

DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Algebriskās struktūras

7.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2010./2011.studiju gads

Saturs

1. Gredzeni	4
1.1. Pamatdefinīcijas	4
1.2. Klasiskie gredzeni	7
1.2.1. Skaitļu gredzeni	7
1.2.2. Matricu gredzeni	8
1.2.3. Funkciju gredzeni	8
1.3. Gredzenu homomorfismi	9
1.4. Apakšgredzeni	11
1.5. Ideāli	12
1.5.1. Pamatfakti	12
1.5.2. Ideālu veidotājelementi	15
1.6. Faktorgredzeni	16
1.7. Gredzenu izomorfismu teorēmas	19
1.8. Gredzenu tiešā summa	21
1.8.1. Ārējā tiešā summa	22
1.8.2. Iekšējā tiešā summa	23
1.9. Kīniešu atlikumu teorēma gredzenos	25

2. 7.mājasdarbs	27
2.1. Obligātie uzdevumi	27

Lekcijas mērķis:

- atkārtot gredzenu teorijas pamatus.

Lekcijas kopsavilkums:

- var pētīt algebrisku struktūru - gredzenus, kas vispārina skaitļu kopu un operāciju īpašības.

Svarīgākie jēdzieni: gredzens, integrāls gredzens, lauks, matricu gredzeni, funkciju gredzeni, gredzenu homomorfismi un izomorfismi, kategorija **Ring**, homomorfisma attēls un kodols, apakšgredzens, ideāli, ideālu veidotājelementi, kongruences klase mod I , faktorgredzens R/I , maksimāli un vienkārši ideāli, gredzenu ārējā un iekšējā tiešā summa.

Svarīgākie fakti un metodes: maksimālu un vienkāršu ideālu īpašības, gredzenu izomorfismu teorēmas, \mathbb{K} AT gredzenos.

1. Gredzeni

1.1. Pamatdefinīcijas

Par *gredzenu* sauc kopu R , kurā ir uzdotas divas bināras operācijas

$$(x, y) \mapsto x + y \text{ (aditīvā operācija, saskaitīšana),}$$

$$(x, y) \mapsto xy \text{ (multiplikatīvā operācija, reizināšana),}$$

kas apmierina šādas īpašības:

- attiecībā uz operāciju $+$ R ir komutatīva grupa:
 - asociativitāte: $(a + b) + c = a + (b + c)$,
 - eksistē neitrālais elements $0: \forall a$ izpildās $a + 0 = 0 + a$,
 - katram a inversais elements $-a: a + (-a) = (-a) + a = 0$,
 - komutativitāte: $a + b = b + a$,
- operācija \cdot ir asociatīva: $(ab)c = a(bc)$,
- ir spēkā kreisā un labā distributīvās īpašības: $a(b + c) = ab + ac$, $(a + b)c = ac + bc$.

Gredzenus apzīmēsim ar pierakstu $(R, +, \cdot)$.

$+$ operācijai izmanto aditīvo pierakstu, \cdot operācijai - multiplikatīvo pierakstu.

Citas definīcijas un fakti, kas zināmi no iepriekšējiem kursiem:

- gredzenu sauc par komutatīvu, ja operācija \cdot ir komutatīva: visiem $a, b \in R$ izpildās $ab = ba$;
- gredzenu sauc par *gredzenu ar vieninieku* (*unitāru gredzenu*), ja eksistē neitrālais elements 1 attiecībā uz reizināšanas operāciju;
- gredzena elementu sauksim par (multiplikatīvi) invertējamu, ja tam eksistē labais un kreisais inversais elements attiecībā uz reizināšanu; R invertējamo elementu kopu apzīmēs ar $\mathcal{U}(R)$, $(\mathcal{U}(R), \cdot)$;
- gredzenu sauc par *integrālu gredzenu*, ja tas ir komutatīvs un tajā nav nulles dalītāju: ja $ab = 0$, tad $a = 0$ vai $b = 0$;
- R ir integrāls gredzens $\iff ab = ac \wedge a \neq 0 \iff b = c$ (izpildās multiplikatīvās saīsināšanas īpašība);

- $a \in R$ sauc par *nilpotentu*, ja $a^k = 0$ kādam $k \in \mathbb{N}$;
- $a \in R$ sauc par *idempotentu*, ja $a^2 = a$;
- integrālu gredzenu sauc par *lauku*, ja visi nenulles elementi ir invertējami.

