DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Algebriskās struktūras

9.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2008./2009.studiju gads

Saturs

1. Lineārās telpas

1.1. Pamatfakti

1.1.1. Definīcija

Lineārā telpa virs lauka k - k-modulis.

Par lineāru telpu virs lauka k (k-lineāru telpu) sauc kopu L ar šādām struktūrām:

1. kopā L ir dota bināra operācija $+$ ar aditīvu pierakstu tāda, ka $(L,+)$ ir komutatīva grupa (lineārās telpas L aditīvā grupa) -
   - $(x+y)+z = x+(y+z)$,
   - $x+y = y+x$,
   - $\exists 0 \in L$ tāds, ka $x+0 = x$,
   - $\forall x \in L \exists -x$ tāds, ka $x+(-x) = 0$;
2. ir dota lauka k darbības funkcija

$$k \times L \to L,$$

   kas uzdod k-moduļa stuktūru kopā L -

- $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$,
- $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,
- $1 \cdot x = x$,
- $(\lambda\mu)x = \lambda(\mu x)$.

Ar simbolu $+$ parasti apzīmē saskaitīšanu gan laukā k, gan telpā L, cenšas nepieļaut pārpratumus.

Ja $k = \mathbb{R}(\mathbb{C})$, tad k-lineāru telpu sauc par *reālu (kompleksu) lineāru telpu.*

1.1. teorēma.

1. $0x = 0$, $\lambda 0 = 0$, $\forall x \in L, \lambda \in k$.
2. $\lambda x = 0 \iff \lambda = 0 \vee x = 0$.
3. $(-1)x = -x$.

PIERĀDĪJUMS Patstāvīgi. ■

1.1.2. Piemēri

1.1. piemērs. *Aritmētiskā (vektoru, koordinātu) telpa virs k-*

$$\underbrace{k \times ... \times k}_{\text{n reizes}} = k^n.$$

Operācijas:

- $(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$,
- $\lambda(x_1, ..., x_n) = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$.

k^n aditīvā grupa ir grupas k n eksemplāru tiešais reizinājums (tiešā summa).

Redzam, ka

- $0 = (0, ..., 0)$,
- $-(x_1, ..., x_n) = (-x_1, ..., -x_n)$.

Speciālgadījumi:

- $n = 0$, $k^0 = \{0\}$;
- $n = 1$, $k^1 = k$.

Ja $n \in \{1, 2, 3\}$ un $k \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$, tad ir iespējama ģeometriska interpretācija.

1.2. piemērs. *Funkciju $X \to k$ telpa $Fun(X, k)$.*

Operācijas:

- $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,
- $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

Redzam, ka

- $0 = 0(x)$, $\forall x \in X$,
- $(-f)(x) = -f(x)$.

Var apskatīt tikai noteikta veida funkcijas - polinomus, diferencējamas, gludas u.c.

1.3. piemērs. Dota kopa X, tās apakškopu kopa $\mathcal{P}(X)$. $(\mathcal{P}(X), \Delta)$ ir komutatīva grupa. Var definēt lauka $\mathbb{F}_2$ darbību ar šādiem nosacījumiem $\forall A \in \mathcal{P}(X)$:

- $1 \cdot A = A$,
- $0 \cdot A = 0$.

Var pārbaudīt, ka $\mathcal{P}(X)$ ir lineāra telpa virs $\mathbb{F}_2$.

Redzam, ka

- $0 = \emptyset$,
- $-A = A$.

Speciālgadījums - grafa šķautņu kopas apakškopu telpa.

1.4. piemērs. *Matricu telpa* $\mathcal{M}_{n,l}(k)$ - $n \times l$ matricas ar elementiem no lauka k.

Operācijas:

- matricu saskaitīšana,

- matricas reizināšana ar lauka elementu.

Var domāt, ka $\mathcal{M}_{n,l}(k)$ ir tas pats, kas k^{nl}, tikai elementi tiek izkārtoti tabulā, nevis rindā.

1.5. piemērs. *Lauku paplašinājumi.* Ja k, K ir lauki un eksistē injektīvs gredzenu homomorfisms $\varphi : k \to K$, tad saka, ka K ir k *paplašinājums.*

K ir k-lineāra telpa.
Operācijas:

- saskaitīšana kā definēta laukā K,
- k darbība $\forall r \in k, x \in K$

$$rx = \varphi(r)x, \forall r \in k, x \in K.$$

1.1.3. Lineārās čaulas un veidotājelementi

Ja ir doti lineāras telpas L elementi $x_1, ..., x_n$, tad par to *lineāru kombināciju ar koeficientiem* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ sauksim L elementu

$$\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

Ja vismaz viens no k elementiem $\lambda_1, ..., \lambda_n$ nav vienāds ar 0, tad lineāro kombināciju sauc par netriviālu (pretējā gadījumā par triviālu).

