DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Algebriskās struktūras

9.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2009./2010.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- atkārtot LT struktūras un lineāro attēlojumu pamatus.

Lekcijas kopsavilkums:

- ar LT var definēt dažas operācijas,
- var definēt, uzdot un pētīt attēlojumus, kas saglabā LT struktūru - *lineāros attēlojumus.*

Svarīgākie jēdzieni: LT tiešā summa, papildinošā apakštelpa, faktortelpa, lineārs attēlojums (LA), LA attēls un kodols, LA telpa, LA matrica, LT izomorfisms.

Svarīgākie fakti un metodes: tiešās summas īpašības, faktortelpas īpašības, LA īpašības, LA attēla un kodola īpašības.

1. Lineāro telpu struktūra

1.1. Operācijas ar lineārajām telpām

1.1.1. Apakštelpu šķēlums un summa

L - k-lineārā telpa, apskatām tās apakštelpas.

Agrāk bija definēts apakštelpu šķēlums un summa.

Ja L un U ir galīgi ģenērētas, tad ir definēti lielumi $\dim(L)$, $\dim(U)$. Lielumu $\operatorname{codim}(L) = \dim(L) - \dim(U)$ sauc par U *kodimensiju.*

1.1. teorēma. L - LT, $U \leq L$, $V \leq L$, $\dim(U) < \infty$, $\dim(V) < \infty$. Tad

$$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V).$$

PIERĀDĪJUMS

Apzīmēsim $\dim(U) = m$, $\dim(V) = n$, $\dim(U \cap V) = l$.

$\begin{cases} U \cap V \leq U \\ U \cap V \leq V. \end{cases}$ Izvēlēsimies apakštelpā $U \cap V$ bāzi

$$\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_l\}$$

un papildināsim to līdz bāzēm

$$\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_l, \mathbf{f}_1, ...\mathbf{f}_{m-l}\}$$

un

$$\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_l, \mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_{n-l}\},$$

attiecīgi, apakštelpām U un V.

Redzam, ka kopa

$$\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_l, \mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_{m-l}, \mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_{n-l}\}$$

ir apakštelpas $U + V$ veidotājsistēma. Pierādīsim, ka tā ir lineāri neatkarīga un, tādējādi, bāze apakštelpai $U + V$.

Pieņemsim, ka eksistē lineāra kombinācija

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i \mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^{m-l} \nu_i \mathbf{f}_i + \sum_{j=1}^{n-l} \mu_j \mathbf{g}_j = 0.$$

Pārveidosim to šādā veidā:

$$\sum_{i=1}^{l} \lambda_i \mathbf{e}_i + \sum_{i=1}^{m-l} \nu_i \mathbf{f}_i = -\sum_{j=1}^{n-l} \mu_j \mathbf{g}_j = \mathbf{h}.$$

Redzam, ka $\mathbf{h} \in U \cap V$ $\Longrightarrow$

$$-\sum_{j=1}^{n-l} \mu_j \mathbf{g}_j = \sum_{i=1}^{l} \sigma_i \mathbf{e}_i.$$

Tā kā iegūtā sakarība saista V bāzes elementus, seko, ka tā ir triviāla. Seko, ka visi koeficienti σ, λ, ν, μ ir vienādi ar 0.

Esam pierādījuši, ka $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_l, \mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_{m-l}, \mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_{n-l}\}$ ir $U + V$

bāze. Tagad skaitīsim dimensijas:

$$\dim(U+V) = l + (m-l) + (n-l) = m+n-l = \\ \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V). \blacksquare$$

1.1. piezīme. Var redzēt, ka galīgi dimensionālā telpā L eksistē visu iespējamo dimensiju apakštelpas. Ja $\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ ir L bāze, un $V_l = \langle \mathbf{e}_1, ..., e_\mathbf{l} \rangle$, tad $\dim(V_l) = l$.

1.1.2. Tiešā summa

Par LT L_1 un L_2 *(ārējo) tiešo summu* $L_1 \oplus L_2$ sauc kopu $L_1 \times L_2$ ar šādām operācijām:

- $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + (\mathbf{a}', \mathbf{b}') = (\mathbf{a} + \mathbf{a}', \mathbf{b} + \mathbf{b}')$;
- $\lambda(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\lambda \mathbf{a}, \lambda \mathbf{b})$.

1.2. piezīme. Tiešo summu var vispārināt uz vairāk nekā 2 apakštelpu gadījumu.

