DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Maģistra studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Diskrētā matemātika

10.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2007./2008.studiju gads

Saturs

1. Svarīgākie veidotājfunkciju tipi

1.1. Racionālās veidotājfunkcijas

Veidotājfunkciju $A(x)$ sauksim par *racionālu veidotājfunkciju (RV)*, ja to var izteikt kā divu polinomu attiecību:

$$A(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kur $Q(0) \neq 0$ ($x \nmid Q(x)$).

1.1. teorēma. (*Fundamentālā teorēma par racionālajām veidotājfunkcijām*). Pieņemsim, ka ir dota kompleksu skaitļu virkne $\{a_n\}_{n\geq 0}$. Zemāk dotie apgalvojumi ir ekvivalenti:

1.
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{P(x)}{Q(x)},$$
kur $P, Q \in \mathbb{C}[x]$, $Q(x) = q_m x^m + q_{m-1} x^{m-1} + ... + q_1 x + q_0$, $deg(P) < deg(Q) = m$;

2. visiem $k \geq m$ izpildās lineāra rekurenta sakarība
$$a_k q_0 + a_{k-1} q_1 + ... + a_{k-m} q_m = \sum_{j=0}^{m} a_{k-j} q_j = 0;$$

3. visiem $n \geq 0$ izpildās sakarība
$$a_n = \sum_{i=1}^{r} \frac{P_i(n)}{\lambda_i^n},$$

kur λ_i ir Q saknes:

$$q_m x^m + q_{m-1} x^{m-1} + ... + q_1 x + q_0 = q_m \prod_{i=1}^{r} (x - \lambda_i)^{m_i}, deg(P_i) < m_i.$$

PIERĀDĪJUMS Īsta daļveida racionāla funkcija $\frac{P(x)}{Q(x)}$ virs kompleksa skaitļu lauka ir izsakāma parciāldaļu summas veidā

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{m_i} \frac{c_{ij}}{(x - \lambda_i)^j},$$

kur visi kompleksie skaitļi λ_i ir dažādi. Izvirzīsim parciāldaļu $\frac{1}{(x-\lambda)^k}$

Teilora rindā ap punktu 0:

$$\frac{1}{(x-\lambda)^k} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\left(\frac{1}{x-\lambda}\right)^{(k-1)} =$$

$$\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\left(-\frac{1}{\lambda}\right)\left(\sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{\lambda^n}\right)^{(k-1)} =$$

$$\frac{(-1)^k}{\lambda(k-1)!}\sum_{n\geq 0}\frac{1}{\lambda^n}n(n-1)...(n-k+2)x^{n-k+1} =$$

$$\frac{(-1)^k}{\lambda(k-1)!}\sum_{n\geq 0}\frac{A_{n+k-1}^{k-1}}{\lambda^n}x^n.$$

Redzam, ka

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i} \frac{c_{ij}}{(x-\lambda_i)^j} =$$

$$\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{m_i} c_{ij}\frac{(-1)^j}{\lambda_i^j}\sum_{n\geq 0}\frac{A_{n+j-1}^{j-1}}{\lambda_i^n}x^n =$$

$$\sum_{n\geq 0} x^n \sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\lambda_i^n}\sum_{j=1}^{m_i} c_{ij}\frac{(-1)^j}{\lambda_i^j}A_{n+j-1}^{j-1} =$$

$$\sum_{n\geq 0} x^n \sum_{i=1}^{r}\frac{1}{\lambda_i^n}P_i(n),$$

kur visas funkcijas $P_i(n)$ ir polinomi un $deg(P_i) < m_i$.

Salīdzinot veidotājfunkcijas koeficientus, redzam, ka šie aprēķini pierāda teorēmas 1. un 3.apgalvojumu ekvivalenci.

