DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Algebriskās struktūras

10.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2009./2010.studiju gads

Saturs

Lekcijas mērķis:

- apgūt LA matricu pielietojumus un LA struktūras pamatus.

Lekcijas kopsavilkums:

- LA matricas var izmantot LA kompozīcijas un bāzu maiņas aprēķināšanai,
- LA eksistē telpu sadalījums tiešajās summās, kas atbilst attēlam kodolam,
- lineāram operatoram var definēt un pētīt svarīgus *īpašvektoru, īpašvērtību un raksturīgā polinoma* jēdzienus.

Svarīgākie jēdzieni: invarianta apakštelpa, īpašvektors, īpašvērtība.

Svarīgākie fakti un metodes: vienības attēlojuma matricas pieraksts, LA kompozīcijas aprēķināšana izmantojot matricas, LA matrica maiņa pārejot uz jaunu bāzi, LA izomorfismu teorēma, īpašvērtību aprēķināšana ar raksturīgā polinoma palīdzību.

1. Bāzes maiņa lineārajās telpās

1.1. Bāzes maiņa kā lineārs attēlojums

Strādājot ar lineārajām telpām var rasties nepieciešamība pāriet uz jaunu bāzi. Šāda pārveidojuma rezultātā ir jāmaina elementu koordinātes un lineāro attēlojumu matricas.

Pieņemsim, ka ir dota galīgi dimensionāla lineāra telpa L un divas sakārtotas bāzes

$$B = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\},$$
$$B' = \{\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n\}.$$

Apskatīsim vienības attēlojumu $\mathrm{id}_L : L \to L$ un atradīsim tā matricu S attiecībā uz bāzēm B (L kā definīcijas apgabalā) un B' (L kā vērtību apgabalā):

$$\begin{cases} \mathrm{id}_L(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 = s_{11}\mathbf{e}'_1 + s_{12}\mathbf{e}'_2 + ... + s_{1n}\mathbf{e}'_n \\ \mathrm{id}_L(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 = s_{21}\mathbf{e}'_1 + s_{22}\mathbf{e}'_2 + ... + s_{2n}\mathbf{e}'_n \\ ... \\ \mathrm{id}_L(\mathbf{e}_n) = \mathbf{e}_n = s_{n1}\mathbf{e}'_1 + s_{n2}\mathbf{e}'_2 + ... + s_{nn}\mathbf{e}'_n \end{cases}$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{21} & \dots & s_{n1} \\ s_{12} & s_{22} & \dots & s_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{1n} & s_{2n} & \dots & s_{nn} \end{bmatrix}$$

Inversā matrica $\mathbf{S}^{-1}$ ir vienības attēlojuma matrica no L ar bāzi B' uz L ar bāzi B:

$$\begin{cases} \mathrm{id}_L(\mathbf{e}'_1) = \mathbf{e}_1 = u_{11}\mathbf{e}_1 + u_{12}\mathbf{e}_2 + \dots + u_{1n}\mathbf{e}_n \\ \mathrm{id}_L(\mathbf{e}'_2) = \mathbf{e}_2 = u_{21}\mathbf{e}_1 + u_{22}\mathbf{e}_2 + \dots + u_{2n}\mathbf{e}_n \\ \dots \\ \mathrm{id}_L(\mathbf{e}'_n) = \mathbf{e}_n = u_{n1}\mathbf{e}_1 + u_{n2}\mathbf{e}_2 + \dots + u_{nn}\mathbf{e}'_n \end{cases}$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} & \dots & u_{n1} \\ u_{12} & u_{22} & \dots & u_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{1n} & u_{2n} & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Ja ir dots elements

$$\mathbf{l} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + ... + \alpha_n\mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ ... \\ \alpha_n \end{bmatrix},$$

tad $\mathbf{Sl}$ ir $\mathbf{l}$ koordinātu kolonna attiecībā uz bāzi B'.