Ja ir dota kopa $S \subseteq L$, tad par S *lineāro čaulu (slēgumu)* sauc kopu

$$\langle S \rangle = \{x \in L | x = \lambda_1 s_1 + ... + \lambda_n s_n \text{ kur } \lambda_i \in k, s_i \in S\}.$$

Citiem vārdiem sakot, $\langle S \rangle$ satur visas iespējamās S elementu lineārās kombinācijas (ar galīgu saskaitāmo skaitu).

1.6. piemērs. Viena, divu, trīs elementu kopu čaulas.

1.2. teorēma. Katrai kopai $S \subseteq L$ kopa $\langle S \rangle$ ir k-lineāra telpa.

PIERĀDĪJUMS Aksiomu pārbaude. ■

Ja $\langle S \rangle = L$, tad saka, ka S ir L veidotājsistēma.

Divas L apakškopas S un S' sauc par ekvivalentām, ja

$$\langle S \rangle = \langle S' \rangle.$$

1.1.4. Apakštelpas

Ja $M \subseteq L$ ir L aditīvās grupas apakšgrupa, kas ir slēgta attiecībā uz k darbību, tad M sauc par L *lineāru apakštelpu*$(M \leq L)$:

1. $m, m' \in M \implies m + m' \in M$,

2. $0 \in M$,
3. $m \in M \implies -m \in M$,
4. $m \in M \implies \lambda m \in M, \forall \lambda \in k$.

1.3. teorēma.

1. $S \subseteq L \implies \langle S \rangle \leq L$.
2. $M \leq L \implies \langle M \rangle = M$.
3. $M_i \leq L, \forall i \implies \bigcap_{i=1}^{n} M_i \leq L$.

PIERĀDĪJUMS
1. $y = \sum \lambda_i s_i \wedge y' = \sum \lambda'_i s_i \implies y + y' = \sum(\lambda_i + \lambda'_i)s_i$.
$0 \in \langle S \rangle$.
$y = \sum \lambda_i s_i \implies -y = \sum(-\lambda_i)s_i$.
$y = \sum \lambda_i s_i \implies \lambda y = \sum(\lambda\lambda_i)s_i$.

2. Ja M ir apakštelpa, tad M satur visas savu elementu lineārās kombinācijas, tāpēc $\langle M \rangle \subseteq M$. No otras puses, $M \subseteq \langle M \rangle$.

3. $m, m' \in M_i, \forall i \implies m + m' \in M_i, \forall i.$
$m \in M_i, \forall i \implies \lambda m \in M_i, \forall i.$
■

1.2. Bāze un dimensionalitāte

1.2.1. Lineārā atkarība un neatkarība

Lineāras telpas L elementus $x_1, ..., x_n$ sauc par *lineāri atkarīgiem*, ja eksistē to netriviāla lineāra kombinācija, kas ir vienāda ar 0:

$$\exists \lambda_1, ..., \lambda_n : \exists \lambda_i \neq 0 \wedge \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n = 0.$$

Lineāras telpas L elementus $x_1, ..., x_n$ sauc par *lineāri neatkarīgiem*, ja tikai to triviāla lineāra kombinācija ir vienāda ar 0:

$$\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n = 0 \implies \forall i \lambda_i = 0.$$

1.4. teorēma.

1. $x_1, ..., x_n$ ir lineāri atkarīga kopa $\Longleftrightarrow$ $\exists x_i$ tāds, ka
$$x_i \in \langle x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n \rangle.$$
2. Ja S ir lineāri neatkarīga kopa un $T \subseteq S$, tad T ir lineāri neatkarīga kopa.

PIERĀDĪJUMS

1. Ja $x_1, ..., x_n$ ir lineāri atkarīga kopa, tad eksistē netriviāla lineāra kombinācija
$$\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n = 0,$$
kur $\lambda_i \neq 0$. Seko, ka
$$x_i = -\frac{1}{\lambda_i} \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} \lambda_j x_j.$$

Ja $x_i \in \langle x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n \rangle$, tad

$$x_i = \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} \mu_j x_j.$$

Seko, ka

$$\sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} \mu_j x_j - x_i = 0$$

ir netriviāla lineāra kombinācija.