1.3. piezīme. Ja $L = U_1 \oplus U_2$, tad kopas

$$\mathcal{U}_1 = U_1 \oplus \{0\},$$

$$\mathcal{U}_2 = \{0\} \oplus U_2$$

ir apakštelpas, kas apmierina šādas īpašības:

1. $L = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2$,
2. $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \{0\}$.

Ja $L = U_1 + U_2$ un $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, tad saka, ka L ir apakštelpu U_1 un U_2 *(iekšējā) tiešā summa* - $L = U_1 \oplus U_2$.

1.2. teorēma. Ja $L = U_1 + U_2$, tad

$$L = U_1 \oplus U_2 \iff \forall l \in L\ \exists\,!\ u_i \in U_i :\ l = u_1 + u_2.$$

PIERĀDĪJUMS

$\underline{\Longrightarrow}$

Ja $\exists\ \mathbf{l} \in L$, kurš izsakās divos dažādos veidos, tad

$$\mathbf{l} = \alpha \mathbf{u}_1 + \beta \mathbf{u}_2 = \alpha' \mathbf{u}_1' + \beta' \mathbf{u}_2',$$

kur $\alpha \neq \alpha'$ vai $\beta \neq \beta'$. Redzam, ka

$$\alpha \mathbf{u}_1 - \alpha' \mathbf{u}_1' = \beta' \mathbf{u}_2' - \beta \mathbf{u}_2 = 0.$$

Seko, ka sadalījums ir noteikts viennozīmīgi un tā ir pretruna.

$\underline{\Longleftarrow}$

Ja $L \neq U_1 \oplus U_2$, tad $\exists\ \mathbf{l} \neq 0 : \mathbf{l} \in U_1 \cap U_2$. Redzam, ka

$$\mathbf{l} = \mathbf{l} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{l},$$

tādējādi $\mathbf{l}$ var izteikt divos veidos kā U_i elementu summu. ■

1.3. teorēma. Ja $L = U_1 + ... + U_n$, tad

1.
$$L = U_1 \oplus ... \oplus U_n \iff \dim(L) = \sum_{i=1}^{n} \dim(U_i).$$

2.
$$L = U_1 \oplus ... \oplus U_n \iff U_i \cap \sum_{j \neq i} U_j = \{0\}.$$

PIERĀDĪJUMS Matemātiskā indukcija ar parametru n. ■

1.4. teorēma. $\forall\, U \leq L\ \exists\, V \leq L$ tāda, ka
$$L = U \oplus V.$$

PIERĀDĪJUMS Izvēlēsimies U bāzi
$$\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m\}.$$
Papildināsim to līdz L bāzei
$$\{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_m, \mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_k\}.$$
Apskatīsim apakštelpu
$$V = \langle \mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_k \rangle.$$
Redzam, ka $U + V = L$. Pierādīsim, ka $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$.

$U \cap V \neq \{0\} \implies \exists\, \mathbf{l} \neq \mathbf{0}:$

$$\mathbf{l} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i \mathbf{f}_i,$$

kur vismaz viens koeficients nav 0 $\implies$ $\exists$ netriviāla lineāra kombinācija

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathbf{e}_i - \sum_{i=1}^{k} \mu_i \mathbf{f}_i = 0,$$

kas ir pretrunā ar bāzes īpašību. ■

1.4. piezīme. Ja $U \oplus V = L$, tad V sauc par U *papildinošo apakštelpu*, apzīmē kā U^p. Papildinošā apakštelpa parasti nav noteikta viennozīmīgi.

1.2. Faktortelpa

L - LT, $V \leq L$. Varam apskatīt faktorgrupu L/V, kuras elementi ir kongruences klases mod V:

$$L/V = \{\mathbf{l} \in L | \mathbf{l} + V\}.$$

Kopā L/V var definēt arī reizināšanu ar k elementiem:

$$\lambda(\mathbf{l} + V) = \lambda\mathbf{l} + V.$$

Var definēt *projekcijas funkciju*

$$\pi : L \longrightarrow L/V,$$

$$\pi(\mathbf{l}) = [\mathbf{l}] = \mathbf{l} + V.$$

1.1. piemērs. Vektori.

1.5. teorēma.

1. L/V ar definētajām operācijām ir k-lineāra telpa.
2. $\left\{\begin{array}{l} \mathcal{B} - V \text{ bāze} \\ \mathcal{B} \cup \mathcal{C} - L \text{ bāze} \\ \mathcal{B} \cap \mathcal{C} = \emptyset \end{array}\right. \implies \pi(\mathcal{C})$ - L/V bāze.

3. $\dim(L/V) = \dim(L) - \dim(V)$.