Pieņemsim, ka ir spēkā teorēmas 1.apgalvojums. Formāli reizinot abas vienādības

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

puses ar saucēju $Q(x)$, iegūsim

$$Q(x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = P(x).$$

Pārveidojot iegūsim, ka

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^n \sum_{i=0}^{m} q_i x^i = \sum_{n\geq 0} \sum_{i=0}^{m} a_n q_i x^{n+i} =$$

$$\sum_{n\geq m} x^n \sum_{j=0}^{m} a_{n-j} q_j + \sum_{n=0}^{m-1} x^n \sum_{j=0}^{n} a_{n-j} q_j = P(x).$$

Tā kā $deg(P) < m$, tad visiem $k \geq m$ izpildās sakarība

$$\sum_{i=0}^{m} a_{k-j} q_j = 0.$$

Ja izpildās šāda rekurenta sakarība, tad, izmantojot homogēnu lineāru rekurento sakarību risināšanas metodi, var parādīt, ka izpildās 3.apgalvojums un teorēma ir pierādīta ar ciklisko metodi.■

1.1. piezīme. Fundamentālā teorēma par RV izsaka to, ka RV ir tieši tās veidotājfunkcijas, kas atbilst lineāru rekurentu sakarību atrisinājumiem, ignorējot galīgu skaitu noviržu no rekurentās sakarības, kuras var rasties, ja RV nav īsta (skaitītāja pakāpe nav mazāka kā saucēja pakāpe) un tai eksistē netriviāls sadalījums polinoma un īstas daļveida racionālas funkcijas summā.

1.2. Algebriskas veidotājfunkcijas

Veidotājfunkciju $A(x) = \sum_{n\geq 0}^{\infty} a_n x^n$ sauksim par *algebrisku veidotājfunkciju (AV)*, ja eksistē divu argumentu polinoms $R(u, v)$, kurš nav identiski vienāds ar 0 un formāli (koeficientu vienādības nozīmē) izpildās sakarība

$$R(x, A(x)) = 0.$$

1.2. piezīme. Jebkura RV ir AV, jo veidotājfunkcija $A(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ apmierina polinomiālu sakarību

$$Q(x)A(x) - P(x) = 0.$$

1.2. teorēma. Ja veidotājfunkcija

$$A(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^n$$

ir algebriska, tad eksistē naturāls skaitlis m un polinomi

$$P_0(x), P_1(x), ..., P_m(x)$$

tādi, ka visiem naturāliem n izpildās sakarība

$$P_m(n)a_{n+m} + P_{m-1}(n)a_{n+m-1} + ... + P_0(n)a_n = 0.$$

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka veidotājfunkcija

$$A(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n x^n$$

apmierina polinomiālu sakarību

$$R(x, A(x)) = 0.$$

Atvasināsim šīs vienādības abas puses, uzskatot R par divu argumentu funkciju $R(x, y)$:

$$R'_x(x, A(x)) + A'(x)R'_y(x, A(x)) = 0.$$

Iegūstam, ka

$$A(x) = -\frac{R'_x(x, A(x)}{R'_y(x, A(x)}$$

ir racionāla funkcija no x un $A(x)$.

Līdzīgā veidā var parādīt, ka visi veidotājfunkcijas $A(x)$ atvasinājumi ir racionālas funkcijas no x un $A(x)$.

Izmantosim faktu no lineārās algebras, kuru ir jāpieņem bez pierādījuma: ja funkcija $A(x)$ apmierina polinomiālu sakarību

$$R(x, A(x)) = 0,$$

tad visu racionālo funkciju no x un $A(x)$ lineāras telpas dimensija virs visu racionālu funkciju lauka ir galīga -

$$dim_{\mathbb{C}(x)}\mathbb{C}(x, A(x)) < \infty.$$

No šī fakta seko, ka visu $A(x)$ atvasinājumu kopa $\{A^{(k)}(x)\}_{k\geq 0}$ ir galīgi dimensionāla virs racionālo funkciju lauka un eksistē lineāra sakarība ar racionālu funkciju koeficientiem, kas saista šīs funkcijas. Reizinot šādu lineāru sakarību ar kopsaucēju un salīdzinot koeficientus pie vienādām x pakāpēm, iegūsim doto rekurento sakarību. ■

1.1. piemērs. *Šrēdera skaitļi.* Vispārināsim uzdevumu par Katalāna skaitļiem.

