DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Algebriskās struktūras

6.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2008./2009.studiju gads

Saturs

1. Grupu struktūra

1.1. Grupu prezentācijas

1.1.1. Brīvās grupas

Dota kopa X. Definēsim X^{-1}, kuras elementi ir X elementu formālie inversie elementi: $\forall x \in X \exists! x^{-1} \in X^{-1}$. Definēsim vienības elementa simbolu $e \notin X \cup X^{-1}$.

Definēsim kopu $\mathbb{F}\langle X \rangle$, kuras elementi ir visi iespējamie *reducētie vārdi alfabētā* $X \cup X^{-1}$ - virknes formā

$$x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n},$$

kur $k_i \in \mathbb{Z}$, $x_i \in X \cup X^{-1}$, $x_i \neq x_{i+1}$. Definēsim e arī kā reducētu vārdu.

1.1. piemērs. $X = \{a, b, c\}$. Reducēts vārdi - $abcb^{-1}a^2$. Nereducēts vārds - $ab^2b^{-2}c$.

Par divu vārdu $a_1 ... a_m$ un $b_1 ... b_l$ savienojumu sauksim vārdu

$$a_1 ... a_m b_1 ... a_l.$$

Ja ir dots divu vārdu savienojums, tad dabiski ir vēlēties saīsināt savstarpēji inversus simbolus (X elementus). Iespējams, to var veikt vairākas reizes. Šādu pārveidojumu sauc par *savienojuma redukciju*. Parveidojumus

$$xe \to x,$$

$$ex \to x,$$

$$xey \to xy$$

arī uzskatīsim par redukcijas speciālgadījumiem.

Pieņemsim, ka ir doti vārdi $x = x_1^{k_1} ... x_m^{k_m}$ un $y = y_1^{r_1} ... y_l^{r_l}$. Apzīmēsim to savienojuma redukciju ar $red(x, y)$.

Definēsim bināru operāciju kopā $\mathbb{F}\langle X\rangle$:

$$xy = red(x, y).$$

1.1. teorēma. $\mathbb{F}\langle X\rangle$ ar definēto operāciju ir grupa.

PIERĀDĪJUMS
Vienības elements Acīmredzami e ir vienības elements.

Inversais elements Elementa $x = x_1^{k_1}...x_m^{k_m}$ inversais elements ir $x_m^{-k_m}x_{m-1}^{-k_{m-1}}...x_1^{-k_m}$.

Asociativitāte Patstāvīgs darbs. ■

$\mathbb{F}\langle X\rangle$ sauc par *brīvo grupu ar ģenerējošo kopu* X.

Ja $|X| = n$, tad $\mathbb{F}\langle X\rangle$ apzīmē ar $\mathbb{F}_n$.

1.2. piemērs. $\mathbb{F}_1 \simeq \mathbb{Z}$.

1.1. piezīme. Brīvās grupas Kēli grafs ir koks - nav ciklu.

1.2. teorēma. Ja eksistē bijektīva funkcija no X uz Y, tad

$$\mathbb{F}\langle X\rangle \simeq \mathbb{F}\langle Y\rangle.$$

PIERĀDĪJUMS Ja $f : X \to Y$ ir bijektīva funkcija, tad to var turpināt uz kopu X^{-1} definējot $f(x_i^{-1}) = f(x_i)^{-1}$.

Definēsim funkciju

$$\varphi : \mathbb{F}\langle X\rangle \to \mathbb{F}\langle Y\rangle,$$
$$\varphi(x_1^{k_1} x_2^{k_2} ... x_m^{k_m}) = f(x_1)^{k_1} f(x_2)^{k_2} ... f(x_m)^{k_m}$$

Var redzēt, ka φ ir grupu izomorfisms. ■

1.1.2. Universālā īpašība

Apzīmēsim dabisko iekļaušanu $X \to \mathbb{F}\langle X\rangle$ ar i.

1.3. teorēma. Dota kopa X un grupa G. Katrai (kopu) funkcijai $f : X \to G$ eksistē viennozīmīgi noteikts grupu homomorfisms

$$\varphi : \mathbb{F}\langle X\rangle \to G,$$

kurš apmierina īpašību

$$f = \varphi \circ i.$$

PIERĀDĪJUMS Definēsim $\varphi : \mathbb{F}\langle X\rangle \to G$ ar formulu

$$\varphi(x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_m^{k_m}) = f(x_1)^{k_1} f(x_2)^{k_2} \dots f(x_m)^{k_m}.$$

<u>Homomorfisms</u> Redzam, ka φ ir grupu homomorfisms.

<u>Nosacījuma izpilde</u> Acīmredzama. Apskatīsim katra x attēlu.

