matemātikas pamatjēdzieniem ir *attiecība* - īpašība, kas piemīt vai nepiemīt kopu elementu pāriem.

Pareizi vizuāli iekodēta informācija ir vieglāk uztverama un apstrādājama nekā jebkura cita veida informācija. Par vizualizāciju var domāt kā par pētāmās sistēmas pirmapstrādi (preprocesingu), kuras rezultātā sistēma tiek iekodēta tādā veidā, ka tā var tikt apstrādāta ātrāk.

Tāpat kā risinot uzdevumus par kopām, ir lietderīgi vizualizēt kopas Eilera-Venna diagrammu veidā, arī uzdevumos par attiecībaām ir lietderīgi mēģināt vizualizēt attiecības:

- Kopu elementus kā elementārus (nedalāmus, atomārus) objektus parasti attēlo kā punktus vai aplīšus ar tajos ierakstītu informāciju;

- tā kā attiecība ir īpašība, kas saista elementu pārus, tad šo īpašību ir pieņemts attēlot kā elementus saistošas nepārtrauktas līnijas (šķautnes, bultiņas, nogriežņus) ar tādu papildinformāciju, kas ir nepieciešama pareizai uzdevuma nosacījumu grafiskai iekodēšanai, parasti šī papildinformācija ir šķautņu vai virsotņu parametri jeb "svari".

Šādu attiecības vizualizācijas veidu sauksim par tās *grafu*. Terminam *grafs* ir grieķu izcelsme, šī vārda saknes nozīme ir *raksts* vai *rakstu zīme*.

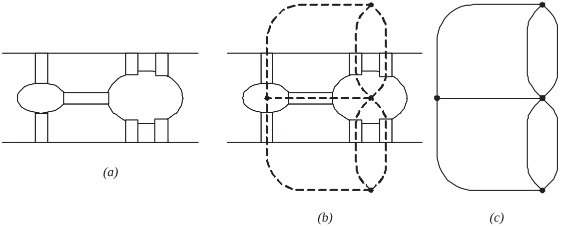
Attiecības vizualizācija grafa veidā palīdz to analizēt gan teorētiski, gan arī eksperimentāli, izmantojot informācijas tehnoloģijas.

Grafu teorija ir matemātikas sadaļa, kas satur

- attiecību pētīšanu izmantojot vizuālo pamatu,
- grafu kā diskrētu ģeometrisku objektu pētīšanu.

Grafu pielietošana matemātikas uzdevumu risināšanā un ar grafiem (attiecībām) saistītā matemātikas revolucionalizēšana sākās 18.gadsimta vidū (1736.gadā) ar matemātiķa L.Eilera darbiem. Terminam *grafs* ir vairāki sinonīmi - *diagramma*, *struktūra* u.c.

1.1. piemērs. Vēsturiski viens no pirmajiem publicētajiem grafu pielietošanas piemēriem ir atrisinājums izklaidējošās matemātikas "uzdevumam par Kēnigsbergas tiltiem", kura autors ir izcilais 18.gadsimta matemātiķis L.Eilers. Ir dota upe, kurā ir divas salas un vairāki tilti.



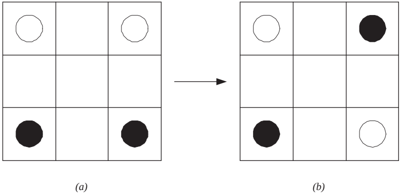
3.1. attēls. Uzdevums par Kēnigsbergas tiltiem

Vai ir iespējams iziet no kāda punkta, pāriet katru tiltu tieši vienu reizi un atgriezties sākotnējā punktā?

Tā kā uzdevuma risināšanā nozīmīga loma ir tiltiem, un trajektorijas, pa kurām tiek iets, nav svarīgas, tad modelēsim uzdevumu šādā veidā: piekārtosim katram sauszemes gabalam vienu punktu un saistīsim divus punktus ar līniju tad un tikai tad, ja atbilstošie sauszemes gabali ir saistīti ar tiltu.

