***DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE***
*Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte*
*Matemātikas katedra*
*Bakalaura studiju programma "Matemātika"*

*Studiju kurss*

# Algebriskās struktūras

## 8.lekcija

*Docētājs: Dr. P. Daugulis*

*2009./2010.studiju gads*

# Saturs



**Lekcijas mērķis:**

- atkārtot lineāro telpu teorijas pamatdefinīcijas.

**Lekcijas kopsavilkums:**

- var definēt algebrisku struktūru - *lineāro telpu (LT)*, kas vispārina vektoru, matricu un LVS atrisinājumu īpašības,
- vairākās zināmās struktūrās var atpazīt LT īpašības.

**Svarīgākie jēdzieni:** $k$-lineāra telpa, aritmētiskā LT, matricu LT, funkciju LT, matricas nulltelpa, LT apakštelpa, apakštelpu summa, lineāra kombinācija, kopas lineārais slēgums, LT veidotājsistēma, LT bāze.

**Svarīgākie fakti un metodes:** LT pamatīpašības, apakštelpu un to operāciju īpašības, lineārā slēguma īpašības, lineārā neatkarības īpašības, LT bāzes īpašības.

# 1. Lineārās telpas

## 1.1. Pamatfakti

### 1.1.1. Definīcija

Par *lineāru telpu virs lauka $k$ ($k$-lineāru telpu)* sauc kopu $L$ ar šādām struktūrām:

1. kopā $L$ ir dota bināra operācija $+$ ar aditīvu pierakstu tāda, ka $(L, +)$ ir komutatīva grupa (lineārās telpas $L$ aditīvā grupa) -
   - $(x + y) + z = x + (y + z)$,
   - $x + y = y + x$,
   - $\exists 0 \in L$ tāds, ka $x + 0 = x$,
   - $\forall x \in L \exists - x$ tāds, ka $x + (-x) = 0$;
2. ir dota lauka $k$ darbības funkcija

$$k \times L \to L,$$

$$(\lambda, \mathbf{x}) \mapsto \lambda \mathbf{x}$$

   kas uzdod *$k$-moduļa struktūru* kopā $L$ -

- $\lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$,
- $(\lambda+\mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$,
- $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$,
- $(\lambda\mu)\mathbf{x} = \lambda(\mu\mathbf{x})$.

Ar simbolu + parasti apzīmē saskaitīšanu gan laukā $k$, gan telpā $L$, cenšas nepieļaut pārpratumus.

Ja $k = \mathbb{R}(\mathbb{C})$, tad $k$-lineāru telpu sauc par *reālu (kompleksu) lineāru telpu.*

**1.1. teorēma.**

1. $0\mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$, $\forall \mathbf{x} \in L, \lambda \in k$.
2. $\lambda\mathbf{x} = \mathbf{0} \iff \lambda = 0 \vee \mathbf{x} = 0$.
3. $(-1)\mathbf{x} = -\mathbf{x}$.

PIERĀDĪJUMS Patstāvīgi. ■

### 1.1.2. Piemēri

**1.1. piemērs.** *Aritmētiskā (vektoru, koordinātu) telpa virs k-*

$$\underbrace{k \times ... \times k}_{\text{n reizes}} = k^n.$$

Operācijas:

- $(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$,
- $\lambda(x_1, ..., x_n) = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$.

$k^n$ aditīvā grupa ir grupas $k$ $n$ eksemplāru tiešais reizinājums (tiešā summa).

Redzam, ka

- $0 = (0, ..., 0)$,
- $-(x_1, ..., x_n) = (-x_1, ..., -x_n)$.

Speciālgadījumi:

- $n = 0$, $k^0 = \{0\}$;
- $n = 1$, $k^1 = k$.

Ja $n \in \{1, 2, 3\}$ un $k \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$, tad ir iespējama ģeometriska interpretācija.

Var definēt LT, kuras elementi ir bezgalīgas virknes.

Apzīmēsim ar $k^{\mathbb{N}}$ kopu, kuras elementi ir visas uz labo pusi bezgalīgās virknes formā $(x_1, ..., x_n, ...)$.

