DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Algebriskās struktūras

5.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2009./2010.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt svarīgos grupu "reizinājumu" tipus.

Lekcijas kopsavilkums:

- var definēt operācijas grupu kategorijā - *tiešo* un *pustiešo reizinājumu* un pētīt to īpašības.

Svarīgākie jēdzieni: ārējais tiešais reizinājums, iekšējais tiešais reizinājums, nedalāma grupa, iekšējais pustiešais reizinājuma, grupu iekšējie automorfismi, ārējais pustiešais reizinājums, Zappa-Szep reizinājums.

Svarīgākie fakti un metodes: ārējā tiešā reizinājuma īpašības, iekšējā tiešā reizinājuma īpašības, iekšējā pustiešā reizinājuma īpašības, ārējā pustiešā reizinājuma īpašības.

1. Grupu reizinājumi

Grupu reizinājumi ir operācijas grupu kategorijā - grupu virknei noteiktā veidā tiek piekārtota grupa. Grupu reizinājumus var pētīt divos veidos:

- *ārējie reizinājumi* - no vienkāršākām grupām tiek konstruētas sarežģītākas (analoģija - vektoru telpas paplašināšana ar jaunām dimensijām),
- *iekšējie reizinājumi* - grupa tiek sadalīta vienkāršākās sastāvdaļās (analoģija - vektori tiek izteikti kā bāzes vektoru summas).

1.1. Tiešais reizinājums

1.1.1. Ārējais tiešais reizinājums

G, H - grupas. Par G un H *(ārējo) tiešo reizinājumu* sauc grupoīdu $(G \times H, *)$, kur operācija $*$ tiek uzdota šādi:

$$(g, h) * (g', h') = (gg', hh').$$

1.1. teorēma. $(G \times H, *)$ ir grupa.

PIERĀDĪJUMS

Asociativitāte $\forall\ g, g', g'' \in G$ un $h, h', h'' \in H$ izpildās

$$\Big((g,h)(g',h')\Big)(g'',h'') = (gg',hh')(g'',h'') =$$

$$\Big((gg')g'',(hh')h''\Big) = \Big(g(g'g''),h(h'h'')\Big) = (g,h)\Big((g',h')(g'',h'')\Big).$$

Vienības elements Visiem $g \in G$, $h \in H$ izpildās

$$(g,h)(e,e) = (ge,he) = (eg,eh) = (g,h),$$

tāpēc (e,e) ir vienības elements.

Inversais elements Visiem $g \in G$, $h \in H$ izpildās

$$(g,h)(g^{-1},h^{-1}) = (gg^{-1},hh^{-1}) = (e,e) \Longrightarrow$$

$\forall\ (g,h) \in G \times H\ \exists\ (g,h)^{-1} = (g^{-1}, h^{-1})$. ■

1.1. piezīme. G un H ir komutatīvas $\Longrightarrow$ $G \times H$ ir komutatīva.

Ja G un H ir galīgas, tad $G \times H$ ir galīga un $|G \times H| = |G| \cdot |H|$.

$G \times H \simeq H \times G$, izomorfisms $f : G \times H \to H \times G$ var tikt definēts šādi:

$$f\Big((g,h)\Big) = (h,g).$$

$(G \times H) \times I \simeq G \times (H \times I)$, izomorfisms $f : (G \times H) \times I \to G \times (H \times I)$ var tikt definēts šādi:

$$f\Big(((g,h),i)\Big) = \Big(h,(g,i)\Big).$$

Tādējādi grupu tiešais reizinājums ir ar precizitāti līdz izomorfismam komutatīva un asociatīva operācija grupu kategorijā.

Grupu kategorijā eksistē "neitrālais elements" - viena elementa grupa $E = \{e\}$: $\forall G$ izpildās

$$G \times E \simeq G.$$

Tiešo reizinājumu var vispārināt uz patvaļīgas galīgas grupu kopas gadījumu: ja ir dotas n grupas $G_1, ..., G_n$, tad par to tiešo reizinājumu sauc kopu $G_1 \times ... \times G_n$ ar šādu operāciju:

$$(a_1, ..., a_n)(a_1', ..., a_n') = (a_1 a_1', ..., a_n a_n').$$

1.1. piemērs. Vektoru kopas: $\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$.