PIERĀDĪJUMS
1. Korektuma un aksiomu pārbaude.

2. Pārbaude.

3. Seko no iepriešējā apgalvojums. ■.

L/U sauc par *faktortelpu* L mod U.

2. Lineārie attēlojumi

2.1. Pamatfakti

L,T - k-lineāras telpas. Funkciju $f : L \to T$ sauc par k-lineāru attēlojumu, ja

- $f(\mathbf{l} + \mathbf{l}') = f(\mathbf{l}) + f(\mathbf{l}')$ - f ir aditīvo grupu homomorfisms;

- $f(\lambda\mathbf{l}) = \lambda f(\mathbf{l})$ - f ir k-moduļu homomorfisms.

2.1. piezīme. No definīcijas seko, ka

$$f(\lambda\mathbf{l} + \mu\mathbf{l}') = \lambda f(\mathbf{l}) + \mu f(\mathbf{l}').$$

2.2. piezīme. Svarīgākie "dabiskie" lineārie attēlojumi. 0, id, ι, π.

2.1. piemērs.

$f(\mathbf{l}) = \alpha\mathbf{l}$.

Vektoriem - plaknes vai telpas simetrijas un rotācijas, projekcija uz noteiktu asi vai plakni.

Matricām - transponēšana, reizināšana ar fiksētu matricu.

Funkcijām - atvasināšana.

Visu lineāru attēlojumu kopu no L uz T apzīmēsim ar $Hom(L, T)$.

Lineāru attēlojumu sauc par *lineāru izomorfismu*, ja tas ir bijektīvs.

Ja eksistē lineārs izomorfisms $f : L \to T$, tad saka, ka L un T ir lineāri izomorfas, apzīmē ar $L \simeq T$.

Lineāru attēlojumu $L \to L$ sauc par *lineāru operatoru.*

Kopā $Hom(L, T)$ var definēt lineāras telpas struktūru:
- $(f + g)(\mathbf{l}) = f(\mathbf{l}) + g(\mathbf{l})$;
- $(\lambda f)(\mathbf{l}) = \lambda f(\mathbf{l})$.

Ja $f \in Hom(L, T)$, tad
- $\mathrm{Im}(f) \subseteq T$ ir f (kā funkcijas) attēls:
$$\mathrm{Im}(f) = \{t \in T | t = f(\mathbf{l})\};$$
- $\mathrm{Ker}(f) = \{\mathbf{l} \in L | f(\mathbf{l}) = \mathbf{0}\} = f^{-1}(\mathbf{0})$ - f *kodols.*

2.1. teorēma. Dots, ka $f \in Hom(L, T)$.
1. $\mathrm{Im}(f) \leq T$.
2. $\mathrm{Ker}(f) \leq L$.

PIERĀDĪJUMS Aksiomu pārbaude. ■

2.3. piezīme. Seko, ka

$$\dim(Im(f)) \leq \dim(T), \dim(Ker(f)) \leq \dim(L).$$

$\dim(Im(f))$ sauc par f *rangu.*

2.2. Lineāro attēlojumu uzdošanas matricu formālisms

Dotas lineāras telpas L, T ar bāzēm

$$B_L = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\},$$

$$B_T = \{\mathbf{t}_1, ..., \mathbf{t}_m\}.$$

Sākot no šīs vietas uzskatīsim, ka ir dotas *sakārtotas bāzes* -

$$(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n),$$

$$(\mathbf{t}_1, ..., \mathbf{t}_m).$$

Katru lineāras telpas elementu var uzdot ar tā koordinātēm dotā bāzē:

$$\mathbf{l} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i,$$

$$\mathbf{t} = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \mathbf{t}_i.$$

2.2. teorēma.

1. Dots, ka $f \in Hom(L, T)$. Tad f ir viennozīmīgi noteikts ar tā darbību uz B_L elementiem:

$$\mathbf{l} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i \implies f(\mathbf{l}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\mathbf{e}_i).$$

2. $\forall f_0 : B_L \to T \; \exists f : L \to T :$

$$f(\mathbf{e}_i) = f_0(\mathbf{e}_i), \forall i.$$

(jebkuru funkciju $B_L \to T$ var paplašināt līdz lineāram attēlojumam $f : L \to T$).)

PIERĀDĪJUMS

1. $f(\mathbf{l}) = f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i \mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\mathbf{e}_i)$.