Kopā $k^{\mathbb{N}}$ ir uzdota LT struktūra ar virkņu saskaitīšanas un reizināšanas ar skaitli operācijām.

**1.2. piemērs.** *Funkciju $X \to k$ telpa $Fun(X, k)$.*

Operācijas:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,
- $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

Redzam, ka

- $0 = 0(x)$, $\forall x \in X$,
- $(-f)(x) = -f(x)$.

Var apskatīt tikai noteikta veida funkcijas - polinomus, diferencējamas, gludas u.c.

**1.3. piemērs.** $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ - homogēna $m \times n$ LVS ar atrisinājumu kolonnu kopu $\mathcal{N}ull(\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{M}at(n, 1, k)$:

$$\mathcal{N}ull(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{M}at(n, 1, k) | \mathbf{Ax} = \mathbf{0}\}.$$

$\mathcal{N}ull(\mathbf{A})$ sauc arī par matricas $\mathbf{A}$ *nulltelpu.*

Definēsim kopā $\mathcal{N}ull(\mathbf{A})$ LT struktūru kā matricām.

Var pārbaudīt, ka

- $\mathcal{N}ull(\mathbf{A})$ ir slēgta attiecībā uz LT operācijām,
- visas aksiomas izpildās.

**1.4. piemērs.** $X$ - kopa, tās apakškopu kopa $\mathcal{P}(X)$. $(\mathcal{P}(X), \Delta)$ ir komutatīva grupa. Var definēt lauka $\mathbb{F}_2$ darbību ar šādiem nosacījumiem $\forall A \in \mathcal{P}(X)$:

- $1 \cdot A = A$,
- $0 \cdot A = 0$.

Var pārbaudīt, ka $\mathcal{P}(X)$ ir $\mathbb{F}_2$-lineāra telpa.

Redzam, ka

- $0 = \emptyset$,
- $-A = A$.

Speciālgadījums - grafa šķautņu kopas apakškopu telpa.

**1.5. piemērs.** *Matricu telpa* $\mathcal{M}_{n,l}(k)$ - $n \times l$ matricas ar elementiem no lauka $k$.

Operācijas:

- matricu saskaitīšana,

- matricas reizināšana ar lauka elementu.

Var domāt, ka $\mathcal{M}_{n,l}(k)$ ir tas pats, kas $k^{nl}$, tikai elementi tiek izkārtoti tabulā, nevis rindā.

### 1.1.3. Lineārais slēgums un veidotājelementi

Ja ir doti lineāras telpas $L$ elementi $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$, tad par to *lineāru kombināciju ar koeficientiem* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sauksim $L$ elementu

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + ... + \lambda_n \mathbf{x}_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{x}_i.$$

Ja vismaz viens no $k$ elementiem $\lambda_1, ..., \lambda_n$ nav vienāds ar 0, tad lineāro kombināciju sauc par netriviālu (pretējā gadījumā par triviālu).

Ja ir dota kopa $S \subseteq L$, tad par $S$ *lineāro slēgumu* sauc kopu

$$\langle S \rangle = \{\mathbf{x} \in L | x = \lambda_1 \mathbf{s}_1 + ... + \lambda_n \mathbf{s}_n \text{ kur } \lambda_i \in k, \mathbf{s}_i \in S\}.$$

Citiem vārdiem sakot, $\langle S\rangle$ satur visas iespējamās $S$ elementu lineārās kombinācijas (ar galīgu saskaitāmo skaitu).

**1.6. piemērs.** Viena, divu, trīs elementu kopu lineārie slēgumi.

**1.2. teorēma.** Katrai kopai $S \subseteq L$ kopa $\langle S\rangle$ ir $k$-lineāra telpa.

PIERĀDĪJUMS Aksiomu pārbaude. ■

Ja $\langle S\rangle = L$, tad saka, ka $S$ ir $L$ *veidotājsistēma.*

Divas $L$ apakškopas $S$ un $S'$ sauc par ekvivalentām, ja

$$\langle S\rangle = \langle S'\rangle.$$

### 1.1.4. Apakštelpas

Ja $M \subseteq L$ ir $L$ aditīvās grupas apakšgrupa, kas ir slēgta attiecībā uz $k$ darbību, tad $M$ sauc par $L$ *lineāru apakštelpu*$(M \leq L)$ :

1. $\mathbf{m}, \mathbf{m}' \in M \implies \mathbf{m} + \mathbf{m}' \in M$,
2. $\mathbf{0} \in M$,
3. $\mathbf{m} \in M \implies -\mathbf{m} \in M$,
4. $\mathbf{m} \in M \implies \lambda\mathbf{m} \in M, \forall \lambda \in k$.