Ja ir dots elements

$$\mathbf{l}' = \beta_1\mathbf{e}'_1 + ... + \beta_n\mathbf{e}'_n = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ ... \\ \beta_n \end{bmatrix},$$

tad $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{l}' = \mathbf{U}\mathbf{l}'$ ir $\mathbf{l}'$ koordinātu kolonna attiecībā uz bāzi B.

1.1. piemērs. $\begin{cases} \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}'_1 + 2\mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}'_1 - \mathbf{e}'_2 \end{cases}$, $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. Elements $\mathbf{l} = 2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2 = (2,3)^T$ bāzē B' ir vienāds ar

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Izsakot B' ar B palīzību, iegūsim

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1' = \frac{1}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_2' = \frac{1}{3}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{3}\mathbf{e}_2 \end{cases} \Longrightarrow \mathbf{S}^{-1} = \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

1.2. Lineāru attēlojumu kompozīcija un matricu reizināšana

Ir dotas lineāras telpas L, T un Z ar bāzēm

$$B_L = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\},$$

$$B_T = \{\mathbf{t}_1, ..., \mathbf{t}_m\},$$

$$B_Z = \{\mathbf{z}_1, ..., \mathbf{z}_l\}$$

un lineāri attēlojumi

$$f : L \to T,$$

$$g : T \to Z$$

ar matricām **F** un **G**.

Var definēt kompozīciju

$$g \circ f : L \to Z,$$
$$(g \circ f)(\mathbf{l}) = g(f(\mathbf{l})).$$

1.1. teorēma. Lineāru attēlojumu kompozīcija ir lineārs attēlojums.

PIERĀDĪJUMS Īpašību pārbaude. ■

1.2. teorēma. $g \circ f$ matrica ir vienāda ar $\mathbf{GF}$.

PIERĀDĪJUMS Ir dots, ka

$$f(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^{m} f_{ji}\mathbf{t}_j,$$

$$g(\mathbf{t}_j) = \sum_{k=1}^{l} g_{kj}\mathbf{z}_k.$$

Redzam, ka

$$(g \circ f)(\mathbf{e}_i) = g\Big(f(\mathbf{e}_i)\Big) = g\Big(\sum_{j=1}^{m} f_{ji}\mathbf{t}_j\Big) = \sum_{j=1}^{m} f_{ji} g(\mathbf{t}_j) =$$

$$\sum_{j=1}^{m} f_{ji} \sum_{k=1}^{l} g_{kj}\mathbf{z}_k = \sum_{k=1}^{l} \underbrace{\Big(\sum_{j=1}^{m} g_{kj} f_{ji}\Big)}_{=h_{ki}} \mathbf{z}_k = \sum_{j=1}^{m} h_{ki}\mathbf{z}_k. \blacksquare$$

1.3. Lineāra attēlojuma matricas maiņa

Strādājot ar lineārajiem attēlojumiem, ir lietderīgi mainīt bāzes tā, lai jaunajās bāzēs lineāro attēlojumu matricas ir vieglāk pētāmas un labāk attēlo lineārā attēlojuma struktūru un īpašības.

Pieņemsim, ka ir dotas galīgi dimensionālas lineāras telpas L un

T, ar bāzēm

$$B_L = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\},$$

$$B_T = \{\mathbf{t}_1, ..., \mathbf{t}_m\}.$$

Pieņemsim, ka ir dots lineārs attēlojums $f : L \to T$, kura matrica attiecībā uz dotajām bāzēm ir $\mathbf{F}$ ($m \times n$ matrica).

Noskaidrosim, kā mainās f matrica, ja notiek pāreja uz citām bāzēm telpās L un T.

Pieņemsim, ka telpās L un T ir dotas citas bāzes -

$$B'_L = \{\mathbf{e}'_1, ..., \mathbf{e}'_n\},$$

$$B'_T = \{\mathbf{t}'_1, ..., \mathbf{t}'_m\}$$

ar atbilstošajām pārejas matricām S un V.