2. Ja $\mathbf{l} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i$, tad definēsim

$$f(\mathbf{l}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_0(\mathbf{e}_i).$$

Var pārbaudīt, ka f ir lineārs attēlojums un apmierina nosacījumu $f(\mathbf{e}_i) = f_0(\mathbf{e}_i)$. ■

Pieņemsim, ka ir dots $f \in Hom(L, T)$, kas apmierina nosacījumus

$$\begin{cases} f(\mathbf{e}_1) = f_{11}\mathbf{t}_1 + f_{21}\mathbf{t}_2 + ... + f_{m1}\mathbf{t}_m \\ f(\mathbf{e}_2) = f_{12}\mathbf{t}_1 + f_{22}\mathbf{t}_2 + ... + f_{m2}\mathbf{t}_m \\ ... \\ f(\mathbf{e}_n) = f_{1n}\mathbf{t}_1 + f_{2n}\mathbf{t}_2 + ... + f_{mn}\mathbf{t}_m \end{cases}$$

Tabulu

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mn} \end{bmatrix}$$

sauc par f matricu $\mathbf{F}$ attiecībā uz bāzēm B_L un B_T.

2.3. teorēma. Dotas k-lineāras telpas L, T ar fiksētām bāzēm B_L, B_T. Ir bijektīva atbilstība starp $Hom(L, T)$ un $\dim(T) \times \dim(L)$ matricām ar elementiem laukā k.

PIERĀDĪJUMS Definēsim funkciju φ, kas katram attēlojumam piekārto tā matricu.

φ ir sirjektīva, jo katrai matricai atbilst kāds lineārs attēlojums.

φ ir injektīva, jo ja diviem attēlojumiem atbilst vienādas matricas, tad tie sakrīt. ∎

2.4. piezīme. Redzam, ka $\mathbf{F}$ j-tā kolonna ir $f(\mathbf{e}_j)$ koordinātes attiecībā uz B_T.

Izmantojot matricu reizināšanas operāciju var aprēķināt f darbību uz $\mathbf{l} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{e}_i$:

1. $\mathbf{l}$ reprezentējam kā kolonnas matricu

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

2. Atrodam $f(\mathbf{l}) = \mathbf{F}\mathbf{l}$.

2.2. piemērs. Matricas šādiem attēlojumiem: 0, id. ι, plaknes vai telpas simetrijas un rotācijas, projekcija uz noteiktu asi vai plakni, matricu transponēšana, reizināšana ar fiksētu matricu, funkciju atvasināšana.

2.3. Daži svarīgi izomorfismi

2.4. teorēma. *L ir k-lineāra telpa. Tad*

$$\dim(L) = n \iff L \simeq k^n.$$

PIERĀDĪJUMS Fiksēsim L bāzi $B_L = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$. Telpā k^n izvēlēsimies standarta bāzi $S_n = \{\mathbf{s}_1, ..., \mathbf{s}_n\}$, kur

$$\mathbf{s}_i = (0, ..., \underbrace{1}_{i\text{-tajā vietā}}, ..., 0).$$

Definēsim lineāru attēlojumu $\varphi : L \to k^n$, kas turpina funkciju

$$\varphi_0 : B_L \to k^n,$$

$$\varphi_0(\mathbf{e}_i) = \mathbf{s}_i.$$

Pierādīsim, ka φ ir bijektīvs.

<u>Sirjektivitāte</u>
Izvēlēsimies patvaļīgu elementu $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{s}_i \in k^n$. Redzam, ka

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{s}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_0(\mathbf{e}_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(\mathbf{e}_i) = \varphi(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{e}_i).$$

<u>Injektivitāte</u>

$\varphi(\mathbf{l}) = \varphi(\mathbf{l})' \implies \varphi(\mathbf{l} - \mathbf{l}') = 0$. Pieņemsim, ka

$$\mathbf{l} - \mathbf{l}' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{e}_i \implies \varphi(\mathbf{l} - \mathbf{l}') = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{s}_i = 0.$$

$\exists\ \lambda_i \neq 0 \implies S_n$ nav lineāri neatkarīga kopa - pretruna $\implies$ $\mathbf{l} - \mathbf{l}' = 0 \implies \mathbf{l} = \mathbf{l}'$. ■

2.5. piezīme. Seko, ka dimensija ir vienīgais lineāro telpu invariants - lineāras telpas izomorfisma tipu viennozīmīgi nosaka lauks k un dimensija.