**1.3. teorēma.**

1. $S \subseteq L \implies \langle S \rangle \leq L$.
2. $M \leq L \implies \langle M \rangle = M$.
3. $M_i \leq L, \forall i \implies \bigcap_{i=1}^{n} M_i \leq L$.

PIERĀDĪJUMS
1. $\mathbf{y} = \sum \lambda_i \mathbf{s}_i \ \wedge \ \mathbf{y}' = \sum \lambda_i' \mathbf{s}_i \implies \mathbf{y} + \mathbf{y}' = \sum (\lambda_i + \lambda_i')\mathbf{s}_i$.
$\mathbf{0} \in \langle S \rangle$.
$\mathbf{y} = \sum \lambda_i \mathbf{s}_i \implies -\mathbf{y} = \sum (-\lambda_i)\mathbf{s}_i$.
$\mathbf{y} = \sum \lambda_i \mathbf{s}_i \implies \lambda\mathbf{y} = \sum (\lambda\lambda_i)\mathbf{s}_i$.

2. Ja $M$ ir apakštelpa, tad $M$ satur visas savu elementu lineārās kombinācijas, tāpēc $\langle M \rangle \subseteq M$. No otras puses, $M \subseteq \langle M \rangle$.

3. $\mathbf{m}, \mathbf{m}' \in M_i, \forall i \implies \mathbf{m} + \mathbf{m}' \in M_i, \forall i.$
$\mathbf{m} \in M_i, \forall i \implies \lambda\mathbf{m} \in M_i, \forall i.$
■

**1.1. piezīme.** Apakštelpu apvienojums var nebūt apakštelpa. Var apskatīt piemērus ar plaknes vektoru telpu.

$V, W \leq L$. Definēsim kopu $V + W \subseteq L$ ($V$ un $W$ *summu*) ar šādu īpašību:

$$V + W = \{\mathbf{l} \in L | \exists\ \mathbf{v} \in V, \exists\ \mathbf{w} \in W : \mathbf{l} = \mathbf{v} + \mathbf{w}\}.$$

Divu apakštelpu summas jēdzienu var vispārināt uz galīga skaita apakštelpu summu. $V_i \leq L,\ 1 \leq i \leq n$. Definēsim kopu $\sum_{i=1}^{n} V_i \subseteq L$ ar šādu īpašību:

$$\sum_{i=1}^{n} V_i = \{\mathbf{l} \in L | \forall\ i\ \exists\ \mathbf{v}_i \in V_i : \mathbf{l} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{v}_i\}.$$

Īpašības:

- $V + W = W + V$,

- $(V + W) + Z = V + (W + Z)$.

**1.7. piemērs.** Plaknes vektori. Monomu apakštelpas.

**1.4. teorēma.** $L$ - lineāra telpa.

$$\begin{cases} V \leq L \\ W \leq L \end{cases} \Longrightarrow V + W \leq L.$$

PIERĀDĪJUMS

$$\begin{cases} \mathbf{u} \in V + W \\ \mathbf{u}' \in V + W \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{w}, \text{ kur } \mathbf{v} \in V, \mathbf{w} \in W \\ \mathbf{u}' = \mathbf{v}' + \mathbf{w}', \text{ kur } \mathbf{v}' \in V, \mathbf{w}' \in W \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} \mathbf{u} + \mathbf{u}' = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) + (\mathbf{v}' + \mathbf{w}') = \underbrace{(\mathbf{v} + \mathbf{v}')}_{\in V} + \underbrace{(\mathbf{w} + \mathbf{w}')}_{\in W} \in V + W \\ \lambda\mathbf{u} = \lambda(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \underbrace{\lambda\mathbf{v}}_{\in V} + \underbrace{\lambda\mathbf{w}}_{\in W} \in V + W. \end{cases}$$ ■

