DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Algebriskās struktūras

5.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2012./2013.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt svarīgos grupu tiešo reizinājumu.

Lekcijas kopsavilkums:

- var definēt operāciju ar grupām - *tiešo* un pētīt tā īpašības.

Svarīgākie jēdzieni: ārējais tiešais reizinājums, iekšējais tiešais reizinājums, nedalāma grupa.

Svarīgākie fakti un metodes: ārējā tiešā reizinājuma īpašības, iekšējā tiešā reizinājuma īpašības.

1. Grupu tiešais reizinājums

Grupu reizinājumi ir operācijas ar grupām - grupu virknei noteiktā veidā tiek piekārtota grupa. Grupu reizinājumus var pētīt divos veidos:

- *ārējie reizinājumi* - no vienkāršākām grupām tiek konstruētas sarežģītākas (analoģija - vektoru telpas paplašināšana ar jaunām dimensijām),
- *iekšējie reizinājumi* - grupa tiek sadalīta vienkāršākās sastāvdaļās (analoģija - vektori tiek izteikti kā bāzes vektoru summas).

1.1. Ārējais tiešais reizinājums

G, H - grupas. Par G un H *(ārējo) tiešo reizinājumu* sauc grupoīdu $(G \times H, *)$, kur operācija $*$ tiek uzdota šādi:

$$(g, h) * (g', h') = (gg', hh').$$

Grupas īpašība

1.1. teorēma. $(G \times H, *)$ ir grupa.

PIERĀDĪJUMS

Asociativitāte

$\forall\ g, g', g'' \in G$ un $h, h', h'' \in H$ izpildās

$$\Big((g,h)(g',h')\Big)(g'',h'') = (gg', hh')(g'',h'') =$$
$$\Big((gg')g'', (hh')h''\Big) = \Big(g(g'g''), h(h'h'')\Big) = (g,h)\Big((g',h')(g'',h'')\Big).$$

Vienības elements

Visiem $g \in G$, $h \in H$ izpildās

$(g,h)(e,e) = (ge, he) = (eg, eh) = (g,h) \implies (e,e)$ ir vienības elements.

Inversais elements

Visiem $g \in G$, $h \in H$ izpildās

$$(g,h)(g^{-1},h^{-1}) = (gg^{-1},hh^{-1}) = (e,e) \Longrightarrow$$

$$\forall\ (g,h) \in G \times H\ \exists\ (g,h)^{-1} = (g^{-1},h^{-1}).\ \blacksquare$$

1.1. piezīme. G un H ir komutatīvas $\Longrightarrow$ $G \times H$ ir komutatīva.

Ja G un H ir galīgas, tad $G \times H$ ir galīga un $|G \times H| = |G| \cdot |H|$.

$G \times H \simeq H \times G$, izomorfisms $f : G \times H \to H \times G$ var tikt definēts šādi:

$$f\Big((g,h)\Big) = (h,g).$$

Vairāk kā 2 reizinātāji

Tiešo reizinājumu var vispārināt uz patvaļīgas galīgas grupu kopas gadījumu: ja ir dotas n grupas $G_1, ..., G_n$, tad par to tiešo reizinājumu sauc kopu $G_1 \times ... \times G_n$ ar šādu operāciju:

$$(a_1, ..., a_n)(a'_1, ..., a'_n) = (a_1 a'_1, ..., a_n a'_n).$$

1.1. piemērs. Vektoru kopas: $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$.
Taisnstūra rotācijas. Atlikumi.

1.2. piezīme. Aditīvajā pierakstā (ja visas grupas G_i ir komutatīvas) izmanto apzīmējumu $G_1 \oplus G_2 \oplus ... \oplus G_n$.

Bāzes apakšgrupas

Ja $G = N \times M$, tad definēsim

$$\widetilde{N} = \{x \in G | x = (n, e), \text{ kur } n \in N\},$$

$$\widetilde{M} = \{x \in G | x = (e, m), \text{ kur } m \in M\}.$$

1.2. teorēma.

1. $\widetilde{N} \trianglelefteq G$, $\widetilde{M} \trianglelefteq G$
2. $\forall\ g \in G$ ir izsakāms formā

$$g = \tilde{n}\tilde{m} = \tilde{m}\tilde{n},\ \text{kur } \tilde{n} \in \widetilde{N}, \tilde{m} \in \widetilde{M}$$

$(G = \widetilde{N}\widetilde{M} = \widetilde{M}\widetilde{N})$.

PIERĀDĪJUMS

1.
$(n', m')^{-1}(n, e)(n', m') = (n'^{-1}nn', m'^{-1}em') = (\underbrace{n'^{-1}nn'}_{\in N}, e) \in \widetilde{N}$.

2. $(n, m) = (n, e)(e, m) \in \widetilde{N}\widetilde{M}$. ■

1.3. piezīme. Teorēmu var vispārināt uz vairāk nekā divu grupu tiešo reizinājumu.