1.1. teorēma. R ir galīgs unitārs integrāls gredzens $\implies R$ ir lauks.

PIERĀDĪJUMS Jāpierāda, ka $\forall a \in R, a \neq 0, \exists b \in R$ tāds, ka

$$ab = 1.$$

Pieņemsim, ka a_1, \dots, a_n ir visi dažādie R nenulles elementi. Starp tiem ir arī 1.

Pierādīsim, ka patvaļīgam elementam $a_k \exists a_k^{-1}$. Apskatīsim elementus

$$a_k a_1, a_k a_2, \dots, a_k a_n.$$

Tie visi ir dažādi nenulles elementi, jo pretējā gadījumā būtu

$$a_k a_i = a_k a_j \implies a_i = a_j.$$

Tādējādi eksistē m tāds, ka $a_k a_m = 1$. ■

1.2. Klasiskie gredzeni

1.2.1. Skaitļu gredzeni

”Pats galvenais” gredzens - \mathbb{Z} (integrāls gredzens, bet ne lauks).

Kanoniskie skaitļu gredzeni - $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ (lauki).

Gausa skaitļu gredzens $\mathbb{Z}[i]$, Eizenšteina skaitļu gredzens $\mathbb{Z}[\zeta]$ (integrāli gredzeni, bet ne lauki).

Atlikumu klašu gredzeni mod m - \mathbb{Z}_m (komutatīvi gredzeni ar nulles dalītājiem, ja m nav pirmskaitlis).

Atlikumu klašu gredzeni mod p - \mathbb{F}_p - lauki).

1.2.2. Matricu gredzeni

Matricu gredzeni - $\mathcal{M}_n(R)$, kur R ir komutatīvs gredzens, operācijas - matricu saskaitīšana un reizināšana (nekomutatīvi gredzeni ar vieninieku, 0 - nulles matrica, 1 - vienības matrica).

1.2.3. Funkciju gredzeni

Fiksēsim kopu X un komutatīvu gredzenu R . Apzīmēsim ar $\mathcal{F}un(X, R)$ visu funkciju $X \rightarrow R$ kopu. Definēsim funkciju summu un reizinājumu:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Var pārbaudīt, ka $\mathcal{F}un(X, R)$ ar šādām operācijām veido gredzenu (komutatīvi gredzeni ar nulles dalītājiem).

Viens no svarīgākajiem modernās matemātikas sasniegumiem (1940.-1960.gadi) - jebkurš komutatīvs gredzens var tikt interpretēts kā nepārtrauktu funkciju gredzens virs kādas kopas (gredzena spektra).

Piemēram, \mathbb{Z} spektrs ir pirmskaitļu kopa (vienkāršotā interpretācijā) un katru veselu skaitli n var identificēt ar funkciju, kas katram pirmskaitlim p piekārto $ord_p(n)$. Viena no svarīgākajām neatrisinātajām problēmām mūsdienu matemātikā ir minētās atbilstības vispārināšana uz nekomutatīvo gredzenu gadījumu - *nekomutatīvās ģeometrijas problēma*.

1.1. piemērs. Kopas X pakāpju kopa $\mathcal{P}(X)$ ar operācijām Δ (simetriskā starpība) un \cap (šķēlums) (komutatīvi gredzeni ar nulles dalītājiem).

1.3. Gredzenu homomorfismi

Ja ir doti divi gredzeni $(R_1, +_{R_1}, *_{R_1})$ un $(R_2, +_{R_2}, *_{R_2})$, tad funkciju

$$f : R_1 \rightarrow R_2$$

sauc par *gredzenu homomorfismu*, ja tā saglabā gredzena operācijas:

$$\begin{aligned} f(x *_{R_1} y) &= f(x) *_{R_2} f(y), \\ f(x +_{R_1} y) &= f(x) +_{R_2} f(y). \end{aligned}$$

Gredzenu homomorfismu sauc par *gredzenu izomorfismu*, ja tas ir bijektīvs. Ja R_1 un R_2 ir izomorfi gredzeni, tad rakstīsim $R_1 \simeq R_2$.

Visi gredzeni un gredzenu homomorfismi veido *gredzenu kategoriju*
Ring.

Ja gredzeni ir izomorfi, tad var uzskatīt, ka tie atšķiras tikai ar elementu un operāciju apzīmējumiem - to operāciju tabulas ir vienādas ar precizitāti līdz elementu apzīmējumiem.