2. Pieņemsim, ka $S = \{x_1, ..., x_m, ..., x_n\}$ un $T = \{x_1, ..., x_m\}$.

Ja T būtu lineāri atkarīga kopa, tad eksistē netriviāla lineāra kombinācija

$$\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_m x_m = 0,$$

kas būtu arī netriviāla lineāra kombinācija kopai S.

■

1.5. teorēma. Dots, ka $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq L$ ir lineāri neatkarīga kopa un

$\{y_1, ..., y_m\} \subseteq L$ ir patvaļīga apakškopa.

$$x_i \in \langle y_1, ..., y_m \rangle, \forall i \implies n \le m.$$

PIERĀDĪJUMS Ir dota sistēma

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_{11} y_1 + ... + \alpha_{1m} y_m \\ ... \\ x_n = \alpha_{n1} y_1 + ... + \alpha_{nm} y_m. \end{cases}$$

Pieņemsim, ka eksistē lineāra kombinācija

$$\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n = 0.$$

Pārveidosim šo lineāro kombināciju, izsakot x kā funkcijas no y:

$$\begin{aligned}\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n =\\ \lambda_1(\alpha_{11}y_1 + ... + \alpha_{1m}y_m) + ... + \lambda_n(\alpha_{n1}y_1 + ... + \alpha_{nm}y_m) =\\ (\alpha_{11}\lambda_1 + \alpha_{21}\lambda_2 + ... + \alpha_{n1}\lambda_n)y_1 + ...\\ (\alpha_{1m}\lambda_1 + \alpha_{2m}\lambda_2 + ... + \alpha_{nm}\lambda_n)y_m = 0.\end{aligned}$$

Ja $\lambda_1, ..., \lambda_n$ apmierina sistēmu

$$\begin{cases} \alpha_{11}\lambda_1 + \alpha_{21}\lambda_2 + ... + \alpha_{n1}\lambda_n = 0\\ ...\\ \alpha_{1m}\lambda_1 + \alpha_{2m}\lambda_2 + ... + \alpha_{nm}\lambda_n = 0, \end{cases}$$

tad $\lambda_1 x_1 + ... + \lambda_n x_n = 0$.

Pieņemsim, ka $n > m$. Tad sistēmai attiecībā uz $\lambda_1, ..., \lambda_n$ ir netriviāls atrisinājums (tas seko no Gausa metodes).

Seko, ka kopa $\{x_1, ..., x_n\}$ nav lineāri neatkarīga.

■

1.6. teorēma. Ja S un S' ir ekvivalentas galīgas L apakškopas, tad $|S| = |S'|$.

PIERĀDĪJUMS No iepriekšējās teorēmas seko, ka $|S| \leq |S'|$ un $|S'| \leq |S|$.

■

1.1. piezīme. Pēdējo teorēmu var vispārināt uz gadījumu, kad S un S' ir bezgalīgas kopas. Šadā gadījumā var pierādīt, ka eksistē bijektīva funkcija $S \to S'$.

1.2.2. Lineāras telpas bāze

Lineāri neatkarīgu kopu $B \subseteq L$ sauc par *maksimālu lineāri neatkarīgu kopu* , ja

$$B \subseteq B' \wedge B' - \text{lineāri neatkarīga} \implies B = B'.$$

Par lineāras telpas *bāzi* sauc tās maksimālu neatkarīgu apakškopu.

1.7. teorēma. Dota lineāra telpa L. Zemāk dotie apgalvojumi ir loģiski ekvivalenti.

1. B ir L bāze.
2. B ir minimāla L veidotājsistēma.
3. $\forall x \in L$ ir viennozīmīgi izsakāms B elementu lineāras kombinācijas veidā:

$$\exists! \alpha_1, ..., \alpha_n : x = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n.$$

PIERĀDĪJUMS

$\underline{1 \implies 2}$

Ja $x \in L$, tad kopa $\{B, x\}$ ir lineāri atkarīga, tāpēc eksistē netriviāla lineāra kombinācija

$$\sum_{e \in B} \lambda_e e + \lambda x = 0.$$

Ja $\lambda = 0$, tad B ir lineāri atkarīga - tas nevar būt, tāpēc x izsakās kā B elementu lineāra kombinācija. Pierādījām, ka B ir veidotājsistēma.