Cik veidos $n+1$-stūri var sadalīt ar diagonālēm, tā lai tās nekrustotos? Atšķirība no traingulācijas ir tāda, ka sadalījuma elementi var būt daudzstūri ar jebkādu malu skaitu.

Definēsim $s_0, s_1 = 1$. Redzam, ka

$$s_2 = 1, s_3 = 3, s_4 = 11.$$

Pamatosim, ka skaitļu s_n veidotājfunkcija

$$S(x) = \sum_{n \geq 0} s_n x^n$$

apmierina sakarību

$$S(x) = x + \frac{S^2(x)}{1 - S(x)}.$$

Ja n ir patvaļīgs, tad fiksēsim vienu $n+1$-stūra malu. Ievērosim šādus faktus:

- šī mala ir viena no kāda m-stūra D malām,
- visu sadalījumu var iekodēt kā sakārtotu virkni

  $$(X_1, , ..., X_l, D, X_{l+1}, ..., X_{m-1}),$$

  kur X_i ir kāds sadalījums $m_i + 1$-stūrim,
- $1 \leq m_i \leq n - 1$,

- $\sum_{i=1}^{m-1} m_i = n$, jo
$$\sum_{i=1}^{m-1}(m_i+1) = n+m-2,$$
- katram $1 \leq i \leq m-1$ sadalījums X_i var tikt izvēlēts s_{m_i} veidos neatkarīgi no pārējiem sadalījumiem,
- ja $m = 3$, tad tādu sadalījumu skaits ir vienāds ar
$$\sum_{k=1}^{n-1} s_k s_{n-k}, ([x^n]S^2(x))$$
- ja $m = 4$, tad tādu sadalījumu skaits ir vienāds ar
$$\sum_{k_1=1,k_2=1}^{n-2} s_{k_1} s_{k_2} s_{n-k_1-k_2}, ([x^n]S^3(x))$$
- ...

Spriežot līdzīgi Katalāna skaitļu gadījumam, iegūstam veidotājfunkciju vienādību

$$S(x) = x + \underbrace{S^2(x)}_{m=3} + \underbrace{S^3(x)}_{m=4} + ... + \underbrace{S^r(x)}_{m=r+1} + ...$$

Pārveidosim labo pusi:

$$S(x) = x + S^2(x)(1 + S(x) + S^2(x) + ...) = x + \frac{S^2(x)}{1 - S(x)}.$$

Vienādojumu

$$S(x) = x + \frac{S^2(x)}{1 - S(x)}$$

var pārveidot formā

$$2S^2(x) + S(x)(-x - 1) + x = 0,$$

kas ir kvadrātisks vienādojums attiecībā uz $S(x)$. Iegūstam, ka

$$S(x) = \frac{x + 1 - \sqrt{x^2 - 6x + 1}}{4} =$$
$$x + x^2 + 3x^3 + 11x^4 + 45x^5 + 197x^6 + 903x^7 + 4279x^8 + 20793x^9 + 103049x^{10} + \ldots.$$

Šrēders bija 19.gs vācu matemātiķis, kas pirmais atrada formulu šai veidotājfunkcijai. Daži no Šrēdera skaitļiem ir pieminēti seno grieķu filozofu un matemātiķu darbos 1.gs. pirms Kristus. Sengrieķu vēsturnieka Plutarha darbā, kas radīts ap 100AD, ir minēts, ka astronoms un matemātiķis Hiparhs no Rodosas, kas dzīvoja ap 200BC, ir atrisinājis divus loģikas uzdevumu, kuru atbildes ir 103049 un 310952. Līdz pat 1996.gadam šos skaitļus nevarēja izskaidrot un tie tika uzskatīti par nepamatojamiem un nesaistītiem ar kādiem matemātiskiem aprēķiniem. 1996.gadā tika ievērots, ka

$$103049 = s_{10}$$

un

$$310952 = \frac{s_{10} + s_{11}}{2} - 2$$

un tika atrastas šo loģikas uzdevumu iespējamās interpretācijas. Nenoskaidrots paliek jautājums par metodēm, ar kurām Hiparhs atrisināja šos uzdevumus. Šis gadījums rāda, ka zināšanu apjoms, kas bija uzkrāts antīkajā pasaulē un kas gāja bojā kopā ar to, dažos virzienos bija samērojams ar mūsdienu zinātnes sasniegumiem.