Lai atrastu f matricu $\tilde{\mathbf{F}}$ attiecībā uz bāzēm B'_L un B'_T, attēlosim visus attēlojumus vienā diagrammā:

$$
\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "f"] & T \arrow[d, "V"] \\
L \arrow[u, "S^{-1}"] \arrow[r, "f"] & T
\end{tikzcd}
$$

Redzam, ka

$$\tilde{\mathbf{F}} = \mathbf{VFS}^{-1}.$$

1.1. piezīme. Ja $L = T$, tad iegūsim, ka $\tilde{F} = \mathbf{SFS}^{-1}$.

1.2. piezīme. Ja visas matricas ir kvadrātveida, tad

$$\det(\tilde{\mathbf{F}}) = \det(\mathbf{SFS}^{-1}) = \det(\mathbf{S})\det(\mathbf{F})\det(\mathbf{S}^{-1}) = \\ \underbrace{\det(\mathbf{S})\det(\mathbf{S}^{-1})}_{=1}\det(\mathbf{F}) = \det(\mathbf{F}).$$

1.2. piemērs.

$$\mathbf{S} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{S}^{-1} = \left[\begin{array}{cc} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{array} \right]$$

Ja lineāra operatora $f : L \to L$ matrica sākotnējā bāzē ir

$$\mathbf{F} = \left[\begin{array}{cc} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{array} \right],$$

tad jaunajā bāzē tā ir

$$\tilde{\mathbf{F}} = \left[\begin{array}{cc} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{array} \right].$$

2. Lineāro attēlojumu struktūra un invarianti

2.1. Lineārā attēlojuma struktūra

2.1.1. Izomorfismu teorēma

2.1. teorēma. Dots lineārs attēlojums $f : L \to T$.

1. LT L un T eksistē sadalījumi (iekšējās) tiešajās summmās

$$L = L_0 \oplus L_1,$$

$$T = T_0 \oplus T_1$$

   tādi, ka $Ker(f) = L_0$ un f sašaurinājums uz L_1 ir izomorfisms uz T_1.

2. Telpās L un T eksistē tādas bāzes, attiecībā uz kurām f matrica ir

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_n & \mathbf{O}_{nm} \\ \mathbf{O}_{kn} & \mathbf{O}_m \end{bmatrix},$$

kur $n = \dim(L_1) = \dim(T_1)$, $m = \dim(L_0)$, $k = \dim(T_0)$.

PIERĀDĪJUMS
1. Definēsim $L_0 = Ker(f)$ un $T_1 = Im(f)$.

Saskaņā ar agrāk pierādītu teorēmu eksistē apakštelpas L_1 un T_0 tādas, ka

$$L = L_0 \oplus L_1,$$
$$T = T_0 \oplus T_1.$$

Pierādīsim, ka f sašaurinājums uz L_1 ir izomorfisms uz T_1.

Injektivitāte $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}') \implies f(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \mathbf{0} \implies \mathbf{x} - \mathbf{x}' \in L_0$.

$\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in L_1 \implies \mathbf{x} - \mathbf{x}' \in L_1 \implies \mathbf{x} - \mathbf{x}' = \mathbf{0}$, jo $L_0 \cap L_1 = \{\mathbf{0}\}$.

Sirjektivitāte $\forall \mathbf{y} \in T_1 = Im(f)\ \exists\ \mathbf{x} \in L$ tāds, ka $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$.

$L = L_0 \oplus L_1 \implies$

$$\mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{x}_0}_{\in L_0} + \underbrace{\mathbf{x}_1}_{\in L_1}.$$

$$\Longrightarrow\ f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_0) + f(\mathbf{x}_1) = f(\mathbf{x}_1) = \mathbf{y}.$$

2. Izvēlēsimies bāzi

$$B_1 = \{\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n\}$$

apakštelpā L_1, bāzi

$$B_2 = \{\mathbf{e}_{n+1}, ..., \mathbf{e}_{n+m}\}$$

apakštelpā $L_0 \Longrightarrow B_1 \cup B_2$ ir bāze telpai L.

