DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Maģistra studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Diskrētā matemātika

1.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2007./2008.studiju gads

Saturs

1. Diskrētā matemātika un tās apakšnozares

1.1. Definīcija

Diskrētā matemātika (galīgā matemātika, finite mathematics) ir matemātikas apakšnozare, kas pēta matemātiskus objektus, kas pēc savas dabas ir diskrēti. Diskrētajā matemātikā nav nepieciešami tādi jēdzieni kā robeža un nepārtrauktība.

Diskrētajā matemātikā pētāmo objektu piemēri:

- veselie skaitļi,
- kopas (dažādu objektu sakopojumi),
- grafi,
- diskrēti ģeometriski objekti,
- formālās valodas.

Diskrētā matemātika ir mūsdienu datorzinātnes un datortehnikas matemātiskā bāze, jo datoros informācija tiek fiksēta un apstrādāta diskrētā veidā. Pats nozares nosaukums ir radies 50.-60.gados datorzinību studiju programmu attīstības rezultātā. Daļa no diskrētās matemātikas faktu masīva ir radusies datortehnikas un datorprogrammēšanas attīstības rezultātā.

Klasiskā(nepārtrauktā) matemātika visbiežāk nodarbojas ar "gludiem", nepārtrauktiem objektiem, piemēram, reāliem skaitļim, ğeometriskām figūrām un nepārtrauktām funkcijām.

Nepārtrauktā un diskrētā matemātika savā starpā ir saistītas. Piemēram, nepārtrauktas funkcijas maksimumu kopa var būt diskrēta.

1.2. Diskrētās matemātikas apakšnozares

Mūsdienās diskrētā matemātika sastāv no šādām apakšnozarēm:

- loģika (mācība par pareizu secinājumu veikšanu),
- kopu, attēlojumu un attiecību teorija,
- veselo skaitļu teorijas daļa,
- kombinatorika (pārskaitošā kombinatorika, dizainu teorija),
- grafu teorija,
- algoritmu teorija (mācība par algoritmiem jeb aprēķinu metodēm),
- informācijas teorija,
- diskrētā ģeometrija,
- aprēķināmības un kompleksitātes teorija (mācība par skaitļošanas un algoritmu teorētiskajiem un praktiskajiem ierobežojumiem),
- diskrētā varbūtību teorija.

Diskrētās matemātikas nodaļas, kas tiks apskatītas šajā kursā:

- kopu teorija,
- kopu attēlojumi un funkcijas,
- attiecības,
- matemātiskā loģika un tās pielietojumi;
- kombinatorika,
- grafu teorija.

2. Kopu teorijas pamati

2.1. Pamatdefinīcijas

Kopa ir aksiomātisks jēdziens, to definē aprakstoši vai ar aksiomu sistēmām.

Kopa ir jebkuras dabas dažādu objektu (kopas elementu) kopums, kas tiek uzskatīts par vienotu veselu.

Kopai un tās elementiem piemīt šādas raksturīgas īpašības:

- visi kopas elementi tiek uzskatīti par dažādiem;
- starp kopas elementiem nav uzdota nekāda struktūra (kārtība, hierarhija, sakarība u.c.).

Multikopa ir jebkuras dabas (iespējams, ar atkārtojumiem) elementu kopums, kas tiek uzskatīts par vienotu veselu. Ja kāds elements multikopā atkārtojas n reizes, tad saka, ka šī elementa *multiplicitāte (kārta)* dotajā multikopā ir vienāda ar n.

Ja objekts a tiek uzskatīts par kopas A elementu, tad saka, ka a pieder kopai A vai, ka A satur elementu a ($a \in A$). Ja objekts a netiek uzskatīts par kopas A elementu, tad saka, ka a nepieder kopai A ($a \notin A$).

Kopu, kas nesatur nevienu elementu, sauc par *tukšu kopu* (apzīmē ar simbolu $\emptyset$).

