

DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

ALGEBRISKĀS STRUKTŪRAS

2.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2012./2013.studiju gads

Saturs

1. Grupu teorijas pamati	5
1.1. Ievads	5
1.1.1. Motivācija	5
1.1.2. Definīcijas	7
1.1.3. Veidotājsistēmas	9
1.1.4. Grupas grafs	10
1.1.5. Pamatīpašības	10
1.2. Klasiskie piemēri	12
1.2.1. Pārveidojumu, permutāciju grupas	13
1.2.2. Skaitļu aditīvās grupas	14
1.2.3. Skaitļu multiplikatīvās grupas	15
1.2.4. Vektoru grupas	15
1.2.5. Matricu aditīvās grupas	16
1.2.6. Matricu multiplikatīvās grupas	16
1.2.7. Cikliskās grupas	17
1.2.8. Klasiskie pielietojumi	18
1.3. Apakšgrupas	19

1.3.1. Definīcija	19
1.3.2. Klasiskas apakšgrupas	20
2. 2.mājasdarbs	22
2.1. Obligātie uzdevumi	22
2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi	23

Lekcijas mērķis:

- apgūt grupu teorijas pamatjēdzienus.

Lekcijas kopsavilkums:

- grupas gadījumā var konkretizēt un attīstīt agrāk apskatītos vispārīgās algebras jēdzienus.
- bieži izmantotās matemātiskās struktūrās var saskatīt grupas.

Svarīgākie jēdzieni: grupa, komutatīva grupa, grupas elementa kārtā, apakškopas slēgums grupā, grupas grafs, ģeometrisko pārveidojumu grupa, permutāciju grupa, matricu aditīvās un multiplikatīvās

grupas, cikliskā grupa, apakšgrupa, cikliskā apakšgrupa, centrs, komutatoru apakšgrupa.

Svarīgākie fakti un metodes: grupas pamatīpašības.

1. Grupu teorijas pamati

1.1. Ievads

1.1.1. Motivācija

Risinot matemātikas uzdevumus, bieži parādās invertējami pārveidojumi, piemēram,

- invertējamās aritmētiskas operācijas tādas kā saskaitīšana,
- lineāru vienādojumu sistēmu elementārie pārveidojumi,
- ģeometriskie pārveidojumi,
- simetrijas pārveidojumi,
- bijektīvas funkcijas u.c.

ar dabiski definētu bināru operāciju (ģeometrisko pārveidojumu vai funkciju kompozīcija u.c.).

Parasti eksistē arī neitrālais elements (pārveidojums, kas neko nemaina, rotācija par 0, vienības funkcija u.c.).

Sākotnējās pārveidojumu kopas dabiski ir slēgt attiecībā uz operāciju (pievienot visas iespējamās kompozīcijas) un pievienot inversos elementus - tiek iegūta kopa, kas ir slēgta attiecībā uz operāciju un invertēšanu. Šādas slēgtas pārveidojumu kopas - *grupas*, ir ērtāk pētīt.

Vēsturiski grupas jēdziens sākotnēji tika izdalīts veicot pētījumus

- veselo skaitļu teorijā (L.Eilers, K.Gauss, grupas $(\mathbb{Z}/m, +)$),
- algebrisko vienādojumu teorijā (N.Ābels, E.Galuā, permutāciju grupas) un
- ģeometrijā (F.Kleins, ģeometrisko pārveidojumu grupas).

1.1.2. Definīcijas

Grupa ir kopa G ar šādu algebrisku struktūru:

- dota asociatīva bināra operācija:

$$(a, b) \mapsto ab,$$

- \exists vienības elements e , kas $\forall g \in G$ apmierina nosacījumu

$$ge = eg = g,$$

- $\forall g \in G \exists$ inversais elements g^{-1} :

$$gg^{-1} = g^{-1}g = e.$$

Grupu G sauc par *komutatīvu grupu* vai *Ābela grupu*, ja operācija ir komutatīva: $\forall a, b \in G$ izpildās vienādība

$$ab = ba.$$

Vispārīgos gadījumos grupu teorijā parasti izmanto multiplikatīvo pierakstu. Tādējādi par grupas operāciju var domāt kā par nekomutatīvu reizināšanu.

Ja grupa ir acīmredzami komutatīva (piemēram, $(\mathbb{Z}, +)$), tad biežāk tiek izmantots aditīvais pieraksts. Izņēmums - skaitļu reizināšana.

Ja $|G| < \infty$, tad G sauc par *galīgu grupu*, pretējā gadījumā grupa ir *bezgalīga*.

