DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Algebriskās struktūras

4.lekcija - neobligātais papildmateriāls

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2009./2010.studiju gads

Saturs

1. Izomorfismu teorēmas

1.1. Palīgrezultāts

1.1. teorēma.

$$\begin{cases} N \trianglelefteq G \\ K \leq G \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} NK = KN \leq G \\ N \trianglelefteq KN \end{cases}$$

PIERĀDĪJUMS

$\underline{NK = KN}$

$$\begin{cases} h \in N \\ k \in K \end{cases} \Longrightarrow hk = k\underbrace{(k^{-1}hk)}_{\in N} \in KN \Longrightarrow \boxed{NK \subseteq KN}.$$

$$\begin{cases} h \in N \\ k \in K \end{cases} \Longrightarrow \Big(Nk = kN \Longrightarrow kh = h'k \in NK\Big) \Longrightarrow$$

$$\boxed{KN \subseteq NK} \Longrightarrow NK = KN.$$

$\underline{KN \leq G}$ Ja $k, k' \in K$ un $h, h' \in N$, tad

$$(kh)(k'h') = k\underbrace{(hk')}_{\in KN}h' = k(k''h'')h' = (kk'')(h''h') \in KN.$$

Ja $k \in K$ un $h \in N$, tad

$$(kh)^{-1} = h^{-1}k^{-1} \in NK = KN.$$

$e = ee \in KN$.

$N \trianglelefteq G \implies \forall a \in G$ izpildās $a^{-1}Na \subseteq N \implies \forall a \in KN$ arī izpildās $a^{-1}Na$. ■

1.2. Otrā teorēma

1.2. teorēma. (*Otrā izomorfismu teorēma*) Ja $N \trianglelefteq G$ un $K \leq G$, tad

1. $N \cap K \trianglelefteq K$,
2. $K/(N \cap K) \simeq NK/N$.

PIERĀDĪJUMS Definēsim funkciju

$$\varphi : K \to NK/N,$$

$$\varphi(k) = Nk.$$

Pierādīsim, ka φ ir korekti definēts sirjektīvs grupu homomorfisms, un $Ker(\varphi) = N \cap K$.

Atzīmēsim, ka katra blakusklase $Na \in NK/N$ ir formā Nk, kur $k \in K$. Pieņemsim, ka $a = hk$. Parādīsim, ka $Na = Nk$. Redzam, ka $h'a = h'hk \in Nk$ un $h''k = h''h^{-1}a \in Na$.

<u>Korektums</u> Ja $(H \cap K)k = (H \cap K)k'$, tad $kk'^{-1} = h \in H \cap K$. Redzam, ka

$$\varphi(k) = Nk = Nhk' = Nk' = \varphi(k').$$

<u>Sirjektivitāte</u> $\forall N(hk)$ izpildās

$$N(hk) = Nk = \varphi(k).$$

Homomorfisms Ja $k, l \in K$, tad

$$\varphi(kl) = N(kl) = (Nk)(Nl) = \varphi(k)\varphi(l).$$

Kodols $\varphi(k) = Nk = Ne \implies k \in N \implies k \in N \cap K$ un $Ker(\varphi) \subseteq N \cap K$.

Ja $k \in N \cap K$, tad

$$\varphi(k) = Nk = Ne = N,$$

tātad $N \cap K \subseteq Ker(\varphi)$ un $N \cap K = Ker(\varphi)$.
■

1.3. Trešā teorēma

1.3. teorēma. (*Trešā izomorfismu teorēma*) Ja $N \trianglelefteq G$, $K \trianglelefteq G$ un $K \leq N$, tad

1. $N/K \trianglelefteq G/K$,

2. $(G/K)/(N/K) \simeq G/N$.

PIERĀDĪJUMS Definēsim funkciju

$$\varphi : G/K \to G/N,$$

$$\varphi(Ka) = Na.$$

Pierādīsim, ka φ ir korekti definēts sirjektīvs grupu homomorfisms, kura kodols ir N/K. No šī apgalvojuma sekos abi abgalvojumi.

Korektums $Ka = Ka' \implies aa'^{-1} \in K \subseteq N \implies Na = Na' \implies$

$$\varphi(Ka) = Na = Na' = \varphi(Ka').$$

Sirjektivitāte Katram $a \in G$ izpildās $Na = \varphi(Ka)$.

Homomorfisms $\forall ab \in G$ izpildās

$$\varphi((Ka)(Kb)) = \varphi(Kab) = Nab = (Na)(Nb) = \varphi(Ka)\varphi(Kb).$$

Kodols $\varphi(Ka) = Na = Ne \implies a \in N$ un $Ka \in N/K$. Seko, ka $Ker(\varphi) \subseteq N/K$.

$a \in N \implies \varphi(Ka) = Na = Ne \implies N/K \subseteq Ker(\varphi)$ un $N/K = Ker(\varphi)$.

$\blacksquare$

1.1. piemērs. Atlikumu grupas.

1.4. Apakšgrupu atbilstība (neobligāti)

1.4. teorēma. Dots, ka $K \trianglelefteq G$, $K \leq N \leq G$. Ir spēkā šādi apgalvojumi:

1. $N/K \leq G/K$;
2. $N/K \trianglelefteq G/K \iff N \trianglelefteq G$;
3. $\forall L \leq G/K \ \exists H \in G : K \leq H, L = H/K$.

PIERĀDĪJUMS
1. Seko no trešās izomorfismu teorēmas.

2. No trešās izomorfisma teorēmas seko implikācija

$$N \trianglelefteq G \implies N/K \trianglelefteq G/K.$$

3. Definēsim $H = \{a \in G | Ka \in L\}$.

$e \in H$. Ja $a \in H$, tad $Ka \in L$, $Ka^{-1} \in L$, tādējādi $a^{-1} \in H$. Ja $a, b \in H$, tad $Ka, Kb \in L$, $Kab \in L$, tādējādi $ab \in H$. Ir pierādīts, ka $H \leq G$.

Tā kā $\forall k \in K$ izpildās $Kk = K = Ke \in L$, tad $K \leq H$.

H/K ir tās blakusklases Ka, kur $a \in H$. Pēc H konstrukcijas šādu blakusklašu kopa ir L. ■