Par gredzenu homomorfisma $f : R_1 \rightarrow R_2$ *attēlu* sauc kopu

$$Im(f) = \{b \in R_2 | \exists a : b = f(a)\}.$$

Par gredzenu homomorfisma $f : R_1 \rightarrow R_2$ *kodolu* sauc kopu

$$Ker(f) = \{a \in R_1 | f(a) = 0_{R_2}\}.$$

1.2. piemērs. Gredzenu homomorfismu piemēri -

- jebkura gredzena vienības attēlojums,
- nulles attēlojums starp jebkuriem diviem gredzeniem,
- mazāka skaitļu gredzena iekļaušana lielākā,
- redukcija mod m .

1.4. Apakšgredzeni

Gredzena R apakškopu $S \subseteq R$ sauc par *apakšgredzenu* (apzīmē $S \leq R$), ja

- tā veido apakšgrupu attiecībā uz saskaitīšanu (aditīvu apakšgrupu):
 - ja $a \in S$ un $b \in S$, tad $a + b \in S$;
 - $0 \in S$;
 - ja $a \in S$, tad $-a \in S$,
- tā ir slēgta attiecībā uz reizināšanu: $a, b \in S \implies ab \in S$.

1.3. piemērs. $\mathbb{Z} \leq \mathbb{Q} \leq \mathbb{R} \leq \mathbb{C}$.

Nepārtrauktas un diferencējamas viena reāla argumenta funkciju kopas ir apakšgredzeni visu funkciju gredzenos.

1.2. teorēma. Jebkura gredzenu homomorfisma attēls ir apakšgredzens.

1.5. Ideāli

1.5.1. Pamatfakti

Dots gredzens R un tā apakškopa J . Definēsim

$$aJ = \{r \in R \mid r = ax, \text{ kur } x \in J\}$$

un

$$Ja = \{r \in R \mid r = xa, \text{ kur } x \in J\}.$$

Ja $A, B \subseteq R$, tad definēsim

$$AB = \{r \in R \mid r = \sum_{i=1}^m a_i b_i, \text{ kur } a_i \in A, b_i \in B\}.$$

Kopu $I \subseteq R$ sauksim par *kreiso (labo) ideālu*, ja

1. I ir apakšgrupa attiecībā uz $+$,
2. $RI \subseteq I$ ($IR \subseteq R$) vai, citiem vārdiem sakot, katram $r \in R$ izpildās $rI \subseteq I$ ($Ir \subseteq I$) (I ir slēgta attiecībā uz reizināšanu ar R elementiem).

Kopu I sauksim par *ideālu* vai *abpusēju ideālu*, ja tas ir gan kreisais, gan labais ideāls.

1.1. piezīme. Kreisie un labi ideāli var būt atšķirīgi tikai nekomutatīvos gredzenos, piemēram, matricu gredzenos.

Ja gredzens ir komutatīvs, tad lai kopa būtu ideāls, pietiek, lai tā būtu kreisais vai labais ideāls.

1.3. teorēma. R - gredzens, I - ideāls. $I \cap \mathcal{U}(R) \neq \emptyset \implies I = R$.

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka $u \in \mathcal{U}(R) \cap I$. I ir ideāls \implies

$$u^{-1} \cdot u = 1 \in I.$$

Katram $r \in R$ izpildās

$$r \cdot 1 = r \in RI,$$

tātad $R \subseteq I$. Bet $I \subseteq R$, tāpēc $R = I$. ■

1.4. piemērs. Katrā gredzenā R ir divi izdalīti ideāli - $\{0\}$ un R . Tos sauc par triviālajiem vai neīstajiem ideāliem.

Ja k ir lauks, tad katrs ideāls ir vai nu $\{0\}$ vai k .

Gredzenā \mathbb{Z} kopa $m\mathbb{Z}$ ir ideāls katram m .

Gredzenā $R[X]$ kopa $mR[X]$ ir ideāls katram $m \in R[X]$.

Ja $R = \mathcal{F}un(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, tad kopa $I_a = \{f \in R | f(a) = 0\}$ ir ideāls.

Katra gredzenu homomorfisma $f : R_1 \rightarrow R_2$ kodols ir ideāls.

1.5.2. Ideālu veidotājelementi

Patvaļīgam gredzenam R kopa aR ir ideāls $\forall a \in R$, apzīmē ar (a) . Tādus ideālus sauc par *galvenajiem ideāliem*.