Taisnstūra rotācijas. Atlikumi.

1.2. piezīme. Aditīvajā pierakstā (ja visas grupas G_i ir komutatīvas) izmanto apzīmējumu $G_1 \oplus G_2 \oplus ... \oplus G_n$.

Ja $G = N \times M$, tad definēsim

$$\widetilde{N} = \{x \in G | x = (n, e), \text{ kur } n \in N\},$$

$$\widetilde{M} = \{x \in G | x = (e, m), \text{ kur } m \in M\}.$$

1.2. teorēma.

1. $\widetilde{N} \trianglelefteq G$, $\widetilde{M} \trianglelefteq G$

2. $\forall g \in G$ ir viennozīmīgi izsakāms formā

$$g = \widetilde{n}\widetilde{m} = \widetilde{m}\widetilde{n}, \text{ kur } \widetilde{n} \in \widetilde{N}, \widetilde{m} \in \widetilde{M}$$

$(G = \widetilde{N}\widetilde{M} = \widetilde{M}\widetilde{N})$.

PIERĀDĪJUMS

1.
$(n', m')^{-1}(n, e)(n', m') = (n'^{-1}nn', m'^{-1}em') = (\underbrace{n'^{-1}nn'}_{\in N}, e) \in \widetilde{N}$.

2. $(n, m) = (n, e)(e, m) \in \widetilde{N}\widetilde{M}$. ■

1.3. piezīme. Teorēmu var vispārināt uz vairāk nekā divu grupu tiešo reizinājumu.

1.1.2. Iekšējais tiešais reizinājums

1.3. teorēma. Ja grupa G satur l normālas apakšgrupas $N_1, ..., N_l$ un $\forall g \in G$ ir viennozīmīgi izsakāms formā

$$g = g_1 g_2 ... g_l, \text{ kur } g_i \in N_i,$$

tad

$$G \simeq N_1 \times N_2 \times ... \times N_l.$$

PIERĀDĪJUMS Definēsim funkciju

$$f : N_1 \times N_2 \times ... \times N_l \to G,$$

$$f(a_1, ..., a_l) = a_1 ... a_l.$$

Pierādīsim, ka f ir grupu izomorfisms.

Sirjektivitāte $\forall g \in G$ ir uzrakstāms formā

$$g = g_1 g_2 ... g_l, \text{ kur } g_i \in N_i \implies g = f(g_1, ..., g_l).$$

Injektivitāte $f(a_1, ..., a_n) = f(b_1, ..., b_n) \implies a_1 ... a_n = b_1 ... b_n$.
$\forall$ G elements ir viennozīmīgi izsakāms reizinājuma formā $\implies$

$$a_i = b_i, \forall i.$$

<u>Homomorfisms</u> No sākuma pierādīsim, ka $N_i \cap N_j = \{e\}$, ja $i \neq j$.

$N_i \cap N_j \ni a \implies a$ var divos dažādos veidos uzrakstīt kā reizinājumu:

$$\underbrace{e...e}_{i-1} ae...e = \underbrace{e...e}_{j-1} ae...e \implies a = e.$$

No viena mājasdarba uzdevuma seko, ka

$$\begin{cases} a_i \in N_i \\ a_j \in N_j \end{cases} \implies a_i a_j = a_j a_i.$$

Tagad redzam, ka

$$f\Big((a_1, ..., a_n)(b_1, ..., b_n)\Big) = f\Big((a_1 b_1, ..., a_n b_n)\Big) =$$
$$a_1 b_1 a_2 b_2 ... a_n b_n = a_1 a_2 ... a_n b_1 b_2 ... b_n =$$
$$f\Big((a_1, ..., a_n)\Big) f\Big((b_1, ..., b_n)\Big). \blacksquare$$

1.4. teorēma.

$$\begin{cases} N, M \trianglelefteq G \\ N \cap M = \{e\} \\ G = NM \end{cases} \Longrightarrow G \simeq N \times M.$$

PIERĀDĪJUMS Jāpierāda, ka $\forall g \in G$ ir viennozīmīgi izsakāms formā $g = nm$, kur $n \in N$, $m \in M$. Tad apgalvojums sekos no iepriekšējās teorēmas.