2.5. teorēma. *L - LT, $V \leq L \implies Ker(\pi) = V$.*

PIERĀDĪJUMS
$\mathbf{u} \in U \implies \pi(\mathbf{u}) = \mathbf{u} + U = \mathbf{0} + U \implies U \leq Ker(\pi)$.

$$\mathbf{x} \in Ker(\pi) \implies \pi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + U = \mathbf{0} + U \implies \mathbf{x} \in U$$
$$\implies Ker(\pi) \leq U \implies U = Ker(\pi).$$

■

2.6. teorēma. Ja $f : L \to T$ ir lineārs attēlojums, tad

$$L/Ker(f) \simeq Im(f).$$

PIERĀDĪJUMS Apzīmēsim $Ker(f)$ ar K.
Definēsim funkciju

$$\varphi : L/K \to Im(f),$$

$$\varphi(\mathbf{l} + K) = f(\mathbf{l})$$

un pierādīsim, ka φ ir korekti definēts lineārs izomorfisms.

Korektums
$\mathbf{l}+K = \mathbf{l}'+K \implies \mathbf{l}-\mathbf{l}' \in K \implies f(\mathbf{l}-\mathbf{l}') = 0 \implies f(\mathbf{l}) = f(\mathbf{l}')$.
Seko, ka

$$\varphi(\mathbf{l} + K) = f(\mathbf{l}) = f(\mathbf{l}') = \varphi(\mathbf{l}' + K).$$

Linearitāte

$$\varphi((\mathbf{l}+K)+(\mathbf{l}'+K)) = \varphi(\mathbf{l}+\mathbf{l}'+K) = f(\mathbf{l}+\mathbf{l}') = \\ f(\mathbf{l})+f(\mathbf{l}') = \varphi(\mathbf{l}+K)+\varphi(\mathbf{l}'+K).$$

$$\varphi(\lambda(\mathbf{l}+K)) = \varphi(\lambda\mathbf{l}+K) = f(\lambda\mathbf{l}) = \lambda f(\mathbf{l}) = \lambda\varphi(\mathbf{l}+K).$$

Sirjektivitāte

$\forall\ \mathbf{y} \in Im(f)\ \exists\ \mathbf{x} \in L : \mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \implies \mathbf{y} = \varphi(\mathbf{x}+K).$

Injektivitāte

$\varphi(\mathbf{l}+K) = \varphi(\mathbf{l}'+K) \implies f(\mathbf{l}) = f(\mathbf{l}') \implies f(\mathbf{l}) - f(\mathbf{l}') = \mathbf{0}.$

$$\implies f(\mathbf{l}-\mathbf{l}') = 0 \implies \mathbf{l}-\mathbf{l}' \in K \implies \mathbf{l}+K = \mathbf{l}'+K. \blacksquare$$

3. 9.mājasdarbs

3.1. Obligātie uzdevumi

9.1 $\dim(L) < \infty$, $U \leq L$, $V \leq L$. Pierādīt vienādību

$$\operatorname{codim}(U+V) + \operatorname{codim}(U \cap V) = \operatorname{codim}(U) + \operatorname{codim}(V).$$

9.2 Dotas apakštelpas

$$U = \langle (2,1,-1),(0,1,1) \rangle \leq \mathbb{Q}^3,$$

$$V = \langle (1,-1,2),(3,0,-1) \rangle \leq \mathbb{Q}^3.$$

Atrast bāzes apakštelpām $U \cap V$ un $U + V$.

9.3 Noteikt, kuras no dotajām funkcijām ir lineāri operatori lineārajā telpā L:

(a) $\mathbf{l} \to \mathbf{c}$, kur $\mathbf{c}$ ir fiksēts L elements;
(b) $\mathbf{l} \to \mathbf{c} + \beta \mathbf{l}$, kur $\mathbf{c} \in L$ - fiksēts un $\beta \in k$ - fiksēts;
(c) $f(x) \to f(x+1) - f(x)$, kur $L = Fun(X,k)$;
(d) $(x_1,x_2,x_3) \to (x_2,x_3,x_1)$, kur $L = k^3$;
(e) $(x_1,x_2,x_3) \to (x_1^2,0,0)$, kur $L = k^3$.

9.4 $L = \mathcal{M}at_{2,2}(k)$.

(a) Pierādīt, ka funkcija

$$f : L \to L,$$

$$\mathbf{M} \to \mathbf{AM},$$

kur $\mathbf{M}, \mathbf{A} \in L$ un $\mathbf{A}$ ir fiksēta matrica, ir lineārs operators.

(b) Atrodiet f matricu L standarta bāzē $\{\mathbf{e}_{11}, \mathbf{e}_{12}, \mathbf{e}_{21}, \mathbf{e}_{22}\}$. ($\mathbf{e}_{ij}$ ir matrica, kurai visi elementi, izņemot elementu 1 pozīcijā (i, j), ir vienādi ar nulli).