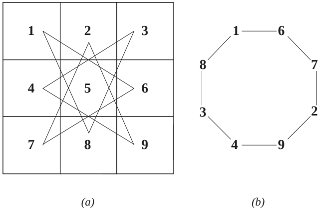
Ja uzdevumam eksistētu atrisinājums, tad iegūtajā grafā eksistētu noslēgts "ceļš", kurā tiek iets pa šķautnēm un kurš saturētu katru šķautni tieši vienu reizi. Ja eksistē tāds ceļš, tad katrai virsotnei ir jābūt ar pāra skaita šķautnēm. Bet šajā grafā ir virsotnes, kurām atbilst nepāra skaits šķautņu, tātad uzdevumam nav atrisinājuma.

1.2. piemērs. (No skolēnu olimpiāžu krājumiem). Uz 3×3 "šaha galda" ir izvietoti divi balti un divi melni zirgi tā, kā parādīts 3.2.(a) attēlā. Vai ir iespējams tos pārvietot uz stāvokli, kas parādīts 3.2.(b) attēlā, ja divas figūras nevar atrasties vienā lauciņā?



3.2. attēls. Uzdevums par četriem šaha zirgiem

Šajā uzdevumā izšķiroša loma ir rūtiņām un to savstarpējam izvietojumam, precīzāk, tam, vai rūtiņas saistītas ar zirga gājienu. Modelēsim uzdevumu šādi: piekārtosim katram laucinam vienu virsotni un saistīsim divas virsotnes ar līniju, ja atbilstošie laucini ir saistīti ar zirga gājienu (skatīt 3.3.(a) attēlā).



3.3. attēls. Grafs uzdevumam par četriem šaha zirgiem

Tagad aizmirsīsim par šaha galdu kā fizikālu objektu un pārkārtosim grafa virsotnes tā, lai grafa struktūra ir labāk redzama (skatīt 3.3.(b) attēlā).

Var redzēt, ka uzdevumam nav atrisinājuma, jo sākuma stāvoklī starp diviem baltajiem zirgiem nav melnā zirga, bet beigu stāvoklī starp tiem ir jābūt melnajam zirgam, grafa šķautnes ir izvietotas tā, ka divi blakus esoši zirgi nevar pārlēkt viens otram pāri.

1.3. piemērs. Pielietosim grafus vienkāršu matemātikas uzdevumu analīzē un risināšanā.

Atrisināsim šādu uzdevumu: dotas taisnleņķa trijstūra katetes a un b, atrast apvilktās un ievilktās riņķa līnijas rādiusu.

Atkārtosim vienkāršākās sakarības, kas saista katetes a un b, hipotenūzu c, šauro lenķi α ar pretkateti a, tā papildinājumu β, trijstūra laukumu S, perimetru P, apvilktās riņķa līnijas rādiusu R un ievilktās riņķa līnijas rādiusu r.

Definēsim grafu, kurā ir divu tipu virsotnes -

a) lielumi $a, b, c, \alpha, \beta, S, P, R, r$;

b) sakarības.

Savienosim lielumu x ar sakarību A tad un tikai tad, ja lielums x piedalās sakarībā A.

Iegūtais grafs parāda dotā ğeometrijas uzdevuma lielumu un sakarību savstarpējās attiecības.

1.2. Pamatdefinīcijas

1.2.1. Grafu klases

Definēsim plašāk izmantotās grafu klases.

Neorientētie grafi. Par *grafu* (*neorientētu grafu*) sauksim pāri $\Gamma = (V, E)$, kur V - grafa *virsotņu kopa*, $V \neq \emptyset$ un $E \subseteq V \times V$ ir grafa *šķautņu kopa*, kur E apmierina šādus nosacījumus:

(1) $E = E^{-1}$, ja šķautne $(u, v) \in E$, tad arī $(v, u) \in E$;

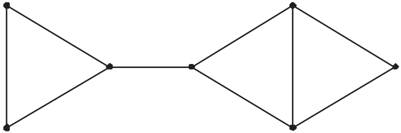
(2) $E \cap diag(V \times V) = \emptyset$ - nav šķautņu, kurām abi galapunkti ir vienādi (atgādināsim, ka mēs definējam $diag(V \times V) = \{(v_1, v_2) \in V \times V | v_1 = v_2\}$ un saucam to par kopas $V \times V$ *diagonāli*).