2. Eksponenciālās veidotājfunkcijas

Eksponenciālās veidotājfunkcijas (EV) var tikt pielietotas, ja uzdevums ir saistīts ar permutāciju skaita atrašanu, tas ir, uzdevumos, kur elementu kārtība virknēs ir svarīga.

Var ievērot, ka izpildās sakarība

$$\frac{x^n}{n!} \cdot \frac{x^m}{m!} = C_{n+m}^{n} \frac{x^{n+m}}{(n+m)!}.$$

Ja ir dotas divas virknes a_n un b_n, kas skaita A tipa un B tipa objektus, kurus var izveidot no n elementu lielas kopas, ja šo virkņu EV ir

$$A_{exp}(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{n!} x^n$$

un

$$B_{exp}(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{b_n}{n!} x^n,$$

tad to reizinājums

$$A_{exp}(x)B_{exp}(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} \sum_{i=0}^{n} C_n^i a_i b_{n-i}$$

ir EV sakārtotiem objektu pāriem (A, B).

Tiešām, lai konstruētu pāri (A, B) ar kopējo lielumu n, mums ir

- jāizvēlas indekss i,
- i elementus liela apakškopa no n elementus lielas kopas (to var izdarīt C_n^i veidos),
- A tipa objekts, ko var izveidot no šiem i elementiem (to var izdarīt a_n veidos),
- B tipa objekts, ko var izveidot no atlikušajiem $n-i$ elementiem (to var izdarīt b_{n-i} veidos),
- ir jāizmanto reizināšanas un summas likumi.

2.1. piemērs. EV netukšu kopu skaitam kā funkcijai no elementu skaita ir

$$\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n!} = e^x - 1,$$

jo katram $n > 0$ atbilst viena kopa, ja ir doti kopas elementi, piemēram, skaitļi no 1 līdz n.

Atradīsim EV n elementu kopas sadalījumu skaitam divu netukšu apakškopu virknē (pārī). Saskaņā ar augstāk aprakstīto novērojumu šī eksponenciālā veidotājfunkcija ir vienāda ar

$$(e^x - 1)^2 = \sum_{n\geq 2} (2^n - 2) \frac{x^n}{n!}.$$

Šo rezultātu var pārbaudīt arī neatkarīgi - n elementu kopas sadalījumu divu netukšu apakškopu virknē pilnīgi nosaka šī sadalījuma pirmais elements, kas ir īsta netukša apakškopa. Šādu apakškopu skaits ir $2^n - 2$ (visas n elementus lielas kopas apakškopas mīnus tukšā apakškopa un pati kopa).

Visu kopas sadalījumu netukšu apakškopu virknēs skaita eksponenciāla veidotājfunkcija ir

$$\sum_{k\geq 0}(e^x-1)^k = \frac{1}{1-(e^x-1)} = \frac{1}{2-e^x}.$$

2.2. piemērs. *Bella skaitļi.* Nodaļā par rekurentajām sakarībam mēs ieguvām rekurentu sakarību, kuru apmierina Bella skaitļi:

