

DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Algebriskās struktūras

3.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2009./2010.studiju gads

Saturs

1. Grupu morfismi un izomorfisms	4
1.1. Ievads	4
1.2. Svarīgākie homomorfismi un izomorfismi	8
1.2.1. Klasiskie piemēri	8
1.2.2. Kēli teorēma	9
1.2.3. Ciklisko grupu izomorfisma tipu klasifikācija	12
2. 3.mājasdarbs	16
2.1. Obligātie uzdevumi	16
2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi	16

Lekcijas mērķis:

- apgūt grupu homomorfismu pamatjēdzienus.

Lekcijas kopsavilkums:

- var definēt un pētīt funkcijas, kas saglabā operācijas - grupu homomorfismus,

Svarīgākie jēdzieni: grupu homomorfisms, izomorfisms, homomorfisma attēls un kodols.

Svarīgākie fakti un metodes: homomorfismu īpašības, Kēli teorēma, ciklisko grupu īpašības, ciklisko grupu klasifikācija.

1. Grupu morfismi un izomorfisms

1.1. Ievads

G_1, G_2 - grupas. Funkciju $f : G_1 \rightarrow G_2$ sauc par *grupu homomorfismu*, ja $\forall g, g' \in G_i$ izpildās

$$f(gg') = f(g)f(g').$$

Par grupu homomorfisma $f : G_1 \rightarrow G_2$ attēlu $Im(f)$ sauc atbilstošās funkcijas attēlu:

$$Im(f) = \bigcup_{a \in G_1} f(a).$$

Par grupu homomorfisma $f : G_1 \rightarrow G_2$ kodolu $Ker(f)$ sauc maksimālo G_1 apakškopu, kuras katra elementa attēls ir vienības elements:

$$Ker(f) = \{a \in G_1 | f(a) = e_{G_2}\}.$$

Bijektīvu grupu homomorfismu sauc par *grupu izomorfismu*. Grupu G_1 un G_2 izomorfismu apzīmēsim ar pierakstu $G_1 \simeq G_2$.

Izomorfismu $G \rightarrow G$ sauc par G automorfismu.

Izomorfismi saglabā operācijas struktūru (operācijas tabulu), tikai pārāpzmē elementus un operāciju.

1.1. piemērs. $\forall G$ vienības funkcija id_G ir izomorfisms.

$\forall G_1, G_2$ konstantā funkcija $f : G_1 \rightarrow G_2$, $f(g) = e_{G_2}$ ir grupu homomorfisms.

$\forall H \leq G$ ir definēts iekļaušanas homomorfisms $\iota_H : H \rightarrow G$.

$\forall a \in G$ ir definēts konjugācijas homomorfisms $G \rightarrow G$, $g \mapsto aga^{-1}$.

1.1. teorēma. $f : G \rightarrow H$ ir grupu homomorfisms.

1. f ir izomorfisms $\implies f^{-1}$ ir izomorfisms.
2. $f(e_G) = e_H$.
3. $f(a^{-1}) = f(a)^{-1}$.
4. $\text{Im}(f) \leq H$, $\text{Ker}(f) \leq G$.
5. $|G| < \infty \implies |\text{Im}(f)| < \infty$.

6. G - komutatīva grupa $\implies \text{Im}(f)$ - komutatīva grupa.

PIERĀDĪJUMS

1. f ir bijektīvs homomorfisms ar inverso funkciju $f^{-1} : H \rightarrow G$.

Pieņemsim, ka $\left\{ \begin{array}{l} f(a) = b \\ f(a') = b' \end{array} \right.$ (seko, ka $\left\{ \begin{array}{l} f^{-1}(b) = a \\ f^{-1}(b') = a' \end{array} \right.$.)

Redzam, ka

$$\boxed{f^{-1}(bb')} = f^{-1}(f(a)f(a')) = f^{-1}(f(aa')) = (f^{-1} \circ f)(aa') = \text{id}_G(aa') = aa' = \boxed{f^{-1}(b)f^{-1}(b')}.$$

2. $e_G e_G = e_G \implies f(e_G e_G) = f(e_G) f(e_G) = f(e_G)$

$$\implies f(e_G) f(e_G) f(e_G)^{-1} = f(e_G) f(e_G)^{-1} \implies f(e_G) = e_H.$$

$$3. aa^{-1} = e_G \implies$$

$$f(aa^{-1}) = f(a) \underbrace{f(a^{-1})}_{=f(a)^{-1}} = f(e_G) = e_H.$$

$$4. \begin{cases} b = f(a) \\ b' = f(a') \end{cases} \implies \begin{cases} bb' = f(a)f(a') = f(aa') \in Im(f) \\ b^{-1} = f(a^{-1}) \in Im(f) \end{cases}$$

Papildus tam $e_H = f(e_G) \in Im(f)$. Seko, ka $Im(f) \leq H$.