Pēc noklusēšanas mēs uzskatīsim, ka virsotņu kopa V ir galīga kopa. Ja vienlaicīgi tiek strādāts ar grafiem, kuru virsotņu kopas ir gan galīgas, gan bezgalīgas, tad lietosim terminus *galīgs grafs* un *bezgalīgs grafs*.

Neorientētam grafam atbilst simetriska antirefleksīva attiecība. Nosacījums (1) atbilst simetrijai un nosacījums (2) - antirefleksivitātei.

Literatūrā un zinātnieku vai datorspeciālistu sarunvalodā parasti ar terminu *grafs* pēc noklusēšanas tiek domāts *neorientēts grafs*.

Ja $\Gamma = (V, E)$ ir neorientēts grafs, tad tā virsotņu skaitu standarti apzīmēsim ar $|V|$ un šķautņu skaitu apzīmēsim ar $|E|$, kaut arī elementu skaits kopā E ir divas reizes lielāks nekā $|E|$.



3.6. attēls. Neorientēta grafa piemērs

Divas neorientēta grafa virsotnes v_1, v_2 sauksim par *blakusvirsotnēm* (*savienotām virsotnēm*), ja $(v_1, v_2) \in E$, apzīmēsim to ar $v_1 \sim v_2$.

Virsotni v un šķautni e sauksim par *incidentām*, ja viens no šķautnes e galapunktiem ir virsotne v.

Divas šķautnes sauksim par incidentām, ja tām ir kopīga virsotne.

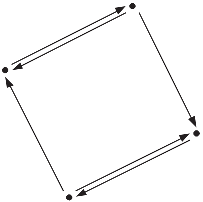
Orientētie grafi. Par *orientētu grafu* sauksim pāri $\Gamma = (V, E)$, kur V - orientēta grafa virsotņu kopa, $V \neq \emptyset$, $E \subseteq V \times V$ un

$$E \cap diag(V \times V) = \emptyset.$$

E - orientētā grafa šķautņu kopa.

Šķautni (u, v) parasti sauc par virsotnes u izejošo šķautni, un šķautni (v, u) - par u ieejošo šķautni.

Orientētam grafam atbilst patvaļīga antirefleksīva attiecība.



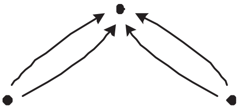
3.7. attēls. Orientēta grafa piemērs

No orientēta grafa var iegūt neorientētu grafu, "aizmirstot" šķautņu orientāciju. Otrādi, no neorientēta grafa var iegūt orientētu grafu, uzskatot katru neorientētu šķautni par divu pretēju orientētu šķautņu apvienojumu.

Par *orientētu grafu ar cilpām* sauksim pāri $\Gamma = (V, E)$, kur V - grafa virsotņu kopa, $V \neq \emptyset$ un $E \subseteq V \times V$ - grafa šķautņu kopa. Orientētam grafam ar cilpām atbilst patvaļīga attiecība.

Multigrafi. Par *neorientētu* vai *orientētu multigrafu* sauksim grafu, kurā var būt vairāk nekā viena neorientēta vai orientēta šķautne starp divām virsotnēm vienā virzienā, tas var būt ar vai bez cilpām. Šķautņu skaitu starp divām virsotnēm sauksim arī par šķautnes *multiplicitāti*.

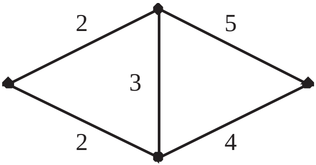
Multigrafu var domāt kā grafu ar papildus struktūru - funkciju no šķautņu kopas uz naturālu skaitļu kopu, kas katrai šķautnei piekārto tās multiplicitāti.



3.8. attēls. Orientēta multigrafa piemērs

Grafi ar svariem. Par *nosvērtu grafu* (*grafu ar indeksētām virsotnēm* un/vai *šķautnēm*) sauksim grafu, kura katrai virsotnei un/vai šķautnei var būt piekārtots skaitlis, vairāki skaitļi vai citu kopu elementi.