Ja kopa A satur galīgu skaitu elementu, tad to sauc par *galīgu kopu*un tās elementu skaitu apzīmē ar $|A|$, pretējā gadījumā kopu sauc par *bezgalīgu kopu*.

Bieži, strādājot ar ar noteiktas dabas elementu kopām, ir lietderīgi fiksēt arī visu iespējamo šīs dabas elementu kopu - *universu*, universs var mainīties atkarībā no situācijas un vajadzības.

2.1. piemērs. Kopu piemēri: visu naturālu skaitļu kopa , visu naturālu skaitļu kopa, kas ir mazāki nekā 10, visu alfabētu burtu kopa, visu plaknes punktu kopa, visu plaknes punktu kopa, kas pieder dotajai plaknes figūrai, visu dotās pilsētas iedzīvotāju kopa, u.t.t.

2.2. piemērs. Multikopu piemēri:visu cilvēku vārdu multikopa (dažiem cilvēkiem ir kopīgi vārdi, tāpēc tie atkārtojas), visu kāda vielas daudzuma atomu multikopa (makroskopisks priekšmets sastāv no dažu ķīmisko elementu atomiem, kas atkārtojas "neskaitāmas" reizes).

2.2. Kopu uzdošanas veidi

2.2.1. Elementu pārskaitīšana

Kopas var uzdot aprakstot (pārskaitot) visus kopas elementus saraksta veidā (šī metode visbiežāk tiek izmantota ja kopas elementu skaits ir mazs), šajā gadījumā kopas elementus apvieno ar figūriekavām; piemēram, pieraksts

$$A = \{a, b, c\}$$

uzdod kopu A, kas satur 3 elementus a, b, c.

Gadījumā, ja kopa ir bezgalīga, lieto šādu pierakstu:

$$A = \{a_\alpha\}_{\alpha \in I},$$

kur α ir indekss, ar kura starpniecību tiek pārskaitīti kopas elementi, un I ir šī indeksa vērtību kopa.

2.2.2. Definējošā īpašība vai algoritms

Kopas var uzdot aprakstot kopas elementus raksturojošo īpašību (*definējošo predikātu*) vai algoritmisku procedūru izmantojot matemātiskas vai citas dabas terminus.

Vsbiežāk raksturojošo īpašību ieslēdz figūriekavās, kurās ir atdaloša vertikāla svītra, pa kreisi no šīs svītras tiek uzdots universs, pa labi no atdalošās svītras tiek uzdota īpašība, kas piemīt uzdodamās kopas elementiem; piemēram, pieraksts $A = \{n \in \mathbb{N} | n > 10\}$ uzdod naturālo skaitļu kopas apakškopu, kas satur visus naturālus skaitļus, kas ir lielāki nekā 10.

Definējošie predikāti var būt arī pretrunīgi, piemēram, "bārddziņa paradokss" u.c.

2.2.3. Operāciju rezultāts

Kopu var uzdot iegūstot to no jau iepriekš uzdotām kopām veicot ar tām noteiktas darbības (operācijas).

2.2.4. Datortehnoloģijas

Datoru atmiņā kopas parasti uzdod masīvu - skaitļu, simbolu, vārdu veidā.

Ja ar kopām ir jāstrādā kā ar datiem programmēšanā, tad tās var definēt šādos 2 veidos:

- programmu, kas atpazīst universā dotās kopas elementus;
- ar programmu, kas ģenerē visus dotās kopas elementus.

2.2.5. Kopu vizualizācija

Populāra kopu vizualizācijas metode - *Eilera-Venna diagrammas*. Kopas tiek attēlotas kā plaknes apgabali. Šī metode var tikt pielietota, ja kopu skaits nav pārāk liels (2-4 kopas) un speciālgadījumos.

2.3. Kopu vienādība, apakškopas

2.3.1. Kopu vienādība

Divas kopas A un B sauc par vienādām ($A = B$), ja izpildās šāds noteikums: ja $a \in A$, tad $a \in B$ un, ja $b \in B$, tad $b \in A$. Citiem vārdiem sakot, kopas A un B nav atšķiramas viena no otras kā elementu kopumi.