**1.2. piezīme.** Teorēmu var vispārināt uz jebkuras apakštelpu kopas summu:

$$\forall\, i : V_i \leq L \implies \sum_i V_i \leq L.$$

**1.3. piezīme.** Var domāt, ka

- $V \cap W$ ir lielākā apakštelpa, kuru satur gan $V$, gan $W$,
- $V + W$ ir mazākā apakštelpa, kas satur gan $V$, gan $W$.

## 1.2. Bāze un dimensija

### 1.2.1. Lineārā atkarība un neatkarība

Lineāras telpas $L$ elementus $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$ sauc par *lineāri atkarīgiem*, ja eksistē to netriviāla lineāra kombinācija, kas ir vienāda ar $\mathbf{0}$:

$$\exists \lambda_1, ..., \lambda_n : \exists \lambda_i \neq 0 : \ \lambda_1 \mathbf{x}_1 + ... + \lambda_n \mathbf{x}_n = 0.$$

Lineāras telpas $L$ elementus $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$ sauc par *lineāri neatkarī-*

*giem*, ja tikai to triviāla lineāra kombinācija ir vienāda ar 0:

$$\lambda_1\mathbf{x}_1 + ... + \lambda_n\mathbf{x}_n = \mathbf{0} \implies \forall i \lambda_i = 0.$$

**1.5. teorēma.**

1. $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$ ir lineāri atkarīga kopa $\iff$ $\exists \mathbf{x}_i$ tāds, ka

$$\mathbf{x}_i \in \langle \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}, ..., \mathbf{x}_n \rangle.$$

2. Ja $S$ ir lineāri neatkarīga kopa un $T \subseteq S$, tad $T$ ir lineāri neatkarīga kopa.

PIERĀDĪJUMS

1. Ja $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$ ir lineāri atkarīga kopa, tad eksistē netriviāla lineāra kombinācija

$$\lambda_1\mathbf{x}_1 + ... + \lambda_n\mathbf{x}_n = 0,$$

kur $\lambda_i \neq 0$. Seko, ka

$$\mathbf{x}_i = -\frac{1}{\lambda_i} \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} \lambda_j \mathbf{x}_j.$$

Ja $\mathbf{x}_i \in \langle \mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_{i+1}, ..., \mathbf{x}_n \rangle$, tad

$$\mathbf{x}_i = \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} \mu_j \mathbf{x}_j.$$

Seko, ka

$$\sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} \mu_j \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i = 0$$

ir netriviāla lineāra kombinācija.

2. Pieņemsim, ka $S = \{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m, ..., \mathbf{x}_n\}$ un $T = \{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_m\}$.

Ja $T$ būtu lineāri atkarīga kopa, tad eksistē netriviāla lineāra kombinācija

$$\lambda_1 \mathbf{x}_1 + ... + \lambda_m \mathbf{x}_m = 0,$$

kas būtu arī netriviāla lineāra kombinācija kopai $S$. ■

**1.6. teorēma.** $\{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n\} \subseteq L$ ir lineāri neatkarīga kopa un $\{\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_m\} \subseteq$ $L$ ir patvaļīga apakškopa.

$$\mathbf{x}_i \in \langle \mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_m \rangle, \forall i \implies n \leq m.$$

PIERĀDĪJUMS Ir dota sistēma

$$\begin{cases} \mathbf{x}_1 = \alpha_{11}\mathbf{y}_1 + ... + \alpha_{1m}\mathbf{y}_m \\ ... \\ \mathbf{x}_n = \alpha_{n1}\mathbf{y}_1 + ... + \alpha_{nm}\mathbf{y}_m. \end{cases}$$