Formāli runājot, nosvērts grafs ir jebkura tipa grafs ar papildus struktūru - virsotņu "svaru" funkciju $w : V \to A$ vai/un šķautņu "svaru" funkciju $w : E \to A$, kas katrai virsotnei/šķautnei piekārto kādu elementu no kopas A (svaru). Parasti kopa A ir kāda no klasiskajām skaitļu kopām.



3.9. attēls. Nosvērta grafa piemērs

No nosvērta grafa var iegūt parastu (orientētu vai neorientētu) grafu, neņemot vērā ("aizmirstot") par svaru funkciju.

Hipergrafi. Grafa jēdzienu var vispārināt šādā veidā. Ja V ir netukša kopa (virsotņu kopa) un $E \subseteq P(V)$, tad pāri $X = (V, E)$

sauksim par *hipergrafu*. Tādējādi hipergrafa "šķautnes" (kopas E elementi) atbilst virsotņu kopas V patvaļīgām apakškopām. Šajā kursā mēs hipergrafus sīkāk neapskatīsim.

1.2.2. Vienādība un apakšgrafi

Jebkura tipa divus grafus sauksim par vienādiem, ja to virsotņu un šķautņu kopas ir vienādas.

Ja dots grafs $\Gamma = (V, E)$, tad grafu $\Gamma_1 = (V_1, E_1)$ sauksim par Γ *apakšgrafu*, ja $V_1 \subseteq V, E_1 \subseteq E$, un katra no kopas E_1 šķautnēm ir incidenta tikai kopas V_1 virsotnēm, apzīmēsim to ar pierakstu $\Gamma_1 \subseteq \Gamma$.

Par virsotņu kopas U *inducēto (pilno) apakšgrafu* sauksim apakšgrafu, kura virsotņu kopa ir U un kas satur visas šķautnes, kas ir incidentas tikai kopas U elementiem.

Orientētā grafā Γ par virsotņu kopas U *inducēto (pilno) apakšgrafu* sauksim apakšgrafu, kura virsotņu kopa ir U un kas satur visas sķautnes, kuru galapunkti un sākumpunkti ir kopā U.

Par *skeletālu apakšgrafu* sauksim apakšgrafu, kas satur visas grafas virsotnes.

Grafu Γ sauksim par *maksimālu* attiecībā uz kādu īpašību P, ja neeksistē grafs Γ' tāds, ka $\Gamma \subseteq \Gamma'$ un grafam Γ' piemīt īpašība P.

Grafa apakšgrafu sauksim par *kliķi*, ja tajā jebkuras divas virsotnes ir savienotas. Grafa Γ maksimālās kliķes virsotņu skaitu sauksim par grafa *kliķes skaitli*, to apzīmēsim ar $\omega(\Gamma)$.

1.2.3. Virsotnes apkārtne

Par grafa virsotnes *apkārtni* sauksim virsotņu kopas apakškopu, kas satur visas ar to savienotās virsotnes, virsotnes v apkārtni apzīmēsim ar $N_{\Gamma}(v)$.

Par orientēta grafa virsotnes v *pozitīvo/negatīvo apkārtni* sauksim virsotņu kopu, kas satur visas virsotnes u tādas, ka eksistē šķautne $(u, v)/(v, u)$, šīs kopas apzīmēsim ar $N_{+}(v)$ vai $N_{-}(v)$. Orientētā grafā Γ kopu $N_{-}(v)$ apzīmēsim arī ar $\Gamma(v)$ un kopu N_{+} - ar $\Gamma^{-1}(v)$.

Par grafa virsotnes *pakāpi* sauksim ar to incidento šķautņu skaitu vai, citiem vārdiem sakot, virsotnes apkārtnes elementu skaitu, virsotnes v pakāpi apzīmēsim ar $d(v)$.

Par grafa *pakāpju vektoru* sauksim virkni $(a_0, ..., a_k)$, kur a_i ir grafa virsotņu skaits ar pakāpi i.

