DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

ALGEBRISKĀS STRUKTŪRAS

6.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2013./2014.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt grupu darbības teorijas pamatus.

Lekcijas kopsavilkums:

- var definēt kopu pārveidojumus, ko var identificēt ar grupas "darbību" kopās.

Svarīgākie jēdzieni: grupas reprezentācija, grupas darbība, tranzitīva, brīva, efektīva, regulāra, primitīva darbība, orbīta, invarianta kopa, stabilizators.

Svarīgākie fakti un metodes: orbītas elementu stabilizatoru īpašība, orbītu un stabilizatoru blakusklašu kopu vienlielums, Burnside lemma.

1. Grupu darbība kopās

1.1. Pamatfakti

X - kopa, $\Sigma(X) = (\mathcal{B}ij(X), \circ)$ - X permutāciju grupa a kompozīcija operāciju.

G - grupa. Par G *reprezentāciju* grupā $\Sigma(X)$ sauc grupu homomorfismu $\Phi : G \to \Sigma(X)$, $g \to \Phi(g) = \Phi_g$.

Vienkāršākās sekas:

- $\Phi_e = \mathrm{id}_X$,
- $\Phi_{gh} = \Phi_g \circ \Phi_h$, funkciju terminos - $\Phi_{gh}(x) = \Phi_g(\Phi_h(x))$.

$\Phi_g(x)$ apzīmē ar $g(x)$, $g \cdot x$ vai gx.

Ir definēta (G-darbība kopā X no kreisās puses) funkcija

$$G \times X \to X,\ (g, x) \to \Phi_g(x) = g \cdot x,$$

ar šādām īpašībām:

1. $\forall\, x \in X,\, ex = x$,
2. $\forall\, x \in X,\, \forall\, g, h \in G,\, (gh)x = g(hx)$.

X sauc par G-kopu.

1.1. piezīme. G-darbība kopā X definē G-darbību kopā X^n, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ pēc šāda likuma:

$$g(x_1, x_2, ..., x_n) = (gx_1, gx_2, ..., gx_n).$$

1.2. piezīme. G-darbība kopā X definē G-darbību kopā $\mathcal{P}(X)$ (visu X apakškopu kopā pēc šāda likuma:

$$S \subseteq X \implies g \cdot S = \{gs \big| s \in S\}$$

1.3. piezīme. G-darbība kopā X definē G-darbību kopā $\mathcal{F}un(X, Y)$ pēc šāda likuma:

$$(g \cdot f)(x) = f(g^{-1}x).$$

1.1. piemērs.

1. triviālā darbība: $\forall\ x \in X, \forall\ g \in G,\ g \cdot x = x$,
2. G-darbība uz G ar kreiso reizināšanu: $g \cdot h = gh$,
3. G-darbība uz G ar konjugāciju: $g \cdot h = ghg^{-1}$,
4. Σ_X darbība uz X,
5. ğeometriskas figūras rotāciju (citu pārveidojumu) grupas darbība uz figūras,
6. $GL(n, k)$ darbība uz lineārās telpas k^n (ar matricu reizināšanu).

1.2. Grupas darbības speciālgadījumi

Tranzitīva darbība

G-darbība ir *tranzitīva*, ja $\forall\ x, y \in G\ \ \exists\ g \in G$: $gx = y$.

k-tranzitīva darbība

G-darbība ir *k-tranzitīva*, ja

1. $|X| \geq k$

2. $\forall\, Y = \{y_1, ..., y_k\} \subseteq X, |Y| = k$ un $\forall\, Z = \{z_1, ..., z_k\} \subseteq X, |Z| = k\ \exists\ \ g \in G$: $gy_i = z_i, \forall\, i$.

Efektīva darbība

$Ker(\Phi)$ - G darbības *kodols*. $Ker(\Phi) = \{e\} \iff G$ darbojas *efektīvi*.

Brīva darbība

G-darbība ir *brīva*, ja $\exists\, x \in X : \ g \cdot x = x \implies g = e$.

Regulāra (sharply transitive) darbība

G-darbība ir regulāra, ja tā ir transitīva un brīva: $\forall\ x, y \in X$ $\exists\,!\ g \in G$: $gx = y$.