Ja $\exists n \in \mathbb{N} : g^n = e$, tad g sauc par *elementu ar galīgu kārtu*, pretējā gadījumā - par *elementu ar bezgalīgu kārtu*.

Ja g ir elements ar galīgu kārtu, tad mazāko $m \in \mathbb{N}$, kuram $g^m = e$, sauc par g *kārtu*.

$A \in G, B \in G, x \in G$. Definēsim

$$AB = \{g \in G | g = ab, \text{ kur } a \in A, b \in B\},$$

$$Ax = \{g | g = ax, \text{ kur } a \in A\},$$

$$xA = \{g | g = xa, \text{ kur } a \in A\},$$

$$A^{-1} = \{g \in G | g = a^{-1}, \text{ kur } a \in A\}.$$

1.1.3. Veidotājsistēmas

Grupās gadījumā var konkretizēt apakškopas slēguma operāciju, veidotājsistēmas jēdzienu. Grupu teorijā X slēgumu apzīmē kā $\langle X \rangle$.

$\langle X \rangle$ elementi ir vārdi formā

$$x_1^{\epsilon_1} \dots x_n^{\epsilon_n}, \text{ kur } x_i \in X, \epsilon_i \in \mathbb{Z}.$$

1.1. piemērs. $(\mathbb{Z}, +)$, $X = \{1\}$, $\langle X \rangle = \mathbb{Z}$.

$$Y = \{2\}, \langle Y \rangle = 2\mathbb{Z}.$$

$$G = (\mathbb{Z}, +), X = \{a, b\}. \langle X \rangle = \langle LKD(a, b) \rangle.$$

1.2. piemērs. G ir veidotājsistēma attiecībā uz G .

$(\mathbb{Z}, +)$. $\{1, -1\}$ nav minimāla veidotājsistēma, bet $\{1\}$ ir minimāla veidotājsistēma.

1.1.4. Grupas grafs

Ja ir dota grupas veidotājsistēma, tad grupas struktūru var vizualizēt ar *Kēli grafa* (*grupas grafa*) palīdzību:

- virsotnes - grupas elementi,
- orientētas šķautnes ar indeksiem (krāsām) - reizināšana ar veidotājsistēmas elementiem.

1.3. piemērs. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}/m, +)$.

1.1.5. Pamatīpašības

1.1. teorēma. Jebkurā grupā izpildās šādas vienādības:

1. $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.
2. $ac = bc \implies a = b$.
3. $ca = cb \implies a = b$.
4. $(a^{-1})^{-1} = a$.

5. Vienādojumi $ax = b$ un $xa = b$ ir viennozīmīgi atrisināmi atiecībā uz $x \forall a, b$.
6. Vienības elements ir noteikts viennozīmīgi.
7. Katram elementam inversais elements ir noteikts viennozīmīgi.

PIERĀDĪJUMS 1. Redzam, ka

$$(ab)(b^{-1}a^{-1}) = abb^{-1}a^{-1} = aa^{-1} = e.$$

2. Reizināsim $ac = bc$ abas puses ar c^{-1} no labās puses:

$$(ac)c^{-1} = (bc)c^{-1} \implies$$

$$a(cc^{-1}) = b(cc^{-1}) \implies$$

$$a = b.$$

3. Reizināsim $ca = cb$ abas puses ar c^{-1} no kreisās puses:

$$c^{-1}(ca) = c^{-1}(cb) \implies$$

$$(c^{-1}c)a = (c^{-1}c)b \implies$$

$$a = b.$$

$$4. aa^{-1} = a^{-1}a = e \implies a = (a^{-1})^{-1}.$$

5. Reizināsim $ax = b$ abas puses ar a^{-1} no kreisās puses:

$$a^{-1}(ax) = a^{-1}b \implies$$

$$(a^{-1}a)x = a^{-1}b \implies$$

$$x = a^{-1}b.$$

Reizināsim $xa = b$ abas puses ar a^{-1} no labās puses:

$$(xa)a^{-1} = ba^{-1} \implies$$

$$x(aa^{-1}) = ba^{-1} \implies$$

$$x = ba^{-1}.$$

6., 7. seko no iepriekšējās lekcijas teorēmas. ■

1.2. Klasiskie piemēri

Grupas ir visuresošas - tā ir visizplatītākā un visvairāk pētītā algebriskā struktūra.

1.2.1. Pārveidojumu, permutāciju grupas

Permutāciju grupa

Kopas X permutāciju (bijektīvu funkciju $X \rightarrow X$) kopa ar funkciju kompozīcijas operāciju - (Σ_X, \circ) . Ja $X = \{1, 2, \dots, n\}$, tad apzīmēsim Σ_X ar Σ_n .