Virsotni, kuras pakāpe ir 0, sauksim par *izolētu* virsotni.

Grafa Γ virsotņu minimālo pakāpi apzīmēsim ar $\delta(\Gamma)$, maksimālo pakāpi - ar $\Delta(\Gamma)$. Par grafa *vidējo virsotnes pakāpi* sauksim lielumu

$$d(\Gamma) = \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} d(v).$$

Par orientēta grafa virsotnes v *pozitīvo/negatīvo puspakāpi* sauksim ar v incidento ieejošo/izejošo šķautņu skaitu jeb v pozitīvās/negatīvās apkārtnes elementu skaitu, apzīmēsim ar $d_+(v)/d_-(v)$.

Ja $d_+(v) = 0$, tad virsotni v sauksim par (orientēta grafa) *avotu*. Ja $d_-(v) = 0$, tad virsotni v sauksim par *noteku*. Orientētu grafu, kuram ir tieši viens avots un tieši viena noteka, sauksim par *tīklu*.

1.1. teorēma.

1. Grafa $\Gamma = (V, E)$ virsotņu pakāpju summa ir vienāda ar divkāršotu šķautņu skaitu:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

2. Orientētā grafā $\Gamma = (V, E)$ ir spēkā formula

$$\sum_{v \in V} d_-(v) + \sum_{v \in V} d_+(c) = 2|E|.$$

PIERĀDĪJUMS Pielietosim kombinatorikas pamatprincipu "skaitīšana divos dažādos veidos".

Neorientēta grafa gadījumā skaitīsim katras virsotnes v incidentās šķautnes un summēsim šos skaitļus pa visām grafa virsotnēm:

- no vienas puses, mēs iegūsim $\sum_{v \in V} d(v)$,
- no otras puses, tā kā katrai šķautnei ir divi galapunkti, tad katra šķautne tiks skaitīta divas reizes un summā iegūsim lielumu $2|E|$.

Līdzīga sprieduma ceļā iegūsim arī apgalvojumu orientētam grafam.

■

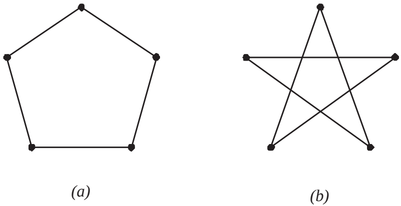
1.2.4. Papildgrafs

Par grafa $\Gamma = (V, E)$ *papildgrafu* jeb *papildinājumu* sauksim grafu

$$\overline{\Gamma} = (V, (V \times V) \setminus (E \cup diag(V \times V)).$$

Citiem vārdiem sakot, divas virsotnes ir savienotas grafā $\overline{\Gamma}$ tad un tikai tad, ja tās nav savienotas grafā Γ.

1.4. piemērs. 3.11.attēla grafa (a) papildgrafs ir grafs (b).



3.11. attēls. Grafa un tā papildgrafa piemērs

1.2.5. Staigāšana pa grafu

Uzdevumu risināšanā ir lietderīgi domāt par grafu kā par transporta vai sazināšanās tīkla modeli, tāpēc ir jādefinē vienkāršākie jēdzieni, kas ir saistīti ar pārejām starp virsotnēm.

Par *maršrutu* grafā sauksim virsotņu un šķautņu virkni

$$(v_0, e_1, ..., e_n, v_n),$$

kur jebkuras divas kaimiņu virsotnes v_i un v_{i+1} ir savienotas ar šķautni e_{i+1}. Ja maršrutā $v_0 = v_n$, tad tādu maršrutu sauksim par *noslēgtu*, pretējā gadījumā, kad $v_0 \neq v_n$ - par *vaļēju*, šķautņu skaitu maršrutā sauksim par tā *garumu*;

Maršrutu, kurā visas šķautnes ir dažādas, sauksim par *ķēdi*;

Ķēdi, kurā visas virsotnes izņemot, iespējams, pirmo un pēdējo, ir dažādas, sauksim par *vienkāršu ķēdi*;

Noslēgtu ķēdi ar pozitīvu garumu sauksim par *ciklu*, noslēgtu vienkāršu ķēdi ar pozitīvu garumu sauksim par *vienkāršu ciklu*.