$$f(a) = f(a') = e_H \implies \begin{cases} f(aa') = f(a)f(a') = e_H e_H = e_H \\ f(a^{-1}) = f(a)^{-1} = e_H^{-1} = e_H \end{cases}$$

Papildus tam $e_G \in Ker(f)$. Seko, ka $Ker(f) \leq G$.

$$5. |Im(f)| \leq |G| < \infty.$$

$$6. \forall b, b' \in Im(f) \exists a, a' \in G : b = f(a), b' = f(a') \implies$$

$$\boxed{bb'} = f(a)f(a') = f(aa') = f(a'a) = f(a')f(a) = \boxed{b'b}. \blacksquare$$

1.2. piemērs. $(\mathbb{Z}, +) \simeq (G, \times)$, kur $G = \langle a \rangle = \{1, a, a^{-1}, a^2, a^{-2}, \dots\}$, $a > 1$.

1.2. Svarīgākie homomorfismi un izomorfismi

1.2.1. Klasiskie piemēri

Aditīvās un multiplikatīvās skaitļu grupas

$\forall m \in \mathbb{Z}$ ir definēts homomorfisms "redukcija mod m "

$$\pi_m : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}.$$

$\forall a \in \mathbb{R}(\text{vai } \mathbb{C}) \setminus \{0\}$ ir definēts eksponencēšanas homomorfisms

$$\exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$x \mapsto a^x.$$

Moduļa homomorfisms

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$z \mapsto |z|.$$

Matricu multiplikatīvās grupas

$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall$ laukam k ir definēts *determinanta homomorfisms*

$$\det : GL(n, k) \longrightarrow k \setminus \{0\},$$

$$\mathbf{A} \mapsto \det(\mathbf{A}).$$

Permutāciju grupas

$\forall \Sigma_n$ ir definēts *paritātes (zīmes) homomorfisms*

$$\epsilon : \Sigma_n \longrightarrow (\{1, -1\}, \times),$$

$$\sigma \mapsto \epsilon(\sigma) = (-1)^{n-m},$$

kur m ir σ ciklu skaits.

1.2.2. Kēli teorēma

1.2. teorēma. $f : G \rightarrow H$ -injektīvs homomorfisms $\implies G \simeq Im(f)$.

PIERĀDĪJUMS f ir grupu homomorfisms, kas sirjektīvi attēlo G uz $Im(f)$. f ir injektīva funkcija $\implies f : G \rightarrow Im(f) \leq H$ ir bijektīva funkcija. ■

1.3. teorēma. (*Kēli (Cayley) teorēma*) Katra grupa ir izomorfa kādai permutāciju grupai.

PIERĀDĪJUMS G - grupa. Apskatīsim $Bij(G, G)$ - kopas G permutāciju kopu.

Atradīsim injektīvu grupu homomorfismu $\varphi : G \rightarrow Bij(G, G)$. Saskaņā ar iepriekšējo teorēmu sekos, ka $G \simeq Im(\varphi)$.

Pierādīsim, ka katram $g \in G$ funkcija

$$\begin{aligned} f_g : G &\rightarrow G, \\ f_g(a) &= ga, \end{aligned}$$

ir kopas G permutācija:

- $\forall b \in G : b = g(g^{-1}b) = f_g(g^{-1}b) \implies f_g$ ir surjektīva funkcija;
- $ga_1 = ga_2 \implies g^{-1}ga_1 = g^{-1}ga_2 \implies a_1 = a_2 \implies f_g$ ir injektīva funkcija.

Definēsim funkciju

$$\begin{aligned}\varphi : G &\rightarrow \text{Bij}(G, G), \\ \varphi(g) &= f_g.\end{aligned}$$

Pierādīsim, ka φ ir injektīvs grupu homomorfisms.

Homomorfisms Redzam, ka

$$\begin{aligned}\varphi(g_1g_2)(a) &= f_{g_1g_2}(a) = g_1g_2a = g_1(g_2a) = f_{g_1}(f_{g_2}(a)) = \\ &= (f_{g_1} \circ f_{g_2})(a) = (\varphi(g_1) \circ \varphi(g_2))(a).\end{aligned}$$

Injektivitāte $\varphi(g_1) = \varphi(g_2) \implies \forall a \in G$ izpildās

$$\varphi(g_1)(a) = g_1a = \varphi(g_2)(a) = g_2a \implies g_1 = g_2. \blacksquare$$

1.1. piezīme. Kēli teorēma $\implies (|G| < \infty \implies G \simeq H \leq \Sigma_{|G|})$.

1.2.3. Ciklisko grupu izomorfisma tipu klasifikācija

Katram $g \in G$ ar $\langle g \rangle$ apzīmēsim apakšgrupu, kuru ģenerē g :

$$\langle g \rangle = \{a \in G \mid a = g^n\}.$$

$g \in G$ kārtu apzīmēsim ar $\text{ord}(g)$.