Pieņemsim, ka

$$g = nm = n'm', \text{ kur } \{n, n'\} \subseteq N, \{m, m'\} \subseteq M.$$

Redzam, ka

$$\underbrace{n'^{-1}n}_{\in N} = \underbrace{m'm^{-1}}_{\in M} = e.$$

Seko, ka $n = n'$ un $m = m'$, tātad g ir izsakāms viennozīmīgi reizinājuma veidā. ■

1.4. piezīme. Iepriekšējās teorēmas terminos G ir apakšgrupu N un M *iekšējais tiešais reizinājums* - $G = N \times M$.

Teorēma arī apgalvo, ka iekšējais tiešais reizinājums ir izomorfs ārējam tiešajam reizinājumam.

1.5. piezīme. Grupu sauc par *nedalāmu*, ja tā nav izsakāma kā netriviāls iekšējais tiešais reizinājums:

$$G = N \times M \iff N = \{e\} \text{ vai } M = \{e\}.$$

1.5. teorēma. $G = N \times N'$ (iekšējais reizinājums) $\implies G/N \simeq N'$.

PIERĀDĪJUMS Definēsim

$$\varphi : G/N \to N',$$

$$\varphi(N(aa')) = a', \text{ kur } a \in N, a' \in N'.$$

Pierādīsim, ka φ ir grupu izomorfisms.

Homomorfisms

$$\varphi\Big((Haa')(Hbb')\Big) = \varphi\Big(H(aba'b')\Big) = a'b' = \varphi\Big(Haa'\Big)\varphi\Big(Hbb'\Big).$$

Sirjektivitāte

$\forall\ a' \in N' :\ a' = \varphi\Big(N(ea')\Big).$

Injektivitāte

$\varphi\Big(N(aa')\Big) = \varphi\Big(N(bb')\Big) \implies a' = b' \implies Na' = Nb' \implies N(aa') = N(bb').$ ■

1.2. Pustiešais reizinājums

1.2.1. Iekšējais pustiešais reizinājums

Ja $\begin{cases} N \trianglelefteq G \\ A \leq G \\ N \cap A = \{e\} \\ G = NA \end{cases}$, tad saka, ka G ir N un A *(iekšējais) pustiešais reizinājums (semidirect product)* - $G = N \rtimes A$.

1.2. piemērs. Tiešais reizinājums ir arī pustiešais.

1.6. teorēma. Dots, ka $N \trianglelefteq G$, $A \leq G$. Sekojošie apgalvojumi ir ekvivalenti:

1. $N \cap A = \{e\}$ un $G = NA$ $(G = N \rtimes A)$;
2. $N \cap A = \{e\}$ un $G = AN$;
3. $\forall g \in G$ ir viennozīmīgi izsakāms formā

$$g = ha, \text{ kur } h \in N, a \in A;$$

4. $\forall g \in G$ ir viennozīmīgi izsakāms formā

$$g = a'h', \text{ kur } h' \in N, a' \in A.$$

PIERĀDĪJUMS

<u>1. $\iff$ 2.</u>

$G = NA \implies \forall g \in G$ izpildās nosacījums $g = ha$, kur $h \in N$, $a \in A \implies$

$$g = ha = a\underbrace{a^{-1}ha}_{\in N} = ah' \in AN.$$

Ja $G = AN$, tad $\forall g \in G$ izpildās nosacījums $g = a'h'$, kur $h' \in N$, $a' \in A \implies$

$$g = a'h' = \underbrace{a'h'a'^{-1}}_{\in N}a' = h''a' \in NA.$$

<u>1. $\iff$ 3.</u> Pieņemsim, ka $N \cap A = \{e\}$ un $G = NA$. Pieņemsim, ka $\exists g \in G$, kurš ir izsakāms kā reizinājums divos veidos:

$$g = ha = \widetilde{h}\widetilde{a}, \text{ kur } h, \widetilde{h} \in N, a, \widetilde{a} \in A.$$