Maršrutu (ķēdi, vienkāršu ķēdi), kura pirmā virsotne ir v un pēdējā - w, sauksim par (v, w) - maršrutu (ķēdi, vienkāršu ķēdi).

Divus vaļējus maršrutus M_1 un M_2 sauksim par vienādiem, ja vai nu maršruti ir pilnīgi identiski, vai arī tie atšķiras ar vienu un to pašu šķautņu apiešanas virzienu:

$$M_1 = M_2 \text{ vai } M_1 = M_2^{-1}.$$

Divus slēgtus maršrutus M_1 un M_2 sauksim par vienādiem, ja tiem atbilst viena un tā pati šķautņu kopa un to apiešanas kārtība ar precizitāti līdz virzienam, bet atšķiras maršruta pirmā (un pēdējā) virsotne.

Par vienkāršu ķēdi vai vienkāršu ciklu ir lietderīgi domāt kā par grafa apakšgrafu, kas satur atbilstošās virsotnes un šķautnes starp virsotnēm.

1.2. teorēma. Ja $\delta(\Gamma) \geq 2$, tad grafā Γ eksistē vienkārša ķēde ar garumu $\delta(\Gamma)$ un vienkāršs cikls ar garumu $\delta(\Gamma)+1$.

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka garākās ķēdes garums ir k un tai atbilstošā virsotņu virkne ir $(v_0, ..., v_k)$. Visas virsotnes v_k blakusvirsotnes pieder šai virknei, tāpēc ka pretējā gadījuma ķēdi varētu pagarināt. Iegūstam, ka $k \geq \delta(\Gamma)$ un apgalvojums par ķēdi ir pierādīts.

Pieņemsim, ka indekss i, $0 \leq i < k$, ir minimālais indekss ar īpašību $v_i \sim v_k$. Tā kā visas v_k blakusvirsotnes pieder maksimālajai ķēdei, tad virsotņu virkne

$$(v_i, v_{i+1}, ..., v_k, v_i)$$

atbilst ciklam ar garumu $l \geq \delta(\Gamma)+1$ (vismaz $\delta(\Gamma)$ škautnes skaitot no v_k un vēl viena $v_i \sim v_k$). ■

Analoģiski maršruta, ķēdes un cikla jēdzienus definē orientētiem grafiem. Par *virzītu maršrutu* orientētā grafā sauksim virsotņu un šķautņu virkni $(v_0, e_1, ..., e_n, v_n)$, kur jebkuras divas virsotnes v_i un v_{i+1} ir savienotas ar (orientēto) šķautni e_{i+1}. Līdzīgā veidā definēsim arī virzītu ķēdi, vienkāršu ķēdi, ciklu un vienkāršu ciklu.

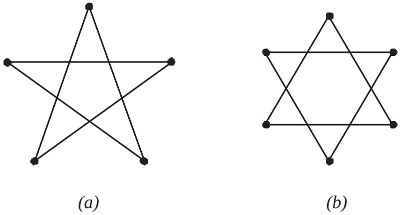
1.2.6. Sakarīgums

Grafu sauksim par *sakarīgu*, ja eksistē ķēde starp jebkurām divām virsotnēm.

Maksimālu sakarīgu apakšgrafu sauksim par grafa *sakarības komponenti*.

Var redzēt, ka grafs ir sakarīgs tad un tikai tad, ja eksistē virsotne v tāda, ka jebkurai citai virsotnei u eksistē maršruts $(u, ..., v)$.

1.5. piemērs. 3.12.attēla grafs (a) ir sakarīgs un grafs (b) nav sakarīgs un satur 2 komponentes.



3.12. attēls. Sakarīga un nesakarīga grafa piemēri

1.3. teorēma. Grafs ar n virsotnēm un mazāk kā $n-1$ šķautni nav sakarīgs.