- vienības elements - vienības funkcija id_X , visi X elementi fiksēti,
- elementa inversais elements - inversā permutācija.

Ģeometrisku figūru pārveidojumu grupas

Ģeometrisku figūru pārveidojumu (pašsaglabājošu rotāciju, u.c.) kopas ar pārveidojumu kompozīcijas operāciju.

- vienības elements - vienības pārveidojums, visi punkti fiksēti,
- elementa inversais elements - inversais (pretējais) pārveidojums.

Bieži ģeometrisko figūru pārveidojumu grupas var interpretēt kā permutāciju grupas, jo pietiek apskatīt dažu izdalītu figūru punktu

vai apakškopu pārveidojumus, piemēram, virsotnes, šķautņu viduspunktus, šķautnes u.c.

1.4. piemērs. Taisne ar centru, taisnstūris, trijstūri (neregulārs, vienādsānu, regulārs). Rubika kuba grupa.

Diskrētu struktūru simetriju grupas

Grafs $\Gamma = (V, E)$ - struktūra, kas satur virsotnes V un šķautnes E .

Grafa automorfisms - bijektīva funkcija $f : V \rightarrow V$ ar šādu īpašību:
 $v - w \iff f(v) - f(w)$ (pilnīgi saglabā grafa struktūru).

Grafa automorfismu kopa ar funkciju kompozīcijas operāciju ir grupa.

1.2.2. Skaitļu aditīvās grupas

$(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}/m, +)$. Citas skaitļu kopas ar saskaitīšanas operāciju. Tiek izmantots aditīvais pieraksts.

- vienības elements - 0,
- elementa a inversais elements - $-a$.

1.2.3. Skaitļu multiplikatīvās grupas

$(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$, (\mathcal{U}_m, \times) . Citas skaitļu kopas formā $k \setminus \{0\}$, kur k - lauks, ar reizināšanas operāciju. Tiek izmantots multiplikatīvais pieraksts.

- vienības elements - 1,
- elementa a inversais elements - a^{-1} .

1.5. piemērs. *Riņķa grupa* $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ar reizināšanas operāciju.

1.2.4. Vektoru grupas

Vektori ar vektoru saskaitīšanas operāciju. Lineāras telpas elementi ar saskaitīšanas operāciju. Tiek izmantots aditīvais pieraksts.

- vienības elements - nulles vektors vai elements $\vec{0}$,
- elementa \vec{a} inversais elements - $-\vec{a}$.

1.2.5. Matricu aditīvās grupas

$n \times m$ -matricas ar elementiem gredzenā R ar matricu saskaitīšanas operāciju - $Mat(n, m, R)$. Tiek izmantots aditīvais pieraksts.

- vienības elements - nulles matrica \mathbf{O} ,
- elementa \mathbf{M} inversais elements - $-\mathbf{M}$.

1.2.6. Matricu multiplikatīvās grupas

Invertējamas $n \times n$ -matricas ar elementiem laukā k ar matricu reizināšanas operāciju - $GL(n, k)$ (*vispārējā lineārā grupa, general linear group*). Tiek izmantots multiplikatīvais pieraksts.

Matrica $\mathbf{A} \in Mat(n, n, k)$ ir invertējama $\iff \det(\mathbf{A}) \neq 0$.

- $\det(\mathbf{A}) \neq 0, \det(\mathbf{B}) \neq 0 \implies \det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}) \neq 0$.

- vienības elements - vienības matrica \mathbf{E}_n ,
- elementa \mathbf{A} inversais elements - inversā matrica \mathbf{A}^{-1} .

Invertējamas $n \times n$ -matricas ar koeficientiem laukā k , kuru determinants ir vienāds ar 1, ar matricu reizināšanas operāciju - $SL(n, k)$ (*speciālā lineārā grupa, special linear group*). Determinanta multiplikatīvā īpašība nodrošina grupas aksiomu izpildi:

- $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B}) = 1 \implies \det(\mathbf{AB}) = 1$.
- $\det(\mathbf{A}) = 1 \implies \det(\mathbf{A}^{-1}) = 1$.
- $\det(\mathbf{E}_n) = 1$.

1.2.7. Cikliskās grupas

Grupu G sauc par *ciklisku grupu*, ja $\exists g \in G$ (*grupas ģenerators*):
 $\forall a \in G \exists n \in \mathbb{Z} : a = g^n$. Šādā gadījumā $G = \langle g \rangle$.