Ja gredzenā R katrs ideāls ir galvenais, tad R sauc par *galveno ideālu gredzenu (GIG)*.

Patvaļīgam gredzenam R un fiksētiem elementiem $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ kopa

$$\{r \in R \mid r = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n, \text{ kur } x_i \in R\}$$

ir ideāls katrai kopai $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq R$, apzīmē ar (a_1, a_2, \dots, a_n) . Tādus ideālus sauc par *galīgi ģenerētiem ideāliem*, elementus a_1, \dots, a_n sauc par ideāla *ģeneratoriem*.

1.5. piemērs. Ideāls $(2, X) \in \mathbb{Z}[X]$ nav galvenais, to nevar izteikt formā (a) . Tā kā $2 \in (2, X)$, tad $a = \pm 2$, bet tad $X \notin (2, X)$.

1.2. piezīme. \mathbb{Z} ir GIG.

Katram laukam k polinomu gredzens $k[X]$ ir GIG.

1.6. Faktorgredzeni

Ja $I \subseteq R$ ir ideāls, tad teiksim, ka divi elementi r_1 un r_2 ir kongruenti mod I , ja

$$r_1 - r_2 \in I.$$

Apzīmēsim to ar $r_1 \equiv r_2 \pmod{I}$ vai $r_1 \sim r_2$.

Kongruence mod I ir ekvivalences attiecība gredzenā R .

Ekvivalences klases apzīmēsim veidā $a + I$ (vai $[a]$). Ekvivalences klašu kopu apzīmēsim ar R/I .

1.3. piezīme. $a \equiv b \pmod{I} \iff a + I = b + I$.

Ir definēta dabiskā projekcija

$$\begin{aligned}\pi : R &\rightarrow R/I, \\ \pi(a) &= a + I.\end{aligned}$$

Operācijas ar ekvivalences klasēm:

- Saskaitīšana - $(a + I) + (b + I) = (a + b) + I$.
- Reizināšana - $(a + I)(b + I) = ab + I$.

1.4. teorēma.

1. Ekvivalences klašu operācijas ir definētas korekti - nav atkarīgas no pārstāvju izvēles.
2. Ekvivalences klašu kopa R/I ar definētajām operācijām ir komutatīvs gredzens.
3. π ir gredzenu homomorfisms, $Ker(\pi) = I$.

PIERĀDĪJUMS

1. Ja $a_1 + I = a_2 + I$ un $b_1 + I = b_2 + I$, tad $a_1 = a_2 + u$ un $a_1 = a_2 + v$, kur $u, v \in I$. Tad

$$(a_1 + I) + (b_1 + I) = (a_1 + b_1) + I =$$

$$(a_2 + b_2) + (u + v + I) = (a_2 + b_2) + I,$$

$$(a_1 + I)(b_1 + I) = a_1b_1 + I = (a_2 + u)(b_2 + v) + I = a_2b_2 + (ub_2 + va_2 + uv + I) = a_2b_2 + I.$$

2. Aksiomu pārbaude. $0 = 0 + I$, $1 = 1 + I$, $-(a + I) = -a + I$.

3. Ja $a \in I$, tad $\pi(a) = I = 0 + I$, tātad $I \subseteq \text{Ker}(\pi)$. Ja $\pi(b) = 0 + I$, tad $b \sim 0$, tātad $b \in I$. Seko, ka $\text{Ker}(\pi) \subseteq I$ un $\text{Ker}(\pi) = I$. ■

Ekvivalences klašu gredzenu mod I apzīmē ar R/I .

1.6. piemērs. $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $R[X]/(m)$.

Ideālu $I \subseteq R$ sauc par *maksimālu*, ja neeksistē neviens ideāls $J \neq R$ tāds, ka $I \subset J$.

Ideālu $I \subseteq R$, kur R ir komutatīvs gredzens, sauc par *vienkāršu* (*prime*), ja $ab \in I \implies a \in I \vee b \in I$.

1.5. teorēma. Dots komutatīvs gredzens R .

1. I -maksimāls ideāls $\iff R/I$ -lauks.
2. I -vienkāršs ideāls $\iff R/I$ -integrāls gredzens.

1.7. Gredzenu izomorfismu teorēmas

1.6. teorēma. I ir ideāls gredzenā R . Dabiskā projekcija

$$\pi : R \rightarrow R/I$$

ir sirjektīvs gredzenu homomorfisms un $\text{Ker}(\pi) = I$.