Viennozīmīgums Katram $x \in \mathbb{F}\langle X\rangle$ $\varphi(x)$ ir noteikts viennozīmīgi, ja ir jāapmierina nosacījums un homomorfisma īpašība. ■

1.2. piezīme. Seko, ka katra grupa G ir brīvās grupas faktorgrupa: turpināsim vienības funkciju $f : G \to G$.

1.1.3. Sakarības grupās

Sirjektīva homomorfisma $\varphi : \mathbb{F}\langle X\rangle \to G$ kodolu $Ker(\varphi)$ sauc par *sakarību apakšgrupu* .

Katram $r = z_1^{j_1}...z_l^{j_l} \in Ker(\varphi)$ izpildās nosacījums $\varphi(r) = e$, tāpēc r var uzskatīt par sakarību, kas saista G veidotājelementus.

Ja $R = \{r_1, ..., r_s\} \subseteq Ker(\varphi)$ ir tāda, ka $\langle r_1, ..., r_s\rangle = Ker(\varphi)$ (minimālā normālā apakšgrupa, kas satur R), tad to sauc par G *noteicošo sakarību sistēmu.* Var definēt arī *minimālo noteicošo sakarību sistēmu.*

Tādējādi grupu G var uzdot ar kopu X un noteicošo sakarību sistēmu R: $G = \langle X|R\rangle$.

1.3. piemērs. Taisnstūra rotāciju grupa $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$:

$$\langle x, y|x^2, y^2, xyx^{-1}y^{-1}\rangle$$

Σ_3:

$$\langle x, y|x^2, y^3, (xy)^2\rangle$$

Kvadrāta rotāciju grupa:

$$\langle x, y|x^2, y^2, (xy)^4\rangle$$

1.2. Abelianizācija

1.2.1. Komutatoru apakšgrupa un citi jēdzieni

Ja dota grupa G, tad par tās *komutatoru apakšgrupu* vai *komutantu* sauc apakšgrupu, kuru veido visu iespējamo elementu pāru komutatori $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$. Apzīmē ar $[G, G]$, G' vai $G^{(1)}$.

1.4. piemērs. Ja $G = \Sigma_3$, tad $|[G, G]| = 3$.
Ja G ir kvadrāta rotāciju grupa, tad $|[G, G]| = 2$.
Ja G ir trijstūrveida matricu grupa, tad...
Ja G ir komutatīva grupa, tad $[G, G] = \{e\}$.

1.4. teorēma. Katrai grupai G izpildās $[G, G] \trianglelefteq G$.

PIERĀDĪJUMS Pierādīsim, ka $\forall g \in [C, C], a \in G$ izpildās

$$a^{-1}ga \in [G, G].$$

$\forall a, x, y \in G$ apskatīsim $a^{-1}[x, y]a$:

$$a^{-1}[x,y]a = a^{-1}xyx^{-1}y^{-1}x =$$
$$a^{-1}x(aa^{-1})y(aa^{-1})x^{-1}(aa^{-1})y^{-1}a =$$
$$(a^{-1}xa)(a^{-1}ya)(a^{-1}x^{-1}a)(a^{-1}y^{-1}a) =$$
$$(a^{-1}xa)(a^{-1}ya)(a^{-1}xa)^{-1}(a^{-1}ya)^{-1} = [a^{-1}xa, a^{-1}ya].$$

Redzam, ka $a^{-1}[x, y]a \in [G, G]$.

Ja $g = c_1...c_n$, kur c_i ir komutators, tad

$$a^{-1}ga = a^{-1}c_1aa^{-1}c_2a...a^{-1}c_na = c_1'...c_n' \in [G, G].$$

■

Ja $[G, G] = G^{(1)} = G$, tad G sauc par *perfektu grupu.*

Definēsim $G^{(n)} = [G^{(n-1)}, G^{(n-1)}]$. Iegūsim normālu apakšgrupu virkni

$$G \trianglerighteq G^{(1)} \trianglerighteq G^{(2)} \trianglerighteq ...$$

Grupu sauc par *atrisināmu* ja kādam i izpildās nosacījums $G^{(i)} = \{e\}$.

1.2.2. Faktorizācija mod $[G, G]$

1.5. teorēma. $G/[G, G]$ ir komutatīva grupa.

PIERĀDĪJUMS Apzīmēsim $[G, G]$ ar K. Jāpierāda, ka blakusklašu reizināšana ir komutatīva:

$$(Ka)(Kb) = K(ab) = K(aba^{-1}b^{-1}ba) = K([a, b]ba) = \\ (K[a, b])(ba) = K(ba) = (Kb)(Ka).$$

Tika izmantots fakts, ka $Hh = H$, ja $h \in H$. ∎

$G/[G, G]$ sauc par G *abelianizāciju* un apzīmē ar G^{ab}.