Pieņemsim, ka eksistē lineāra kombinācija

$$\lambda_1\mathbf{x}_1 + ... + \lambda_n\mathbf{x}_n = 0.$$

Pārveidosim šo lineāro kombināciju, izsakot $\mathbf{x}$ kā funkcijas no $\mathbf{y}$:

$$\begin{aligned} \lambda_1\mathbf{x}_1 + ... + \lambda_n\mathbf{x}_n = \\ \lambda_1(\alpha_{11}\mathbf{y}_1 + ... + \alpha_{1m}\mathbf{y}_m) + ... + \lambda_n(\alpha_{n1}\mathbf{y}_1 + ... + \alpha_{nm}\mathbf{y}_m) = \\ (\alpha_{11}\lambda_1 + \alpha_{21}\lambda_2 + ... + \alpha_{n1}\lambda_n)\mathbf{y}_1 + ... \\ (\alpha_{1m}\lambda_1 + \alpha_{2m}\lambda_2 + ... + \alpha_{nm}\lambda_n)\mathbf{y}_m = 0. \end{aligned}$$

Ja $\lambda_1, ..., \lambda_n$ apmierina sistēmu

$$\begin{cases} \alpha_{11}\lambda_1 + \alpha_{21}\lambda_2 + ... + \alpha_{n1}\lambda_n = 0 \\ ... \\ \alpha_{1m}\lambda_1 + \alpha_{2m}\lambda_2 + ... + \alpha_{nm}\lambda_n = 0, \end{cases}$$

tad $\lambda_1\mathbf{x}_1 + ... + \lambda_n\mathbf{x}_n = 0$.

Pieņemsim, ka $n > m$. Tad sistēmai attiecībā uz $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ir netriviāls atrisinājums (tas seko no Gausa metodes).

Seko, ka kopa $\{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n\}$ nav lineāri neatkarīga. ■

**1.7. teorēma.** Ja $S$ un $S'$ ir lineāri neatkarīgas ekvivalentas galīgas $L$ apakškopas, tad $|S| = |S'|$.

PIERĀDĪJUMS No iepriekšējās teorēmas seko, ka $|S| \leq |S'|$ un $|S'| \leq |S|$. ■

### 1.2.2. Lineāras telpas bāze

Lineāri neatkarīgu kopu $B \subseteq L$ sauc par *maksimālu lineāri neatkarīgu kopu* , ja

$$B \subseteq B' \wedge B' - \text{lineāri neatkarīga} \implies B = B'.$$

Par lineāras telpas *bāzi* sauc tās maksimālu neatkarīgu apakškopu.

**1.8. teorēma.** Dota lineāra telpa $L$. Zemāk dotie apgalvojumi ir loģiski ekvivalenti.

1. $B$ ir $L$ bāze.
2. $B$ ir minimāla $L$ veidotājsistēma.
3. $\forall x \in L$ ir viennozīmīgi izsakāms $B$ elementu lineāras kombinācijas veidā:
$$\exists\,!\ \alpha_1, ..., \alpha_n : x = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n.$$
4. $B$ ir lineāri neatkarīga $L$ veidotājsistēma.

PIERĀDĪJUMS

$\underline{1 \implies 2}$

$\mathbf{x} \in L$ $\implies$ $\{B, x\}$ ir lineāri atkarīga $\implies$ eksistē netriviāla lineāra kombinācija

$$\sum_{\mathbf{e}\in B} \lambda_e \mathbf{e} + \lambda \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Ja $\lambda = 0$, tad $B$ ir lineāri atkarīga - tas nevar būt, tāpēc $x$ izsakās kā $B$ elementu lineāra kombinācija. Pierādījām, ka $B$ ir veidotājsistēma.

Pieņemsim, ka eksistē mazāka veidotājsistēma $B' \subset B$. Ja $\mathbf{f} \in B \setminus B'$ $\implies$

$$\mathbf{f} = \sum_{\mathbf{e}\in B'} \lambda_e \mathbf{e}$$

un eksistē netriviāla lineāra kombinācija

$$\sum_{\mathbf{e}\in B'} \lambda_e \mathbf{e} - \mathbf{f} = 0,$$

kas ir pretruna, jo $B$ ir lineāri neatkarīga.