PIERĀDĪJUMS Fiksēsim grafā kādu virsotni v. Ja grafs ir sakarīgs, tad eksistē ķēde no v līdz jebkurai no pārējām $n-1$ virsotnēm, tātad grafā ir vismaz $n-1$ šķautne. ■

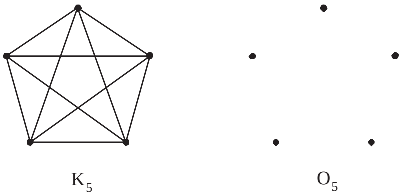
1.3. Speciālas grafu klases

Apskatīsim dažas speciālas grafu klases vai grafus. Grafu speciālgadījumus var izmantot pieņēmumu pārbaudei vai atspēkošanai.

Par *triviālo grafu* sauksim grafu ar vienu virsotni un bez šķautnēm. Par *tukšo grafu* sauksim "grafu", kura virsotņu un šķautņu kopas ir tukšas.

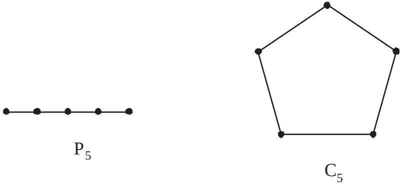
Pilnais grafs K_n - (neorientēts) grafs ar n virsotnēm, visi virsotņu pāri savā starpā ir savienoti.

Bezšķautņu grafs O_n - (neorientēts) grafs ar n virsotnēm un 0 šķautnēm.



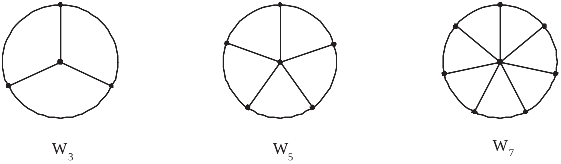
3.14. attēls. Pilna grafa un bezšķautņu grafa piemēri

Ķēde P_n - sakarīgs grafs ar n virsotnēm, kur divām virsotnēm pakāpe ir 1 un pārējām pakāpe ir 2. *Cikls* C_n - sakarīgs grafs ar n virsotnēm, kur katrai virsotnei pakāpe ir 2.



3.15. attēls. Ķēdes un cikla piemēri

Ritenis W_n - sakarīgs grafs ar $n+1$ virsotni, kur vienai virsotnei ir pakāpe n un pārējām - 3.



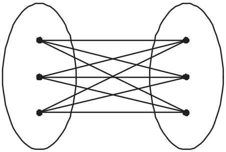
3.16. attēls. Riteņu piemēri

Divdaļīgs grafs - grafs, kura virsotņu kopu var sadalīt divās daļās tā, ka jebkuras divas virsotnes, kas pieder vienai daļai, nav savienotas.

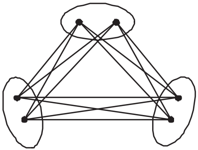
Pilns divdaļīgs grafs $K_{n,m}$ - divdaļīgs grafs, kura virsotņu kopas daļu elementu skaits ir n un m un kurā jebkuras divas virsotnes dažādās daļās ir savienotas.

m-daļīgs grafs - grafs, kura virsotnes var sadalīt m daļās tā, ka jebkuras divas virsotnes, kas pieder vienai daļai, nav savienotas.

Pilns m-daļīgs grafs $K_{n_1,\ldots,n_m}$ - m daļīgs grafs, kura virsotņu kopas daļu elementu skaits ir $n_1, \ldots, n_m$, jebkuras divas virsotnes dažādās daļās ir savienotas.



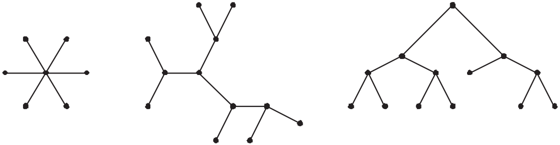
$K_{3,3}$



$K_{2,2,2}$

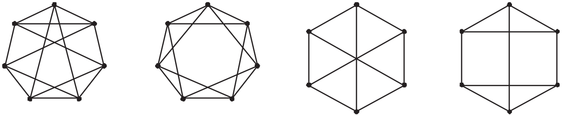
3.17. attēls. 2-daļīga un 3-daļīga grafa piemēri

Koks - sakarīgs grafs bez inducētiem apakšgrafiem, kas ir cikli (sakarīgs *aciklisks* grafs). *Mežs* - grafs bez cikliem (ne obligāti sakarīgs).