Pieņemsim, ka eksistē mazāka veidotājsistēma $B' \subset B$. Ja $f \in B \backslash B'$, tad

$$f = \sum_{e \in B'} \lambda_e e$$

un eksistē netriviāla lineāra kombinācija

$$\sum_{e \in B'} \lambda_e e - f = 0,$$

kas ir pretruna, jo B ir lineāri neatkarīga.

<u>$2 \implies 3$</u>

Pieņemsim, ka B ir minimāla veidotājsistēma. Tad $\forall x \in L$ ir izsakāms B elementu lineāras kombinācijas veidā:

$$\exists \alpha_1, ..., \alpha_n : x = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n.$$

Pieņemsim, ka x var izteikt divos veidos:

$$x = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n = \alpha'_1 e_1 + ... + \alpha'_n e_n.$$

Seko, ka

$$\underbrace{(\alpha_1 - \alpha'_1)}_{=\mu_1} e_1 + ... + \underbrace{(\alpha_n - \alpha'_n)}_{=\mu_n} e_n = 0.$$

Ja $\exists i$ tāds, ka $\mu_i \neq 0$, tad e_i var izteikt kā pārējo B elementu lineāru kombināciju. Seko, ka B nav minimāla veidotājsistēma, jo $B \backslash \{e_i\}$ arī ir veidotājsistēma.

$\underline{3 \implies 1}$

Pieņemsim, ka $\forall x \in L$ ir viennozīmīgi izsakāms B elementu lineāras kombinācijas veidā:

$$\exists! \alpha_1, ..., \alpha_n : x = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n.$$

Ja B būtu lineāri atkarīga kopa, tad eksistētu netriviāla lineāra kombinācija

$$\lambda_1 e_1 + ... + \lambda_n e_n = 0$$

un elementu 0 varētu izteikt kā B lineāru kombināciju divos dažādos veidos.

Pieņemsim, ka B nav maksimāla lineāri neatkarīga kopa - $\exists x$ tāds, ka $\{B, x\}$ ir lineāri neatkarīga kopa. Tad x nevarētu iztekt kā B lineāru kombināciju - pretruna. ■

1.7. piemērs. Ja $B = \{e_1, ..., e_n\}$ ir L bāze un

$$x = \alpha_1 e_1 + ... + \alpha_n e_n,$$

tad lauka elementus $\alpha_1, ..., \alpha_n$ sauc par x *koordinātēm* attiecība uz B.

1.8. piemērs. Bāzes telpās k^n, $Fun(X,k)$, $\mathcal{M}_{n,l}(k)$.

1.8. teorēma. Dota lineāra telpa L, kurai eksistē galīga veidotājsistēma.

1. Eksistē L bāze.
2. Ja $\{f_1,...,f_m\} \subseteq L$ ir lineāri neatkarīga kopa, tad to var papildināt līdz L bāzei.

PIERĀDĪJUMS

1. Pieņemsim, ka ir dota L galīga veidotājsistēma $\Gamma = \{g_1,...,g_l\}$. Galīgā laikā varam atrast minimālu veidotājsistēmu $B \subseteq \Gamma$ - tā ir L bāze.

2. Pieņemsim, ka kopa $B = \{e_1,...,e_n\} \subseteq L$ ir bāze, $n \geq m$. Apskatīsim elementu virkni

$$(f_1,...,f_m,e_1,...,e_n).$$

Lasīsim šo virkni no kreisās puses un svītrosim visus elementus, kas izsakās kā iepriekšējo elementu lineāra kombinācija. Rezultātā iegūsim virkni

$$(f_1, ..., f_m, e_{i_1}, ..., e_{i_j}).$$

Ja eksistētu netriviāla lineāra kombinācija

$$\lambda_1 f_1 + ... + \lambda_m f_m + \mu_1 e_{i_1} + ... + \mu_j e_{i_j} = 0,$$

tad e ar maksimālo indeksu, kuram $\mu \neq 0$ varētu izteikt kā iepriekšējo lineāru kombināciju - pretruna. Seko, ka kopa

$$B' = \{f_1, ..., f_m, e_{i_1}, ..., e_{i_j}\}$$

ir lineāri neatkarīga.

$\forall x \in L$ izsakās kā B elementu lineāra kombinācija, tātad arī kā B' lineāra kombinācija, jo visi izsvītrotie B elementi arī izsakās kā B' elementu lineāras kombinācijas. Seko, ka B' ir lineāri neatkarīga, minimāla veidotājsistēma, tātad bāze.