Tukša kopa nav vienāda ne ar kādu netukšu kopu.

Ja eksistē vismaz viens $c \in A$, tāds, ka $c \notin B$ vai vismaz viens $d \in B$, tāds, ka $d \notin A$, tad saka, ka kopas A un B nav vienādas ($A \neq B$).

2.3.2. Apakškopas

Saka, ka kopa A ir kopas B *apakškopa* ($A \subseteq B$), ja izpildās šāds noteikums: ja $a \in A$, tad $a \in B$. Šādā gadījumā B ir A *aptverošā kopa*.

Tukša kopa ir jebkuras kopas (arī tukšas kopas) apakškopa.

Ja $A \subseteq B$ un $A \neq B$, tad saka, ka A ir *īsta* B apakškopa ($A \subset B$).

Apakškopas bieži vien uzdod *bitu vektoru* veidā: ja ir dota galīga aptverošā kopa vai universs $U = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, tad apakškopu A uzdosim kā bināru virkni ar garumu n, kurā elements ar numuru i ir 1, ja $a_i \in A$ un 0, ja $a_i \notin A$.

2.3. piemērs. Ja aptverošā kopa ir $\{a, b, c, d, e, f\}$, tad apakškopai $\{b, c, f\}$ atbilst bitu vektors 011001.

2.1. teorēma. Apakškopu īpašības:

- Jebkura kopa A ir apakškopa attiecībā uz sevi: $A \subseteq A$ (apakškopu iekļaušanas refleksīvā īpašība);
- Ja $A \subseteq B$ un $B \subseteq C$, tad $A \subseteq C$, jo jebkurš kopas A elements ir arī kopas C elements (tranzitīvā īpašība);
- Ja $A \subseteq B$ un $B \subseteq A$, tad $A = B$ saskaņā ar kopu vienādības definīciju (antisimetrijas īpašība, šo īpašību parasti izmanto, lai pierādītu divu kopu vienādību);
- Jebkura kopa ir apakškopa tai atbilstošajā universā.

Ja ir dota kopa A un tās apakškopu kopa $S = \{A_1, ..., A_n\}$, tad n (dažādu) elementu kopu $\{a_1, ..., a_n\}$, kur $a_i \in A_i$ sauksim par S *dažādu pārstāvju sistēmu*.

Ja dota kopa A, tad šīs kopas visu apakškopu kopu apzīmē pierakstu $\mathcal{P}(A)$ un sauc par šīs kopas *būleānu* (par godu britu matemātiķim Būlam (Boole) vai *pakāpes kopu*).

2.4. piemērs. Fiksēsim kopu $A = \{a, b, c\}$ un pārskaitīsim visas šīs kopas apakškopas. Viegli redzēt, ka kopai A ir 8 apakškopas:

- tukšā kopa $\emptyset$,
- trīs kopas, katra no kurām satur vienu elementu:
$$\{a\}, \{b\}, \{c\},$$
- trīs kopas, katra no kurām satur divus elementus:
$$\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\},$$
- pati kopa $A = \{a, b, c\}$.

2.4. Operācijas ar kopām

Pieņemsim, ka visas kopas ir definētas kādā kopīgā universā U.

2.4.1. Papildinājums

Par kopas A *papildinājumu* sauc kopu

$$A' = \overline{A} = \{u \in U | u \notin A\}.$$

Par kopas papildinājumu ir jādomā kā par kopu, kas paliek pāri, ja no universa "izmet ārā" visus kopas elementus.

2.5. piemērs. Ja A ir visu pāra skaitļu kopa un $U = \mathbb{Z}$, tad $\overline{A}$ ir visu nepāra skaitļu kopa.