3.19. attēls. Mežs

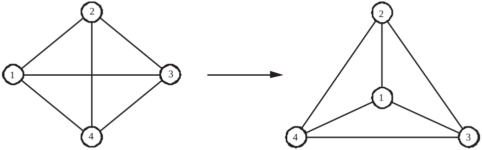
Regulārs grafs - grafs, kura visām virsotnēm ir vienāda pakāpe. Ja regulāra grafa virsotnes pakāpe ir k, tad to sauksim par k-regulāru grafu. Katram n atbilstošais cikls C_n un pilnais grafs K_n ir regulāri grafi.



3.20. attēls. 3-regulāru un 4-regulāru grafu piemēri ar 6 un 7 virsotnēm

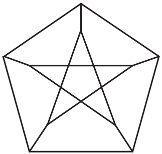
Plakans grafs - grafs, kas ir uzzīmēts tā, ka šķautnēm ir kopīgi punkti tikai virsotnēs.

Planārs grafs - grafs, kuru var uzzīmēt kā plakanu grafu (*plakanizēt*).



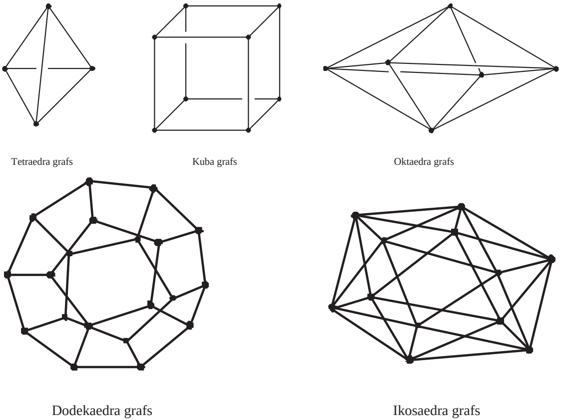
3.21. attēls. Planāra grafa plakanizācijas piemērs

Ir atrasti un pētīti vairāki interesanti grafi, kas ir nosaukti to atklājēju vārdos. Populārākais no šādiem grafiem ar nelielu virsotņu skaitu ir *Petersena grafs*:



3.22. attēls. Petersena grafs

Regulāro daudzskaldņu grafi tiek iegūti no tā saucamajiem regulārajiem daudzskaldņiem (tetraedrs, kubs, oktaedrs, dodekaedrs, ikosaedrs), kur katram atbilst grafs, kura virsotnes un šķautnes atbilst figūras ģeometriskajām virsotnēm un šķautnēm.



3.23. attēls. Regulāro daudzskaldņu grafi

2. 11.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

11.1 Cik ir dažādu katra tipa (neorientētu, orientētu, orientētu ar cilpām) grafu ar n virsotnēm? Cik ir dažādu katra tipa grafu ar n virsotnēm un m šķautnēm?

11.2 Pierādīt, ka neeksistē grafs ar piecām virsotnēm, kuru pakāpes ir $2, 4, 4, 4, 4$.

11.3 Pierādīt, ka ja grafā Γ ir vismaz 6 virsotnes, tad vai nu Γ vai $\overline{\Gamma}$ satur trijstūri.

11.4 Kādā valstī ir 2008 pilsētas. No galvaspilsētas iziet 101 aviolīnija, no pilsētas A iziet 1 aviolīnija, bet no jebkuras citas - 20 aviolīnijas. Pierādīt, ka no galvaspilsētas var aizlidot uz pilsētu A.

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

11.5 Pierādīt, ka eksistē grafs ar $2n$ virsotnēm, kuru pakāpes ir

$$1, 1, 2, 2, ..., n, n.$$

11.6 Pierādīt, ka ja grafā Γ ir vismaz 18 virsotnes, tad vai nu Γ vai $\overline{\Gamma}$ satur K_4.