<u>$2 \implies 3$</u>

Pieņemsim, ka $B$ ir minimāla veidotājsistēma. Tad $\forall \mathbf{x} \in L$ ir izsakāms $B$ elementu lineāras kombinācijas veidā:

$$\exists \alpha_1, ..., \alpha_n : \mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + ... + \alpha_n \mathbf{e}_n.$$

Pieņemsim, ka $\mathbf{x}$ var izteikt divos veidos:

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + ... + \alpha_n \mathbf{e}_n = \alpha_1' \mathbf{e}_1 + ... + \alpha_n' \mathbf{e}_n.$$

Seko, ka

$$\underbrace{(\alpha_1 - \alpha_1')}_{=\mu_1} \mathbf{e}_1 + ... + \underbrace{(\alpha_n - \alpha_n')}_{=\mu_n} \mathbf{e}_n = 0.$$

Ja $\exists i$ tāds, ka $\mu_i \neq 0$, tad $\mathbf{e}_i$ var izteikt kā pārējo $B$ elementu lineāru kombināciju. Seko, ka $B$ nav minimāla veidotājsistēma, jo $B \backslash \{\mathbf{e}_i\}$ arī ir veidotājsistēma.

<u>$3 \implies 1$</u>

Pieņemsim, ka $\forall \mathbf{x} \in L$ ir viennozīmīgi izsakāms $B$ elementu lineāras kombinācijas veidā:

$$\exists! \alpha_1, ..., \alpha_n : \mathbf{x} = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n \mathbf{e}_n, \text{ kur } \mathbf{e}_i \in B.$$

Ja $B$ būtu lineāri atkarīga kopa, tad eksistētu netriviāla lineāra kombinācija

$$\lambda_1\mathbf{e}_1 + ... + \lambda_n\mathbf{e}_n = 0$$

un elementu $\mathbf{0}$ varētu izteikt kā $B$ lineāru kombināciju divos dažādos veidos.

Pieņemsim, ka $B$ nav maksimāla lineāri neatkarīga kopa - $\exists$ $\mathbf{x}$ tāds, ka $\{B, \mathbf{x}\}$ ir lineāri neatkarīga kopa. Tad $\mathbf{x}$ nevarētu iztekt kā $B$ lineāru kombināciju - pretruna. $\blacksquare$

**1.4. piezīme.** Ja $B = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$ ir $L$ bāze un

$$\mathbf{x} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + ... + \alpha_n\mathbf{e}_n,$$

tad lauka elementus $\alpha_1, ..., \alpha_n$ sauc par $\mathbf{x}$ *koordinātēm* attiecība uz $B$.

**1.8. piemērs.** *Kanoniskās bāzes* telpās $k^n$, $Fun(X, k)$, $\mathcal{M}_{n,l}(k)$.

**1.9. teorēma.** Dota lineāra telpa $L$, kurai eksistē galīga veidotājsistēma.

1. Eksistē $L$ bāze.
2. Ja $\{\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m\} \subseteq L$ ir lineāri neatkarīga kopa, tad to var papildināt līdz $L$ bāzei.

PIERĀDĪJUMS

1. Pieņemsim, ka ir dota $L$ galīga veidotājsistēma $\Gamma = \{\mathbf{g}_1, ..., \mathbf{g}_l\}$. Galīgā laikā varam atrast minimālu veidotājsistēmu $B \subseteq \Gamma$ - tā ir $L$ bāze.

2. Pieņemsim, ka kopa $B = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\} \subseteq L$ ir bāze, $n \geq m$. Apskatīsim elementu virkni

$$(\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m, \mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n).$$

Lasīsim šo virkni no kreisās puses un svītrosim visus elementus, kas izsakās kā iepriekšējo elementu lineāra kombinācija. Rezultātā iegūsim virkni

$$(\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m, \mathbf{e}_{i_1}, ..., \mathbf{e}_{i_j}).$$

Ja eksistētu netriviāla lineāra kombinācija

$$\lambda_1\mathbf{f}_1 + ... + \lambda_m\mathbf{f}_m + \mu_1\mathbf{e}_{i_1} + ... + \mu_j\mathbf{e}_{i_j} = 0,$$

tad $\mathbf{e}$ ar maksimālo indeksu, kuram $\mu \neq 0$ varētu izteikt kā iepriekšējo lineāru kombināciju - pretruna. Seko, ka kopa

$$B' = \{\mathbf{f}_1, ..., \mathbf{f}_m, \mathbf{e}_{i_1}, ..., \mathbf{e}_{i_j}\}$$

ir lineāri neatkarīga.