2.4.2. Apvienojums

Par divu kopu A un B *apvienojumu* sauc kopu

$$A \cup B = \{u \in U | u \in A \text{ vai } u \in B\}.$$

Vispārinājums: ja ir dota kopu kopa $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$, tad par šīs kopas elementu apvienojumu sauc kopu

$$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha = \{u \in U | u \in A_\beta \text{ vismaz vienam } \beta \in I\}.$$

Par kopu apvienojumu ir jādomā kā par visu šo kopu elementu apvienošanu vienā kopā ignorējot atkārtojumus, kas var rasties, ja kopām ir kopīgi elementi.

2.4.3. Šķēlums

Par divu kopu A un B *šķēlumu* sauc kopu

$$A \cap B = \{u \in U | u \in A \text{ un } u \in B\}.$$

Vispārinājums: ja ir dota kopu kopa $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$, tad par šīs kopas elementu šķēlumu sauc kopu

$$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha = \{u \in U | u \in A_\beta \text{ katram } \beta \in I\}.$$

Par kopu šķēlumu ir jādomā kā par šo kopu kopējo daļu.

Ja $A \cap B = \emptyset$, tad saka, ka kopas A un B ir atdalītas, jeb šķirtas.

2.4.4. Starpība

Par divu kopu A un B *starpību* sauc kopu

$$A \setminus B = \{u \in U | u \in A \text{ un } u \notin B\}.$$

Par divu kopu A un B starpību ir jādomā kā par kopu, kas paliek pāri, ja no A "izmet ārā" visus elementus, kas pieder B.

Ievērosim, ka kopas papildinājums ir kopu starpības speciālgadījums:

$$\overline{A} = U \setminus A.$$

Ievērosim arī vienādību $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

2.4.5. Simetriskā starpība

Par divu kopu A un B *simetrisko starpību* sauc kopu

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

2.4.6. Kopu operāciju īpašības

2.2. teorēma. (kopu operāciju īpašības)
Jebkurām kopām (ieskaitot tukšas kopas) un ir spēkā vienādības

1. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ - *šķēluma un apvienojuma komutativitātes likumi*;
2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, - *šķēluma un apvienojuma asociativitātes likumi*;
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ - *distributivitātes likumi*;
4. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ - *dualitātes (De Morgāna) likumi;*
5. $\overline{\overline{A}} = A$ - *papildinājuma involūcijas likums*;
6. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$ - *šķēluma un apvienojuma idempotences likumi*;
7. $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$, $A = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$ - *sašķelšanas likumi*;

8. $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$ - *absorpcijas likumi*;
9. $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup U = U$, $A \cap U = A$ - *dominēšanas likumi*.

2.4.7. Faktorizācija

Ja ir dota kopa A un tās apakškopu kopa $A_I = \{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$, tāda, ka

$$\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha = A,$$

tad kopu A_I sauc par kopas A *pārklājumu*.

Ja papildus vēl izpildās nosacījums, ka jebkuru divu kopas A_I elementu šķēlums ir tukša kopa (kā kopas A apakškopa), tad saka, ka A_I ir kopas A *sadalījums* un kopas A_I elementi ir *sadalījuma klases*.

Pāreju no A uz A_I sauc par kopas A *faktorizāciju* attiecībā uz doto apakškopu sistēmu A_I. Kopu A_I sauc arī par *faktorkopu*.

Faktorizācija ir svarīga kopu teorijas operācija, kas ļauj pāriet no kopas uz šīs kopas daļu kopu, kuru elementiem piemīt kopīgas īpašības.

Strādājot ar faktorkopām ir lietderīgi sadalījuma klašu vietā strādāt ar šo klašu elementiem - *klašu pārstāvjiem*: lai aprakstītu faktorkopu, ir pietiekami atrast vienu elementu katrā sadalījuma klasē.

2.6. piemērs. Pāra skaitļu kopa un nepāru skaitļu kopa veido visu veselu skaitļu kopas sadalījumu, šajā gadījumā faktorkopa satur divus elementus, kurus var identificēt ar skaitļiem 0 un 1 - atlikumiem, kurus iegūst, dalot ar 2 naturālus skaitļus.