PIERĀDĪJUMS

Sirjektivitāte Katrai klasei $a + I$ izpildās

$$a + I = \pi(a).$$

Homomorfisms $\pi(a+b) = a+b+I = (a+I)+(b+I) = \pi(a)+\pi(b)$.
 $\pi(ab) = ab + I = ab + aI + bI + I^2 = (a + I)(b + I)$.

Kodols $\pi(a) = a + I = 0 + I \iff a \in I$.



1.7. teorēma. (*Pirmā gredzenu izomorfismu teorēma*) Dots gredzenu homomorfisms $f : R \rightarrow S$, $\text{Ker}(f) = K$. Tad

$$R/K \simeq \text{Im}(f).$$

PIERĀDĪJUMS Definēsim funkciju

$$\varphi : R/K \rightarrow \text{Im}(f),$$

$$\varphi(a + K) = f(a)$$

un pierādīsim, ka φ ir korekti definēts gredzenu izomorfisms.

Korektums

$$\begin{aligned} a + K = a' + K &\implies a - a' \in K \implies f(a - a') = 0_R \implies \\ &f(a) = f(a') \implies \varphi(a + K) = \varphi(a' + K). \end{aligned}$$

Sirjektivitāte $\forall s \in \text{Im}(f) \exists r \in R : s = f(r) \implies s = \varphi(r + K)$.

Injektivitāte

$$\begin{aligned} \varphi(a + K) = \varphi(a' + K) &\implies f(a) = f(a') \implies \\ f(a) - f(a') = 0_R = f(a - a') &\implies \\ a - a' \in K &\implies a + K = a' + K. \end{aligned}$$

Homomorfisms

$$\begin{aligned} \varphi((a + K) + (b + K)) &= \varphi(a + b + K) = f(a + b) = \\ f(a) + f(b) &= \varphi(a + K) + \varphi(b + K). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi((a + K)(b + K)) &= \varphi(ab + K) = f(ab) = \\ f(a)f(b) &= \varphi(a + K)\varphi(b + K). \blacksquare \end{aligned}$$

1.8. Gredzenu tiešā summa

Sākot no šīs vietas uzskatīsim, ka visi gredzeni ir komutatīvi.

1.8.1. Ārējā tiešā summa

Ir doti gredzeni R_1 un R_2 . Par to tiešo summu sauc kopu $R_1 \times R_2$ ar šādām operācijām:

- saskaitīšana - ja $a, b \in R_1$, $a', b' \in R_2$, tad

$$(a, a') + (b, b') = (a + b, a' + b');$$

- reizināšana - ja $a, b \in R_1$, $a', b' \in R_2$, tad

$$(a, a') \cdot (b, b') = (ab, a'b').$$

Ārējo tiešo summu $(R_1 \times R_2, +, \cdot)$ apzīmē ar $R_1 \oplus R_2$.

Līdzīgi definē vairāk nekā divu gredzenu ārējo tiešo summu. Ja ir doti gredzeni R_1, \dots, R_n , tad par to tiešo summu sauc kopu $R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$ ar šādām operācijām:

- saskaitīšana - ja $a_i, b_i \in R_i$, tad

$$(a_1, \dots, a_n) + (b_1, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n);$$

- reizināšana - ja $a_i, b_i \in R_i$, tad

$$(a_1, \dots, a_n) \cdot (b_1, \dots, b_n) = (a_1 b_1, \dots, a_n b_n).$$

Šo konstrukciju var vispārināt arī uz bezgalīgas gredzenu kopas gadījumu.

1.8. teorēma.

1. $R_1 \oplus R_2$ ir gredzens.
2. Ja R_1, R_2 ir komutatīvi, tad $R_1 \oplus R_2$ arī ir komutatīvs.
3. Ja R_1, R_2 ir unitāri (ar multiplikatīvo neitrālo elementu), tad $R_1 \oplus R_2$ arī ir unitārs.