■

1.2. piezīme. Bāzes nav noteiktas viennozīmīgi, ja neskaita dažus speciālgadījumus.

1.3. piezīme. Iepriekšējās teorēmas var vispārināt uz gadījumu, kad lineārajās telpās neeksistē galīgas veidotājsistēmas. Visām lineārajām telpām eksistē bāzes, katru lineāri neatkarīgu apakškopu var papildināt līdz bāzei.

1.2.3. Lineāras telpas dimensionalitāte

k-lineārai telpai L var eksistēt vai nu galīga vai arī bezgalīga minimāla veidotājsistēma. L sauc, attiecīgi, par *galīgi dimensionālu* vai *bezgalīgi dimensionālu* telpu.

Ja L eksistē minimāla veidotājsistēma ar n elementiem, tad saka, ka L *dimensionalitāte* ir n, $\dim_k(L) = n$.

Ja $L = \{0\}$, tad saka, ka $\dim_k(L) = 0$.

1.9. piemērs. $\dim_k(k^n) = n$.
$\dim_k(Fun(X,k)) = |X|$.
$\dim_k(\mathcal{M}_{n,l}(k)) = nl$.

2. 9.mājasdarbs

9.1 Nosakiet, vai dotās kopas ar dotajām operācijām ir lineāras telpas:

(a) tādu plaknes vektoru kopu, kuru galapunkts pieder taisnei

$$x + y = 1$$

(sākumpunkts ir $(0, 0)$), operācijas - vektoru saskaitīšana un reizināšana ar skaitli;

(b) tādu plaknes vektoru kopu, kuru galapunkts pieder pirmajam kvadrantam (sākumpunkts ir $(0, 0)$), operācijas - vektoru saskaitīšana un reizināšana ar skaitli;

(c) viena reāla argumenta funkcijas $f(x)$ ar nosacījumu

$$f(1) = a,$$

kur $a \in \mathbb{R}$ ir fiksēts, operācijas - funkciju saskaitīšana un reizināšana ar skaitli;

(d) fiksētas homogēnas lineāru vienādojumu sistēmas virs lauka k atrisinājumu kopa, operācijas - atrisinājumu (kā vektoru) saskaitīšana un reizināšana ar k elementiem;

(e) simetriskas matricas no kopas $\mathcal{M}_{n,n}(k)$, operācijas - matricu saskaitīšana un reizināšana ar k elementiem;
(f) matricas no kopas $\mathcal{M}_{n,n}(k)$, kuru determinants ir vienāds ar 0, operācijas - matricu saskaitīšana un reizināšana ar k elementiem.

9.2 Pierādīt, ka dotās funkciju kopas ir lineāri neatkarīgas lineārajā telpā $Fun(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:
(a) $\{\sin(x), \cos(x)\}$;
(b) $\{e^{a_1 x}, e^{a_2 x}, e^{a_3 x}\}$;

9.3 Noteikt vai dotā kopa ir lineāri neatkarīga lineārajā telpā $\mathbb{Q}^4$, ja ir neatkarīga, tad papildināt līdz bāzei:
(a) $\{(1, -1, 1, -1), (1, 2, -3, 1), (0, 2, 1, 0)\}$;
(b) $\{(1, -1, 1, -1), (1, 2, -3, 1), (1, 5, -7, 3)\}$.

9.4 Matricu $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{Q})$ sauksim par *pusmağisku* , ja katras rindas un katras kolonnas elementu summas ir vienādas. Matricu sauksim par *mağisku* , ja katras rindas, katras kolonnas un abu diagonāļu elementu summas ir vienādas. Apzīmēsim pusmağisko matricu kopu ar $SMag_n(\mathbb{Q})$ un mağisko katricu kopu ar $Mag_n(\mathbb{Q})$.

(a) Pierādiet, ka $Mag_n(\mathbb{Q}) \leq SMag_n(\mathbb{Q}) \leq \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{Q}$.

(b) Atrodiet $\dim_{\mathbb{Q}}(Mag_n(\mathbb{Q}))$ un $\dim_{\mathbb{Q}}(SMag_n(\mathbb{Q}))$, ja $n \in \{2, 3, 4\}$.

(c) Atrodiet bāzes lineārajām telpām $Mag_n(\mathbb{Q})$ un $SMag_n(\mathbb{Q})$, ja $n \in \{2, 3, 4\}$.

(d) Atrisiniet minētos uzdevumus virs $\mathbb{F}_2$.