1.4. teorēma. G ir grupa, $g \in G$. Ir spēkā šādi apgalvojumi:

1. $(\exists n, m \in \mathbb{Z}, n \neq m : g^n = g^m) \implies (\text{ord}(g) < \infty)$;
2. $(\text{ord}(g) = k) \implies (g^l = e \iff l \equiv 0 \pmod{k})$;
3. $(\text{ord}(g) = k) \implies (g^{l_1} = g^{l_2} \iff l_1 \equiv l_2 \pmod{k})$;

PIERĀDĪJUMS

$$1. g^n = g^m \implies g^{n-m} = g^{m-m} = e \implies \text{ord}(g) \leq |n - m|.$$

$$2. l \equiv 0 \pmod{k} \implies k \mid l \implies l = qk \implies$$

$$g^l = g^{qk} = (g^k)^q = e^q = e.$$

Pieņemsim, ka $g^l = e \implies l = qk + r$, kur $0 \leq r < k$. Redzam, ka

$$g^l = g^{qk+r} = g^{qk} g^r = (g^k)^q g^r = g^r = e \implies r = 0.$$

3. Izmantojam dalīšanu ar atlikumu līdzīgi kā iepriekšējā punktā.



1.5. teorēma.

1. $\text{ord}(g) = k \implies \langle g \rangle = \{e = g^0, g, g^2, \dots, g^{k-1}\}$.
2. $\text{ord}(g) = \infty \implies \langle g \rangle = \{e = g^0, g^{\pm 1}, g^{\pm 2}, \dots\}$.

1.6. teorēma. $G = \langle g \rangle$ ir bezgalīga cikliska grupa $\implies G \simeq \mathbb{Z}$.

PIERĀDĪJUMS Definēsim funkciju

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\rightarrow G, \\ f(n) &= g^n. \end{aligned}$$

Pierādīsim, ka f ir bijektīvs grupu homomorfisms.

Sirjektivitāte G ir cikliska grupa $\implies \forall a \in G \exists m \in \mathbb{Z} :$

$$a = g^m = f(m).$$

Injektivitāte $f(n_1) = f(n_2) \implies g^{n_1} = g^{n_2}$. Pieņemsim, ka $n_1 > n_2$, tad

$$g^{n_1} g^{-n_2} = g^{n_1 - n_2} = g^{n_2} g^{-n_2} = e.$$

Seko, ka $\text{ord}(g) < \infty$ un tādējādi g nevar būt visas bezgalīgās grupas ģenerators.

Homomorfisms $f(n_1 + n_2) = g^{n_1 + n_2} = g^{n_1} g^{n_2} = f(n_1) f(n_2)$. ■

1.7. teorēma. $\begin{cases} G = \langle g \rangle \\ |G| = k \end{cases} \implies G \simeq \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}.$

PIERĀDĪJUMS Definēsim funkciju

$$f : \mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \rightarrow G,$$

$$f(n) = g^n.$$

Pierādīsim, ka f ir bijektīvs grupu homomorfisms.

Sirjektivitāte $G = \langle g \rangle \implies \forall a \in G \exists m \in \mathbb{Z} :$

$$a = g^m = f(m).$$

Injektivitāte $f(n_1) = f(n_2) \implies g^{n_1} = g^{n_2} \implies$

$$g^{n_1} g^{-n_2} = g^{n_1 - n_2} = g^{n_2} g^{-n_2} = e \implies n_1 \equiv n_2 \pmod{k}.$$

Homomorfisms $f(n_1 + n_2) = g^{n_1 + n_2} = g^{n_1} g^{n_2} = f(n_1) f(n_2) \blacksquare$

1.3. piemērs. $(\langle -1 \rangle, \cdot) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)$, $(\langle i \rangle, \cdot) \simeq (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, +)$.

2. 3.mājasdarbs

2.1. Obligātie uzdevumi

3.1 G - grupa, $t \in G$ - fiksēts elements. Definēsim kopā G jaunu bināru operāciju \bullet :

$$a \bullet b = atb.$$

Pierādīt, ka (G, \bullet) ir grupa un $(G, \bullet) \simeq G$.

3.2 G ir komutatīva grupa, T - to G elementu apakškopa, kuriem ir galīgas kārtas. Pierādīt, ka $T \leq G$ (*torsionapakšgrupa*).

3.3 Atrast visas cikliskās apakšgrupas grupā $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}, +)$.

2.2. Paaugstinātas grūtības un pētnieciska rakstura uzdevumi

3.4 Pierādiet, ka $(\mathbb{Z}[X], +) \simeq (\mathbb{Q}^+, \times)$, kur \mathbb{Q}^+ ir pozitīvo racionālo skaitļu kopa.