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k B_{n-k}$$

vai, nobīdot indeksu,

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} B_{n-k}.$$

Atradīsim EV, kas atbilst virknei B_n (apzīmējumu ērtības dēļ apzīmēsim to ar $B(x)$):

$$B(x) = \sum_{k\geq 0} \frac{B_k x^k}{k!}.$$

Atvasināsim $B(x)$ un atradīsim sakarību, kuru apmierina atvasinājums. Redzam, ka

$$B'(x) = \sum_{k\geq 1} \frac{B_k k x^{k-1}}{k!} = \sum_{k\geq 1} \frac{B_k x^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$\sum_{k\geq 1} (\sum_{i=1}^{k} C_{k-1}^{i-1} B_{k-i}) \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k\geq 1} \sum_{i=1}^{k} \frac{x^{i-1}}{(i-1)!} \frac{B_{k-i} x^{k-i}}{(k-i)!} =$$

$$\sum_{k-i\geq 0} \frac{B_{k-i} x^{k-i}}{(k-i)!} (\sum_{i-1\geq 0} \frac{x^{i-1}}{(i-1)!}) =$$

$$(\sum_{j\geq 0} \frac{x^j}{j!})(\sum_{m\geq 0} \frac{B_m x^m}{m!}) = e^x B(x).$$

Šajos pārveidojumos bija pareizi jāmaina summēšanas kārtība un jāizdara indeksu maiņa. Tātad $B(x)$ apmierina diferenciālvienādojumu

$$B'(x) = e^x B(x)$$

un, atrisinot šo pirmās kārtas diferenciālvienādojumu ar mainīgo atdalīšanas metodi, iegūstam, ka

$$B(x) = ce^{e^x}$$

ar konstanti c, ko atrod no sākuma nosacījumiem.

2.3. piemērs. *Otrā veida Stirlinga skaitļi* $S(n,k)$ - cik dažādos veidos var n elementu lielu kopu sadalīt k netukšās apakškopās. Atradīsim īsu pierakstu šo skaitļu virknes (ar fiksētu k) eksponenciālajai veidotājfunkcijai.

Agrāk tika pierādīta sakarību

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}C_k^i i^n.$$

Vienkāršosim veidotājfunkciju:

$$\sum_{n\geq 0}\frac{S(n,k)x^n}{n!}=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}C_k^i i^n\frac{x^n}{n!}=$$

$$\frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{k}C_k^i(-1)^{k-i}\sum_{n\geq 0}\frac{(ix)^n}{n!}=\frac{1}{k!}\sum_{i=1}^{k}C_k^i(-1)^{k-i}e^{ix}=\frac{1}{k!}(e^x-1)^k.$$

Vēl viena lietderīga eksponenciālo veidotājfunkciju īpašība ir saistīta ar to atvasināšanu. Ievērosim, ka

$$A'_{exp}(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{a_n n x^{n-1}}{n!}=\sum_{n\geq 1}\frac{a_n x^{n-1}}{(n-1)!}.$$

2.4. piemērs. Atrisināsim Fibonači virknes uzdevumu ar eksponenciālajām veidotājfunkcijām. Fibonači virknes definējošā rekurentā sakarība

$$f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$$

eksponenciālo funkciju terminos ir ekvivalenta diferenciālvienādojumam

$$F''_{exp}(x) = F'_{exp}(x) + F_{exp}(x),$$

kura vispārīgais atrisinājums ir

$$F_{exp}(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}, \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Fiksējot sākuma nosacījumus, atradīsim konstantes C_1 un C_2 un eksponenciālās veidotājfunkcijas koeficientus.

3. 10.mājasdarbs

3.1. Obligātie uzdevumi

10.1 Atrodiet veidotājfunkciju virknei $\{a_n\}$, ja a_n apmierina rekurentu sakarību

$$a_n = u_1 a_{n-1} + u_2 a_{n-2} + u_3 a_{n-3} + v,$$

kur u_1, u_2, u_3, v ir fiksēti parametri.

10.2 Izsakiet doto virkņu EV elementāro funkciju veidā:

(a) $a_n = 2$,
(b) $a_n = 1 - (-1)^n$,
(c) $a_n = 5^{\frac{n}{2}}$.

3.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

10.4 Pierādīt, ka $\sum_{n\geq 0}(C_{2n}^{n})^2 x^n$ un $\sum_{n\geq 0}\frac{(3n)!}{(n!)^3}x^n$ nav algebriskas veidotājfunkcijas.