Definēsim $\mathbf{t}_i = f(\mathbf{e}_i)$, $1 \le i \le n$. Kopa $B_3 = \{\mathbf{t}_1, ..., \mathbf{t}_n\}$ veido bāzi apakštelpai T_1. Ja eksistētu netriviāla kombinācija

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(\mathbf{e}_i) = \mathbf{0},$$

tad sekotu, ka

$$\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i \mathbf{e}_i) = f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{e}_i) = 0.$$

Sekotu, ka $\mathbf{l} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{e}_i \in Ker(f) \implies \mathbf{l} = \mathbf{0}$. Sekotu, ka B_1 nav L_1 bāze.

Izvēlēsimies jebkuru bāzi B_4 telpai T_0 un izveidosim bāzi $B_3 \cup B_4$ telpai T.

Pārbaudīsim, ka attiecībā uz bāzēm $B_1 \cup B_2$ un $B_3 \cup B_4$ dotā f matrica ir pareiza:

$$f(e_i) = t_i, \forall 1 \leq i \leq n,$$

$$f(e_i) = 0, \forall n+1 \leq i \leq n+m. \blacksquare$$

2.2. Lineāro operatoru struktūra

Šajā sadaļā apskatīsim lineāros operatorus $f : L \to L$.

Ja $p(X) = p_n X^n + ... + p_0 \in k[X]$, tad definēsim

$$p(f) = p_n f^n + ... + p_0 \cdot \mathrm{id}$$

un

$$p(F) = p_n F^n + ... + p_0 \cdot E.$$

2.2.1. Invariantās apakštelpas

Dots lineārs operators $f : L \to L$.

Apakštelpu $U \leq L$ sauc par *f-invariantu apakštelpu*, ja

$$\mathbf{u} \in U \implies f(\mathbf{u}) \in U.$$

Citiem vārdiem sakot $f(U) \subseteq U$.

Ja U ir f-invarianta apakštelpa, tad $\forall\ p(X) \in k[X]$ izpildās

$$p(f)(U) \subseteq U,$$

to pierāda ar matemātisko indukciju pēc p pakāpes:

$$f^2(U) = f(f(U)) \subseteq f(U) \subseteq U, f^3(U) \subseteq U,$$

$$(\lambda f + \mu f^2)(U) \subseteq U, ...$$

2.1. piemērs. $Ker(f)$, $Im(f)$ - invariantas apakštelpas. Vektori, funkcijas.

Ja U ir f-invarianta, tad eksistē L bāze, attiecībā uz kuru f matrica $\mathbf{F}$ ir trijstūrveida:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{O}_{mn} & \mathbf{C} \end{bmatrix},$$

kur $n = \dim(U)$, $m = \dim(L) - \dim(U)$. Izvēlamies jebkuru bāzi apakštelpā U, papildinām to līdz U bāzei.

$B = 0 \implies L = U \oplus V$, kur V arī ir f-invarianta apakštelpa.

2.2.2. Īpašvērtības un īpašvektori

Viendimensionālas f-invariantas apakštelpas bāzes elementu sauc par *īpašvektoru*. Citiem vārdiem sakot, $\mathbf{l} \neq 0$ ir īpašvektors, ja $\exists\ \lambda \in k$ (*īpašvērtība*):

$$f(\mathbf{l}) = \lambda \mathbf{l}.$$

Redzam, ka $f^n(\mathbf{l}) = \lambda^n \mathbf{l}$ un $p(f)(\mathbf{l}) = p(\lambda)\mathbf{l}$.

2.2. piemērs.

Apzīmēsim ar V^λ visu λ-īpašvektoru kopu.

2.2. teorēma. V^λ ir apakštelpa.

PIERĀDĪJUMS $f(\mathbf{l}) = \lambda\mathbf{l} \implies f(\mu\mathbf{l}) = \mu f(\mathbf{l}) = \mu\lambda\mathbf{l} = \lambda(\mu\mathbf{l})$.
$f(\mathbf{l}+\mathbf{l}') = f(\mathbf{l}) + f(\mathbf{l}') = \lambda\mathbf{l} + \lambda\mathbf{l}' = \lambda(\mathbf{l}+\mathbf{l}')$. ■

2.2.3. Raksturīgais polinoms un tā pielietojumi

$\mathbf{l}$ ir f īpašvektors $\iff (f - \lambda\,\mathrm{id})\mathbf{l} = 0$.