$\forall \mathbf{x} \in L$ izsakās kā $B$ elementu lineāra kombinācija, tātad arī kā $B'$ lineāra kombinācija, jo visi izsvītrotie $B$ elementi arī izsakās kā $B'$ elementu lineāras kombinācijas. Seko, ka $B'$ ir lineāri neatkarīga, minimāla veidotājsistēma, tātad bāze. ■

**1.5. piezīme.** Bāzes nav noteiktas viennozīmīgi, ja neskaita dažus speciālgadījumus.

**1.6. piezīme.** Iepriekšējās teorēmas var vispārināt uz gadījumu, kad lineārajās telpās neeksistē galīgas veidotājsistēmas. Visām lineārajām telpām eksistē bāzes, katru lineāri neatkarīgu apakškopu var papildināt līdz bāzei.

### 1.2.3. Lineāras telpas dimensija

$k$-lineārai telpai $L$ var eksistēt vai nu galīga vai arī bezgalīga minimāla veidotājsistēma. $L$ sauc, attiecīgi, par *galīgi dimensionālu* vai *bezgalīgi dimensionālu* telpu.

Ja $L$ eksistē minimāla veidotājsistēma ar $n$ elementiem, tad saka, ka $L$ *dimensija* ir $n$, $\dim_k(L) = n$.

Ja $L = \{0\}$, tad saka, ka $\dim_k(L) = 0$.

**1.9. piemērs.** $\dim_k(k^n) = n$.
$\dim_k(Fun(X, k)) = |X|$.
$\dim_k(\mathcal{M}_{n,l}(k)) = nl$.

# 2. 8.mājasdarbs

8.1 Nosakiet, vai dotās kopas ar dotajām operācijām ir lineāras telpas:

(a) tādu plaknes vektoru kopu, kuru galapunkts pieder taisnei

$$x + y = 1$$

(sākumpunkts ir $(0, 0)$), operācijas - vektoru saskaitīšana un reizināšana ar skaitli;

(b) tādu plaknes vektoru kopu, kuru galapunkts pieder pirmajam kvadrantam (sākumpunkts ir $(0, 0)$), operācijas - vektoru saskaitīšana un reizināšana ar skaitli;

(c) viena reāla argumenta funkcijas $f(x)$ ar nosacījumu

$$f(1) = a,$$

kur $a \in \mathbb{R}$ ir fiksēts, operācijas - funkciju saskaitīšana un reizināšana ar skaitli;

(d) fiksētas homogēnas lineāru vienādojumu sistēmas virs lauka $k$ atrisinājumu kopa, operācijas - atrisinājumu (kā vektoru) saskaitīšana un reizināšana ar $k$ elementiem;

(e) simetriskas matricas no kopas $\mathcal{M}_{n,n}(k)$, operācijas - matricu saskaitīšana un reizināšana ar $k$ elementiem;
(f) matricas no kopas $\mathcal{M}_{n,n}(k)$, kuru determinants ir vienāds ar 0, operācijas - matricu saskaitīšana un reizināšana ar $k$ elementiem.

8.2 Pierādīt, ka dotās funkciju kopas ir lineāri neatkarīgas lineārajā telpā $Fun(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

(a) $\{\sin(x), \cos(x)\}$;
(b) $\{e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, e^{a_3 x}\}$;

8.3 Noteikt vai dotā kopa ir lineāri neatkarīga lineārajā telpā $\mathbb{Q}^4$, ja ir neatkarīga, tad papildināt līdz bāzei:

(a) $\{(1, -1, 1, -1), (1, 2, -3, 1), (0, 2, 1, 0)\}$;
(b) $\{(1, -1, 1, -1), (1, 2, -3, 1), (1, 5, -7, 3)\}$.