2.4.8. Tiešais jeb Dekarta reizinājums

Par *sakārtotu pāri* sauc kopu, kas satur divus elementus un kurā ir definēta kārtība: tiek norādīts, kurš no diviem elementiem ir pirmais, un kurš - otrais, apzīmējumi (a, b) vai $[a, b]$.

Par n elementus garu *virkni* (n-virkni) sauc kopu, kas satur n elementus un kurā katram elementam ir piešķirts kārtas numurs (no 1 līdz n), apzīmējumi $(a_1, a_2, ..., a_n)$ vai $[a_1, a_2, ..., a_n]$.

Par *bezgalīgu virkni* sauc bezgalīgu kopu, kurā katram elementam ir piešķirts kārtas numurs(naturāls skaitlis).

Par divu kopu A un B *tiešo* vai *Dekarta reizinājumu* sauc kopu $A \times B$, kuras elementi ir visi sakārtoti elementu pāri, kuros pirmais elements pieder kopai A, bet otrais elements pieder kopai B:

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A \text{ un } b \in B\}.$$

Ja ir dota (galīga vai bezgalīga) kopu saime $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ tad par šo kopu tiešo vai Dekarta reizinājumu $\prod_{\alpha\in I} A_\alpha$ sauc kopu, kuras elementi ir visas sakārtotas virknes, kurās elements ar kārtas numuru i pieder kopai A_i:

$$\prod_{\alpha\in I} A_\alpha = \{(a_1, a_2, ...)|a_\beta \in A_\beta \text{ katram } \beta\ \}.$$

Kopas, kas piedalās tiešajā reizinājumā, sauc par tā reizinātājiem.

Ja tiešajā reizinājumā visi reizinātāji ir vienādi ($A_i = A$ katram i), tad tiešo reizinājumu sauc par A pakāpi (apzīmē ar A^n). Definējam arī $A = A^1$.

Ja vismaz no reizinātājiem ir tukša kopa, tad reizinājums ir tukša kopa.

2.7. piemērs. Ja $A = \mathbb{R}$ (skaitļu taisne), tad $A^2 = \mathbb{R}^2$ var identificēt ar plakni šādā veidā: definēsim plaknē Dekarta koordinātes, katram plaknes punktam Dekarta koordinātes (sakārtots skaitļu pāris) ir viennozīmīgi noteiktas, un otrādi, katrs sakārtots skaitļu pāris viennozīmīgi nosaka punktu dotajā Dekarta koordinātu sistēmā.

Pēdējais piemērs rāda, ka par divu kopu A un B tiešo reizinājumu $A \times B$ ir lietderīgi domāt kā par tabulu, kurā

- rindas tiek indeksētas ar pirmās kopas A elementiem,
- kolonnas tiek indeksētas ar otrās kopas B elementiem,
- tabulas rūtiņai, kuras rindai atbilst elements $a \in A$ un kuras kolonnai atbilst elements $b \in B$, atbilst tiešā reizinājuma elements (a, b).

2.5. Kopu vienādības pierādīšana

Kopu vienādības pierādīšana - svarīgs uzdevums, kas matemātiķiem ir bieži jārisina dažādos grūtības līmeņos. Kopu vienādību var pierādīt vai atspēkot izmantojot zemāk aprakstītās metodes.

2.5.1. Apakškopu iekļaušanas antisimetrijas īpašības izmantošana

Izmantojam šādu īpašību: ja $A \subseteq B$ un $B \subseteq A$, tad $A = B$.

2.8. piemērs. Veselo skaitļu kongruences klases mod m vienādība pēc divām definīcijām.

2.5.2. Kopu operāciju īpašību izmantošana

Ja ir doti divi kopu operāciju pielietošanas rezultāti $f(A_1, ..., A_n)$ un $g(A_1, ..., A_n)$, tad vienādību $f = g$ var mēģināt pierādīt vai atspēkot pārveidojot vienu vai abas puses saskaņā ar kopu operāciju īpašībām.