Primitīva darbība

G-darbība ir primitīva, ja tā nesaglabā nekādu G sadalījumu.

Dots X sadalījums apakškopās: $X = X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_n$. G-darbība saglabā šo sadalījumu, ja $\forall\ g \in G, \forall\ X_i\ , g \cdot X_i = X_j$.

1.3. Orbītas un invariantās kopas

Dota G-kopa X, $x \in X$. Kopu $Gx = \{gx \big| g \in G\}$ sauc par x *G-orbītu.* G-orbītu kopu apzīmē X/G, to sauc par dotās G-darbības faktorkopu.

$X = \bigcup_{x \in X} Gx$, $Gx \cap Gy \neq \varnothing \implies Gx = Gy \implies$ G-orbītas veido X sadalījumu.

1.4. piezīme. G-darbība ir tranzitīva $\implies$ ir viena G-orbīta.

$Y \subseteq X$. Y sauc par *G-invariantu kopu*, ja $G \cdot Y = Y$. Ja $G = \{g\}$, tad g sauc par G-darbības *fiksēto punktu.*

1.2. piemērs. $\forall$ orbīta ir invarianta kopa.

1.4. Stabilizatori

Dota G-kopa X, $x \in X$.
$X^g = \{x \in X \big| gx = x\}$.

G apakškopu $St(x) = \{g \in G \big| gx = x\}$ sauc par *x-stabilizatoru (x-stabilizējošo apakšgrupu).*

1.1. teorēma. G-grupa, X - G-kopa, $x \in X$. Tad $St(x) \leq G$.

PIERĀDĪJUMS $\begin{cases} gx = x \\ hx = x \end{cases} \Longrightarrow (gh)(x) = g(hx) = x.$

$ex = x$. $gx = x \Longrightarrow g^{-1}x = x$
$\Longrightarrow St(x) \leq G$. ■

1.5. Īpašības

1.2. teorēma. G-grupa, X - G-kopa. $x_1 \in X$ un $x_2 \in X$ pieder vienai G-orbītai.

Tad

$$\exists\, g \in G: \ St(x_2) = g \cdot St(x_1) \cdot g^{-1}.$$

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka $gx_1 = x_2$.

$h \in St(x_1) \implies ghg^{-1}x_2 = x_2 \implies g \cdot St(x_1) \cdot g^{-1} \subseteq St(x_2)$.

$h' \in St(x_2) \implies g^{-1}h'gx_1 = x_1 \implies g^{-1}h'g = h'' \in St(x_1)$
$\implies h' = gh''g^{-1} \in g \cdot St(x_1) \cdot g^{-1} \implies St(x_2) \subseteq g \cdot St(x_1) \cdot g^{-1}$
$\implies St(x_2) = g \cdot St(x_1) \cdot g^{-1}$ ■

1.3. teorēma. G-grupa, X - G-kopa, $x \in X$.
Tad

1. $\exists$ bijektīva funkcija $f : G/St(x) \to Gx$;
2. $|G| \leq \infty$, $|X| \leq \infty \implies |Gx| = \dfrac{|G|}{|St(x)|}$;
3. $|G| \leq \infty$, $|X| \leq \infty \implies |X| = \sum\limits_{a \in X/G} [G : St(a)]$;

PIERĀDĪJUMS
1. Definēsim $\varphi : G \to X$, $\varphi(g) = gx$
$\implies Im(\varphi) = Gx$.

Pieņemsim, ka $y \in Im(\varphi) \implies \exists\, g_0 \in G : \; g_0x = y$.

$\varphi^{-1}(y) = \{g \in G | gx = y\}$, $gx = g_0x \implies g_0^{-1}g = h \in St(x)$ $\implies g = hg_0 \implies \varphi^{-1}(y) = G/St(x)$.

$\implies$ ir korekti definēta bijektīva funkcija $f : G/St(x) \to Gx$.