1.2. Iekšējais tiešais reizinājums

1.3. teorēma. Ja grupa G satur 2 normālas apakšgrupas N_1, N_2 un $\forall\ g \in G$ ir viennozīmīgi izsakāms formā

$$g = g_1 g_2,\ \text{kur } g_i \in N_i,$$

tad

$$G \simeq N_1 \times N_2.$$

PIERĀDĪJUMS Definēsim funkciju

$$f : N_1 \times N_2 \to G,$$

$$f(a_1, a_2) = a_1 a_2.$$

Pierādīsim, ka f ir grupu izomorfisms.

Sirjektivitāte

$\forall g \in G$ ir uzrakstāms formā

$$g = g_1 g_2,\ \text{kur } g_i \in N_i \implies g = f(g_1, g_2).$$

Injektivitāte

$f(a_1, a_2) = f(b_1, b_2) \implies a_1 a_2 = b_1 b_2$.

$\forall$ G elements ir viennozīmīgi izsakāms reizinājuma formā $\implies$

$$a_i = b_i, \forall i.$$

Homomorfisms

No sākuma pierādīsim, ka $N_1 \cap N_2 = \{e\}$.

$N_i \cap N_j \ni a \implies a$ var divos dažādos veidos uzrakstīt kā reizinājumu:

$$ea = ae \implies a = e.$$

No viena mājasdarba uzdevuma seko, ka

$$\begin{cases} a_1 \in N_1 \\ a_2 \in N_2 \end{cases} \implies a_1 a_2 = a_2 a_1.$$

Tagad redzam, ka

$$f\Big((a_1,a_2)(b_1,b_2)\Big) = f\Big((a_1b_1,a_2b_2)\Big) =$$

$$a_1b_1a_2b_2 = a_1a_2b_1b_2 = f\Big((a_1,a_2)\Big)f\Big((b_1,b_2)\Big).\blacksquare$$

1.4. teorēma.

$$\begin{cases} N, M \trianglelefteq G \\ N \cap M = \{e\} \\ G = NM \end{cases} \Longrightarrow G \simeq N \times M.$$

PIERĀDĪJUMS Jāpierāda, ka $\forall g \in G$ ir viennozīmīgi izsakāms formā $g = nm$, kur $n \in N$, $m \in M$. Tad apgalvojums sekos no iepriekšējās teorēmas.

Pieņemsim, ka

$$g = nm = n'm', \text{ kur } \{n,n'\} \subseteq N, \{m,m'\} \subseteq M \Longrightarrow$$

$$\underbrace{n'^{-1}n}_{\in N} = \underbrace{m'm^{-1}}_{\in M} = e \implies \begin{cases} n = n' \\ m = m' \end{cases} \implies$$ g ir izsakāms viennozīmīgi reizinājuma veidā. ■

1.4. piezīme. Iepriekšējās teorēmas terminos G ir apakšgrupu N un M *iekšējais tiešais reizinājums* - $G = N \times M$.

1.5. piezīme. Grupu sauc par *nedalāmu*, ja tā nav izsakāma kā netriviāls iekšējais tiešais reizinājums:

$$G = N \times M \iff N = \{e\} \text{ vai } M = \{e\}.$$

1.5. teorēma. $G = N \times N'$ (iekšējais reizinājums) $\implies G\big/N \simeq N'$.

PIERĀDĪJUMS Definēsim $\varphi : G\big/N \to N'$:

$$\varphi(N(aa')) = a', \text{ kur } a \in N, a' \in N'.$$

Pierādīsim, ka φ ir grupu izomorfisms.

Homomorfisms

$$\varphi\Big((Naa')(Nbb')\Big) = \varphi\Big(N(aba'b')\Big) = a'b' = \varphi\Big(Naa'\Big)\varphi\Big(Nbb'\Big).$$

Sirjektivitāte

$\forall\ a' \in N' :\ a' = \varphi\Big(N(ea')\Big).$

Injektivitāte

$\varphi\Big(N(aa')\Big) = \varphi\Big(N(bb')\Big) \implies a' = b' \implies Na' = Nb' \implies N(aa') = N(bb').$ ■

2. 5.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

5.1 Atrodiet visas apakšgrupas šādām aditīvajām grupām:
- (a) $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$;
- (b) $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/3$;
- (c) $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$.

5.2 Izsakiet grupu $\mathbb{Z}_{12}$ kā netriviālu iekšējo tiešo reizinājumu.

5.3 G, G' - galīgas cikliskas grupas. Pierādīt, ka $G \times G'$ ir cikliska grupa $\iff$ $LKD(|G|, |G'|) = 1$. Atrodiet $G \times G'$ minimālu ģenerējošu kopu.

5.4 Pierādiet, ka dotās grupas ir nedalāmas:
- (a) Σ_3;
- (b) $\mathbb{Z}$.

5.5 G ir grupa no uzdevuma 4.4, kurā reālo skaitļu lauks tiek aizvietots ar lauku $\mathbb{F}_2$. Vai G ir izsakāma kā tiešais reizinājums. Pozitīvas atbildes gadījumā atrodiet atbilstošās apakšgrupas.

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

5.6 Atrast piemēru grupu homomorfismam $\varphi : G \to H$, kur G ir nedalāma grupa, bet H - dalāma grupa, $Ker(\varphi) \neq G$.

5.7 Izpētīt attiecībā uz dalāmību šādas grupas:

(a) $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$;

(b) $GL(n, k)$, $SL(n, k)$;

(c) Σ_n, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.