$\mathbf{l}$ ir f īpašvektors ar īpašvērtību $\lambda \implies Ker(f - \lambda\,\mathrm{id}) \neq \{0\} \implies$

$$\det(\mathbf{F} - \lambda\mathbf{E}) = 0,$$

kur $\mathbf{F}$ ir f matrica kādā bāzē.

Dots lineārs attēlojums $f : L \to L$, L bāze B un f matrica $\mathbf{F}$ bāzē B. Par F un f (bāzē B) *raksturīgo polinomu* sauc

$$P(t) = \det(t\mathbf{E} - \mathbf{F}) \in k[t].$$

2.3. piemērs.

2.3. teorēma.

1. Lineāra attēlojuma raksturīgais polinoms nav atkarīgs no bāzes.
2. $\lambda \in k$ ir f īpašvērtība $\iff P(\lambda) = 0$.

PIERĀDĪJUMS

1. Pārejot uz jaunu bāzi ar bāzes maiņas matricu $\mathbf{S}$, f matrica

mainās no $\mathbf{F}$ uz $\mathbf{S}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{S}$. Redzam, ka

$$\det(\mathbf{t}\mathbf{E}-\mathbf{S}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{S}) = \det(\mathbf{S}^{-1}(t\mathbf{E})\mathbf{S}-\mathbf{S}^{-1}\mathbf{F}\mathbf{S}) =$$
$$\det(\mathbf{S}^{-1}(t\mathbf{E}-\mathbf{F})\mathbf{S}) = \det(\mathbf{S}^{-1})\det(t\mathbf{E}-\mathbf{F})\det(\mathbf{S}) =$$
$$\underbrace{\det(\mathbf{S})^{-1}det(\mathbf{S})}_{=1}\det(t\mathbf{E}-\mathbf{F}) = \det(t\mathbf{E}-\mathbf{F}).$$

2. $\lambda \in k$ ir f īpašvērtība $\Longrightarrow$

$$\exists l \in L : (f-\lambda\,\mathrm{id})l = 0 \Longrightarrow Ker(f-\lambda\,\mathrm{id}) \neq \{0\}.$$

Seko, ka $f-\lambda\,\mathrm{id}$ nav invertējams operators, tāpēc

$$\det(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{F}) = \pm\det(\mathbf{F}-\lambda\mathbf{E}) = 0.$$

$\det(\lambda\mathbf{E}-\mathbf{F}) = 0 \Longrightarrow \mathbf{F}-\lambda\mathbf{E}$ ir neinvertējama matrica $\Longrightarrow$ $Ker(f-\lambda\,\mathrm{id}) \neq \{0\} \Longrightarrow \exists$ īpašvektors ar īpašvērtību λ. ■

3. 10.mājasdarbs

3.1. Obligātie uzdevumi

10.1 Kāda būs bāzes maiņas matrica, ja notiks šādas bāzes maiņas telpā L:

(a) tiks mainīti vietām divi bāzes elementi;

(b) bāzes elementu kārtība tiks mainīta uz pretējo.

10.2 Telpā L ar bāzi $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ lineāra operatora f matrica ir

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Atrodiet f matricu bāzē $B' = \{\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3, 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3, 3\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1\}$.

10.3 L ir visu reālu polinomu telpa, kuru pakāpe nepārsniedz 3. Atrodiet atvasināšanas operatora matricu bāzē

$$\{1, (X-1), (X-1)^2, (X-1)^3\}.$$

10.4 Atrodiet dotajām matricām atbilstošo lineāro operatoru īpašvērtības un īpašvektorus:

(a)

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 9 & -4 & 1 \\ 7 & -5 & 4 \end{bmatrix}, \ \text{virs } \mathbb{R}, \mathbb{C}.$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \text{virs } \mathbb{F}_3.$$