Pārnesīsim elementus tā, lai katrā pusē būtu vienas apakšgrupas elementi:

$$ha = \widetilde{h}\widetilde{a} \iff \underbrace{\widetilde{h}^{-1}h}_{\in N} = \underbrace{\widetilde{a}a^{-1}}_{\in A}.$$

Seko, ka $\widetilde{h}^{-1}h = \widetilde{a}a^{-1} = e \implies h = \widetilde{h}$ un $a = \widetilde{a}$.

2. $\iff$ 4. Pierāda līdzīgi. ■

1.6. piezīme. $\begin{cases} |G| < \infty \\ G = N \rtimes A \end{cases} \implies |G| = |N| \cdot |A|.$

1.2.2. Grupu automorfismi

Par grupas *automorfismu* sauc grupu izomorfismu $G \to G$. Visu G automorfismu kopu apzīmē ar $Aut(G)$. Tā ir grupa ar funkciju kompozīcijas operāciju.

$\eta \in Aut(G)$ sauksim par *iekšēju automorfismu*, ja

$$\exists\, a \in G: \ \eta(g) = aga^{-1} = \eta_a(g)$$

Var redzēt, ka

$$\eta_a(gg') = a(gg')a^{-1} = (aga^{-1})(ag'a^{-1}) = \eta_a(g)\eta_a(g').$$

Fakti:

- Visu iekšējo automorfismu kopa $Inn(G)$ veido normālu apakšgrupu: $Inn(G) \trianglelefteq Aut(G)$.
- Faktorgrupu $Aut(G)/Inn(G) = Out(G)$ sauc par *ārējo automorfismu grupu.*
- $Inn(G) \simeq G/Z(G)$.

1.2.3. Ārējais pustiešais reizinājums

Dotas grupas N, A un grupu homomorfisms $\varphi : A \to Aut(N)$. Apzīmēsim $\varphi(a)(g) = \varphi_a(g)$. Izpildās nosacījumi

$$\varphi_a(gg') = \varphi_a(g)\varphi_a(g'), \forall a, g, g',$$

$$\varphi_{ab}(g) = \varphi_a(\varphi_b(g)).$$

Kopā $N \times A$ definēsim šādu operāciju:

$$(h,a)(h',a') = (h\varphi_a(h'), aa').$$

Sauksim iegūto struktūru par N un A *ārējo pustiešo reizinājumu* - $N \rtimes_\varphi A$.

1.7. teorēma. $N \rtimes_\varphi A$ ir grupa.

PIERĀDĪJUMS

Asociativitāte

No vienas puses:

$$((h,a)(h',a'))(h'',a'') = (h\varphi_a(h'), aa')(h'',a'') =$$

$$(h\varphi_a(h')\varphi_{aa'}(h''), aa'a'') = \boxed{(h\varphi_a(h')\varphi_a(\varphi_{a'}(h'')), aa'a'').}$$

No otras puses:

$$(h,a)((h',a')(h'',a'')) = (h,a)(h'\varphi_{a'}(h''), a'a'') =$$

$$(h\varphi_a(h'\varphi_{a'}(h'')), aa'a'') = \boxed{(h\varphi_a(h')\varphi_a(\varphi_{a'}(h'')), aa'a'').}$$

<u>Vienības elements</u> Redzam, ka

$$(h, a)(e, e) = (h\varphi_a(e), ae) = (h, e),$$
$$(e, e)(h, a) = (e\varphi_e(h), ea) = (h, a).$$

Seko, ka (e, e) ir vienības elements.