2. Seko no 1. un Lagranža teorēmas.

3. G-orbītas veido X sadalījumu $X_1, ..., X_n$, izvēlēsimies $a_i \in X_i$. $|X| = \sum_{i=1}^{n} |Ga_i|$ un $|Ga_i| = \dfrac{|G|}{|St(a_i)|} = [G : St(a_i)]$. ■

1.4. teorēma. (Burnside lemma) G-grupa, X - G-kopa.
Tad

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$

PIERĀDĪJUMS Apskatam kopu $G \times X$ divos veidos: pa rindām un pa kolonnām, skaitīsim tādus pārus (g, x), ka $gx = x$:

$$\sum_{g \in G} |X^g| = \sum_{x \in X} |St(x)| = \sum_{x \in X} \frac{|G|}{|Gx|} = |G| \cdot \sum_{x \in X} \frac{1}{|Gx|}$$

Summēšanu pa X var sadalīt pa orbītām:

$$|G|\sum_{\omega\in X/G}\left(\sum_{t\in\omega}\frac{1}{|\omega|}\right)=|G|\cdot\sum_{\omega\in X/G}1=|G|\cdot|X/G|.\ \blacksquare$$

1.5. teorēma. G - galīga grupa, X - galīga G-kopa, kurā G-darbība ir 2-tranzitīva.

Tad

$$\sum_{g\in G}|X^g|^2=2|G|.$$

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka $X=\{1,2,...,n\}$. Apzīmēsim $X_i=X\setminus\{i\}$. Apzīmēsim elementa i stabilizatora apakšgrupu ar G_i.

Apskatīsim G-darbību uz kopas X_1. G-darbība ir 2-tranzitīva $\Longrightarrow$ G_1-darbība ir tranzitīva uz X_1 - $\forall$ kopa $\{1,x\}$ tiek sūtīta uz $\forall$ kopu $\{1,y\}$ $\Longrightarrow$ ir 2 G_1-orbītas: $\{1\}$ un X_1.

No Burnside lemmas seko $2=\dfrac{1}{|G_1|}\sum_{g\in G_1}|X^g|\ \Longrightarrow\ \sum_{g\in G_1}|X^g|=2|G_1|$.

$\forall\ i,\ \sum_{g \in G_i} |X^g| = 2|G_i| = 2|G_1|$ - stabilizatori ir konjugēti, tāpēc $|G_i| = |G_1|$.

$G \cdot 1 = X \implies |G \cdot 1| = n \implies n = \dfrac{|G|}{|G_1|} \implies$
$\sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{g \in G_i} |X^g| \Big) = 2n|G_1| = 2|G|.$

$\forall\ g \in G$ fiksē $|X^g|$ elementus $\implies$ tas pieder $|X^g|$ stabilizatoriem $G_i \implies$ tā fiksētie punkti tiek skaitīti $|X^g|$ reizes ar svaru $|X^g| \implies$

$$\sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{g \in G_i} |X^g| \Big) = \sum_{g \in G} |X^g|^2 = 2n|G_1| = 2|G|. \blacksquare$$

2. 6.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

6.1 $X = \{1, ..., 6\}$, Σ_6 darbojas uz X kā funkcijas. Atrast visas orbītas grupai $G = \langle g \rangle$.

(a) $g = (2, 3)(4, 5, 6)$;
(b) $g = (1, 2)(3, 4)(5, 6)$.

6.2 G - komutatīva grupa, X - G-kopa. Dots, ka $\exists\ g \in G, x_0 \in X$: $gx_0 = x_0$. Pierādīt, ka $\forall\ x \in Gx_0$ izpildās $gx = x$.

6.3 G - grupa. Apskatīsim G kā G-kopu, kur G darbojas ar konjugāciju: $(g, x) \to gxg^{-1}$. Aprakstīt G elementu stabilizatorus attiecībā uz šo darbību (tos sauc arī par *centralizatoriem*).

6.4 Atrast x centralizatoru elementu grupā G.

(a) $G = \Sigma_4$, $x = (1, 2, 3, 4)$.
(b) $G = \Sigma_4$, $x = (1, 2)(3, 4)$.

6.5 Apskatīsim G no uzdevuma 4.6. Atrast G orbītas attiecībā uz grupas darbību ar konjugāciju.

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

6.6 Pierādīt, ka katrai grupai ar vismaz 3 elementiem ir vismaz viens neidentisks automorfisms.