1.6. piemērs. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Z}/m, +)$, $G = \langle 1 \rangle$.
 (\mathcal{U}_p, \times) , $\mathcal{U}_p = \langle g \rangle$, kur g - primitīvā sakne.

1.2.8. Klasiskie pielietojumi

Grupu teoriju izmanto

- gredzenu un lauku teorijā (gredzenā ir uzdota komutatīvas grupas struktūra, raksturo skaitļu, atlikumu un no tiem atvasinātu gredzenu struktūru),
- Eiklīda ģeometrijā (kā simetrijas mēru, ģeometrisko transformāciju grupas),
- topoloģisko telpu teorijā (homotopiju grupas, homoloģiju/kohomoloģiju grupas, raksturo "mezglotu" telpu struktūru)
- diferenciālvienādojumu teorijā (diferenciālo operāciju simetriju grupas u.c.),
- fizikā (daudz pielietojumu, dažādu struktūru simetriju grupas),
- ķīmijā (kristālu, molekulu, ķīmisko reakciju grafu simetriju grupas u.c.)
- mūzikā (kvintu cikliskā grupa, dažādu muzikālu struktūru simetriju grupas).

1.3. Apakšgrupas

1.3.1. Definīcija

G - grupa, $H \subseteq G$. H sauc par *apakšgrupu* ($H \leq G$), ja

- $h_1, h_2 \in H \implies h_1 h_2 \in H$ (H ir slēgta attiecībā uz bināro operāciju),
- $h \in H \implies h^{-1} \in H$ (H ir slēgta attiecībā uz inverso elementu aprēķināšanu),
- $e \in H$.

Par apakšgrupu H ir jādodomā kā par "mazāku" grupu, kas atrodas "lielākā" grupā G .

1.7. piemērs. $\forall G \exists$ divas *neīstas* apakšgrupas: $\{e\}$ un G .

$$2\mathbb{Z} \leq \mathbb{Z} \leq \mathbb{Q} \leq \mathbb{R} \leq \mathbb{C}.$$

1.3.2. Klasiskas apakšgrupas

Cikliskās apakšgrupas

$\forall a \in G$ apakšgrupu $\langle a \rangle = \{g \mid g = a^n\}$ sauc par *ciklisku apakšgrupu* ar ģeneratoru a .

Centrs

Definēsim *centru* $Z(G) = \{g \mid gx = xg, \forall x \in G\}$. Var pierādīt, ka $Z(G) \leq G$.

Komutatoru apakšgrupa

Kā "mērīt" novirzi no komutativitātes?

- Elementi ab un ba var būt dažādi.
- Var pieņemt par nekomutativitātes mēru elementu

$$(ab)(ba)^{-1} = aba^{-1}b^{-1} = [a, b],$$

to sauc par a un b komutatoru. Citiem vārdiem sakot, $[a, b]$ ir "koriģējošais reizinātājs", lai mainītu vietām a un b :

$$ab = [a, b]ba.$$

- Apzīmēsim visu komutatoru kopu ar C .
- Definēsim komutatoru apakšgrupu $G' = \langle C \rangle$.

1.8. piemērs. G - komutatīva grupa $\implies G' = \{e\}$, $Z(G) = G$.

2. 2.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

2.1 X - kopa, $P(X)$ - X apakškopu kopa. Pierādīt, ka $(P(X), \Delta)$ ir komutatīva grupa (Δ - kopu simetriskās starpības operācija). Atrast vienības elementu un katra elementa inverso elementu.

2.2 Grupā $G \forall g \in G$ izpildās nosacījums $g^2 = e$. Pierādīt, ka G ir komutatīva grupa.

2.3 G ir taisnstūra (ne kvadrāta) rotāciju grupai.

(a) Aizpildīt G operācijas tabulu.

(b) Atrast vismaz vienu G minimālu veidotājsistēmu \mathcal{V} .

(c) Uzzīmēt G Kēli grafu attiecībā uz \mathcal{V} .

2.4 Definēsim grupas elementu a, b komutatoru $[a, b]$ ar vienādību

$$[a, b] = aba^{-1}b^{-1}.$$

Pierādīt, ka

(a) $[a, b]^{-1} = [b, a]$,

$$(b) [ab, c] = a[b, c]a^{-1}[a, c].$$

2.5 G - grupa. Pierādīt, ka $Z(G) \leq G$.

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

2.6 G - galīga grupa, $S \subseteq G$. Izpildās šāda īpašība: $a, b \in S \implies ab \in S$. Pierādīt, ka $S \leq G$.

2.7 Atrast minimālas veidotājsistēmas grupām (Σ_n, \circ) , $\forall n$.