<u>Inversais elements</u> Pierādīsim, ka

$$(h, a)^{-1} = (\varphi_a^{-1}(h^{-1}), a^{-1}) = (\varphi_{a^{-1}}(h^{-1}), a^{-1}).$$

Redzam, ka

$$(h, a)(\varphi_{a^{-1}}(h^{-1}), a^{-1}) = (h\varphi_a(\varphi_{a^{-1}}(h^{-1})), aa^{-1}) =$$
$$(h\varphi_{aa^{-1}}(h^{-1}), e) = (h\varphi_e(h^{-1}), e) = (hh^{-1}, e) = (e, e).\blacksquare$$

1.7. piezīme. $G = N \rtimes A$ (iekšēji) $\implies \varphi_a(h) = aha^{-1}$.

1.8. piezīme. Ja $\forall a \in A$ $\varphi(a) = \mathrm{id}$, tad iegūsim tiešo reizinājumu.

1.3. Zappa-Szep reizinājums (neobligātā lasīšana)

Ja $\begin{cases} H \leq G \\ A \leq G \\ H \cap A = \{e\} \\ G = HA \end{cases}$, tad saka, ka G ir H un A *(iekšējais) Zappa-Szep reizinājums* - $G = H \bowtie A$.

1.3. piemērs.

1.8. teorēma. Dots, ka $H \leq G$, $A \leq G$. Sekojošie apgalvojumi ir ekvivalenti:

1. $H \cap A = \{e\}$ un $G = HA$ $(G = H \bowtie A)$;
2. $\forall g \in G$ ir viennozīmīgi izsakāms formā

$$g = ha, \text{ kur } h \in H, a \in A.$$

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka $H \cap A = \{e\}$ un $G = HA$. Pieņemsim, ka $\exists g \in G$, kurš ir izsakāms kā reizinājums divos veidos:

$$g = ha = \widetilde{h}\widetilde{a}, \text{ kur } h, \widetilde{h} \in H, a, \widetilde{a} \in A.$$

Pārnesīsim elementus tā, lai apvienotu vienas apakšgrupas elementus:

$$ha = \widetilde{h}\widetilde{a} \iff \underbrace{\widetilde{h}^{-1}h}_{\in H} = \underbrace{\widetilde{a}a^{-1}}_{\in A}.$$

Seko, ka

$$\widetilde{h}^{-1}h = \widetilde{a}a^{-1} = e \implies h = \widetilde{h}, a = \widetilde{a}. \blacksquare$$

2. 5.mājasdarbs

5.1 Atrodiet visas apakšgrupas šādām aditīvajām grupām:
   (a) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$;
   (b) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$;
   (c) $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

5.2 Izsakiet grupu $\mathbb{Z}_{12}$ kā netriviālu iekšējo tiešo reizinājumu.

5.3 G, G' - galīgas cikliskas grupas. Pierādīt, ka $G \times G'$ ir cikliska grupa $\iff$ $LKD(|G|, |G'|) = 1$. Atrodiet $G \times G'$ minimālu ģenerējošu kopu.

5.4 Pierādiet, ka dotās grupas ir nedalāmas:
   (a) Σ_3;
   (b) $\mathbb{Z}$.

5.5 G ir grupa no uzdevuma 4.5, kurā reālo skaitļu lauks tiek aizvietots ar lauku $\mathbb{F}_2$. Vai G ir izsakāma kā
   (a) tiešais reizinājums,
   (b) pustiešais reizinājums.

   Pozitīvu atbilžu gadījumā atrodiet atbilstošās apakšgrupas.

2.1. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

5.6 Atrast piemēru grupu homomorfismam $\varphi : G \to H$, kur G ir nedalāma grupa, bet H - dalāma grupa.

5.7 Izpētīt attiecībā uz dalāmību un pustiešo dalāmību šādas grupas:

(a) $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$;
(b) $GL(n, k)$, $SL(n, k)$;
(c) Σ_n, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.