PIERADĪJUMS Aksiomu pārbaude. ■

1.8.2. Iekšējā tiešā summa

Ievērosim, ka

- ideāls ir apakšgredzens;
- $R = R_1 \oplus R_2 \implies I_1 = R_1 \oplus \{0\}$ un $I_2 = \{0\} \oplus R_2$ ir ideāli;
- $I_1 \cap I_2 = \{0\}$;
- $R = I_1 + I_2$, citiem vārdiem sakot $\forall (r_1, r_2) \in R$ izpildās vienādība

$$(r_1, r_2) = \underbrace{(r_1, 0)}_{\in I_1} + \underbrace{(0, r_2)}_{\in I_2}.$$

1.9. teorēma. Dots gredzens R un tā ideāli I_1, \dots, I_n , kas apmierina šādus nosacījumus:

1. $\sum_{i=1}^n I_i = I_1 + \dots + I_n = R$ (katrs $r \in R$ ir izsakāms formā
 $r = x_1 + \dots + x_n$, kur $x_i \in I_i$)

2. $\forall k, I_k \cap \sum_{i \neq k} I_i = \{0\}$.

Tad $R \simeq I_1 \oplus \dots \oplus I_n$.

PIERĀDĪJUMS ■

Ja I_1, \dots, I_n ir ideāli, kas apmierina iepriekšējās teorēmas nosacījumus, tad saka, ka R ir *iekšējā tiešā summa*

$$R = I_1 \oplus \dots \oplus I_n.$$

1.4. piezīme. Ja $R = I_1 \oplus \dots \oplus I_n$, tad jebkuriem $x_i \in I_i$, $x_j \in I_j$ izpildās $x_i x_j = 0$.

1.9. Ķīniešu atlikumu teorēma gredzenos

1.10. teorēma. I un J ir ideāli gredzenā R . Dots, ka $I + J = R$, $a, b \in R$ - patvaļīgi elementi. Tad

1. Sistēmai

$$\begin{cases} x = a \pmod{I} \\ x = b \pmod{J} \end{cases}$$

eksistē atrisinājums.

2. Jebkuri divi sistēmas atrisinājumi ir kongruenti mod $I \cap J$: ja x_1 un x_2 apmierina sistēmu, tad $x_1 \equiv x_2 \pmod{I \cap J}$.

PIERĀDĪJUMS

1. Tā kā $I + J = R$, tad eksistē $t \in I$, $t' \in J$ tādi, ka

$$a - b = t + t'.$$

Pārnesot dažus elementus uz pretējām pusēm, iegūsim

$$-t + a = t' + b.$$

Definēsim

$$X = -t + a = t' + b.$$

Redzam, ka

$$X - a = -t \in I,$$

$$X - b = t' \in J.$$

Tādējādi X apmierina sistēmu.

2. Ja sistēmai eksistē divi atrisinājumi X un Y , tad

$$\begin{cases} X - Y \equiv 0(\text{mod } I), \\ X - Y \equiv 0(\text{mod } J) \end{cases} \implies X - Y \equiv 0(\text{mod } I \cap J). \blacksquare$$

2. 7.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

7.1 Nosakiet, vai dotās kopas ar dotajām operācijām ir gredzeni:

- (a) racionālie skaitļi, kuriem saucējs (pēc kopīgo reizinātāju saīsināšanas) nedalās ar doto pirmskaitli p , operācijas - skaitļu saskaitīšana un reizināšana;
- (b) reālie skaitļi formā $a+b\sqrt{2}$, kur $a, b \in \mathbb{Q}$, operācijas - skaitļu saskaitīšana un reizināšana;
- (c) reālie skaitļi formā $a+b\sqrt[3]{2}$, kur $a, b \in \mathbb{Q}$, operācijas - skaitļu saskaitīšana un reizināšana;
- (d) fiksētas kopas X visu apakškopu kopa, operācijas - simetriskā starpība un apvienojums;
- (e) simetriskas 2×2 matricas ar reāliem elementiem, operācijas - matricu saskaitīšana un reizināšana;
- (f) viena reāla argumenta funkcijas ar nosacījumu $f(x) = 0$, ja $x \in D \subseteq \mathbb{R}$, D - fiksēta kopa, operācijas - funkciju saskaitīšana un reizināšana;

(g) viena reāla argumenta funkcijas, operācijas - funkciju saskaitīšana un kompozīcija.

7.2 R - gredzens ar vieninieku. Pierādīt, ka ja xy un yx ir invertējami, tad x un y arī ir invertējami.

7.3 Atrodiet visus invertējamus elementus, nulles dalītājus, nilpotentos un idempotentos elementus gredzenā $\mathcal{M}at(2, \mathbb{R})$.

7.4 Atrast visus maksimālos ideālus gredzenā \mathbb{Z} .