2.9. piemērs. $A\backslash(B\backslash C) = (A\backslash B) \cup (A \cap C)$.

2.5.3. Incidences tabulu vai elementāršķēlumu izmantošana

2.10. piemērs. Ja ir dota viena kopa A, tad

$$U = A \cap \overline{A}.$$

Ja ir dotas divas kopas A un B, tad

$$U = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}).$$

Apzīmēsim $A^1 = A$, $A^0 = \overline{A}$.

Ja ir dotas vairākas kopas $A_1, ..., A_n$, tad to kopīgais universs ir vienāds ar visu *elementāršķēlumu*

$$A_1^{\epsilon_1} \cap A_2^{\epsilon_2} \cap ... \cap A_n^{\epsilon_n}$$

apvienojumu. Ievērosim, ka divu dažādu elementāršķēlumu šķēlums ir tukša kopa.

Ja $a \in f(A_1, ..., A_n)$ un $a \in E$, kur E ir elementāršķēlums, tad katram $b \in E$ izpildās $e \in f(A_1, ..., A_n)$.

Lai noteiktu vai divas kopas $f(A_1, ..., A_n)$ un $g(A_1, ..., A_n)$ ir vienādas, var rīkoties saskaņā ar šādu algoritmu:

1. Uzzīmēt tabulu, kuras rindas tiek indeksētas ar elementāršķēlumiem un kolonnas - ar pētāmajām kopām.
2. Rūtiņā, kas atbilst elementāršķēlumam E un kopai f, ierakstīt 1, ja $E \subseteq f$ un 0 - ja $E \not\subseteq F$.
3. Salīdzināt rūtiņu vērtības pa rindām.

2.11. piemērs. Pierādīt distributīvo likumu.

2.5.4. Eilera diagrammu izmantošana

Nelielam kopu skaitam to operāciju rezultātus var vizualizēt izmantojot Eilera diagrammas un pierādīt, ka pētāmajām kopām atbilst vienādi apgabali.

2.6. Kopu teorijas aksiomas

Izvēles Aksioma: ja kopa A satur savstarpēji šķirtas netukšas kopas, tad eksistē kopas A dažādu pārstāvju kopa X.

Cermelo-Frenkeļa (ZF) aksiomu sistēma:

1. divas kopas ar vieniem un tiem pašiem elementiem ir vienādas (vienādības aksioma);
2. divām kopā a un b nesakārtots pāris a, b arī it kopa (pāra aksioma);
3. ja ir dota kopa A un īpašība $P(x)$, kur x ir brīvs arguments, tad eksistē kopa B, kuras elementi pieder A un apmierina īpašību P: (specifikācijas jeb apakškopas aksioma);
4. kopas elementu apvienojums ir kopa (apvienojuma aksioma);
5. kopas visu apakškopu kopa eksistē (pakāpes kopas aksioma);
6. tukšā kopa eksistē (tukšās kopas aksioma);
7. katra netukša kopa A satur elementu (veidojošu elementu), kas nepieder nekādam citam A elementam (veidošanas aksioma);

8. ja ir definēta funkcija, kuras definīcijas apgabals ir A, tad funkcijas vērtību apgabals arī ir kopa (aizvietošanas aksioma);
9. eksistē bezgalīgas kopas (bezgalības aksioma).

3. 1.mājasdarbs

3.1. Obligātie mājasdarbi

1.1 Interpretējiet kopu operācijas (papildinājumu, apvienojumu, šķēlumu, starpību, simetrisko starpību) izmantojot bitu vektorus. Citiem vārdiem sakot, aprakstiet kopu operācijas rezultāta bitu vektoru, ja ir zināmi sākotnējo kopu bitu vektori.

1.2 Pierādīt kopu vienādības:

a) $A \backslash (A \backslash B) = A \cap B$,
b) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$.

1.3 Atrisināt vienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} A \backslash X = B \\ A \cup X = C, \end{cases}$$

attiecībā uz X, ja $B \subseteq A \subseteq C$.