1.5. piemērs. Ja $G = \Sigma_3$, tad $|[G, G]| = 3$.

1.6. teorēma. Dots, ka $N \trianglelefteq G$. Tad

$$G/N \text{ ir komutatīva grupa} \iff N \supseteq [G,G].$$

PIERĀDĪJUMS

$$G/N \text{ ir komutatīva grupa} \iff (Na)(Nb) = (Nb)(Na).$$

$$(Na)(Nb) = N(ab), (Nb)(Na) = N(ba).$$

$$N(ab) = N(ba) \iff (ab)(ba)^{-1} = aba^{-1}b^{-1} \in N.$$

$$\forall a,b \in G[a,b] \in N \iff [G,G] \subseteq N.$$

2. Galīgās komutatīvās grupas

Šīs sadaļas mērķis ir aprakstīt galīgo komutatīvo grupu klasifikāciju - pierādīt, ka katra komutatīva grupa ir izomorfa ciklisku grupu tiešajam reizinājumam.

2.1. piezīme. Lietojot analoģiju ar vektoru grupu, ver teikt, ka galīgās komutatīvās grupas ir līdzīgas vektoru grupai, kuriem katrā komponentē notiek atlikumu klašu saskaitīšana.

Šajā sadaļā visas grupas ir komutatīvas.

Izmantosim tikai aditīvo pierakstu. Piemēram,

- grupu tiešais reizinājums tiek saukts par tiešo summu;
- apakšgrupa, kuru veido elements g ar kārtu k ir

$$\{g, 2g, 3g, ..., (k-1)g, kg = 0\}.$$

Pārtulkosim zināmos faktus par cikliskajām grupām un tiešo reizinājumu aditīvajā valodā:

- ja elementa a kārta ir vienāda ar k (k ir mazākais naturālais skaitlis, kuram $ka = 0$), tad

$$ma = 0 \iff k|m;$$

- ja elementa a kārta ir vienāda ar k un $l|k$, tad elementam la kārta ir vienāda ar $\frac{k}{l}$;
- ja N_1,..., $N_n \trianglelefteq G$ un $\forall g \in$ ir viennozīmīgi izsakāms forma

$$g = g_1 + ... + g_n,$$

kur $g_i \in N_i$, tad

$$G \simeq N_1 \oplus ... \oplus N_n;$$

- ja $N, N' \trianglelefteq G$, $G = N + N'$ un $N \cap N' = \{0\}$, tad

$$G = N \oplus N'.$$

2.1. Komutatīvās grupas sadalījums primāro grupu tiešajā summā

Ja G ir komutatīva grupa un p - pirmskaitlis, tad definēsim

$$G(p) = \{g \in G | g \text{ kārta ir vienāda ar } p^k \text{ kādam } k \in \mathbb{N}\}.$$

$G(p)$ sauc par G *p-primāro apakšgrupu*.

2.2. piezīme. Atzīmēsim, ka $0 \in G(p)$, $\forall p$, jo 0 kārta ir vienāda ar $1 = p^0$.

Ja grupai G katram elementam kārta ir p pakāpe, tad G sauc par p-grupu.

2.1. teorēma. $\forall p$ $G(p) \leq G$.

PIERĀDĪJUMS

<u>Vienības elements</u>

$0 \in G(p)$ $\forall p$, jo 0 kārta ir $1 = p^0$.

Inversais elements $p^n a = 0 \iff p^n(-a) = -(p^n a) = 0.$

Reizinājums $p^n a = 0 \wedge p^m b = 0 \implies$

$$p^{\max(n,m)}(a+b) = p^{\max(n,m)}a + p^{\max(n,m)}b =$$
$$p^{\max(n,m)-n}(p^n a) + p^{\max(n,m)-m}(p^m b) = 0 + 0 = 0.$$

■

2.2. teorēma. Dots, ka G ir galīga komutatīva grupa, $g \in G$, $|\langle g \rangle| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_n^{\alpha_n}$. Tad g var izteikt formā

$$g = g_1 + g_2 + ... + g_n,$$

kur $g_i \in G(p_i)$.

PIERĀDĪJUMS Izmantosim matemātisko indukciju ar parametru n.

Indukcijas bāze Ja $n = 1$, tad $|\langle g \rangle| = p^\alpha$ un tādējādi $a \in G(p)$.

Indukcijas solis Pieņemsim, ka apgalvojums ir pierādīts visos gadījumos, kad $|\langle g\rangle|$ dala ne vairāk kā $n-1$ pirmskaitlis un pierādīsim, ka tad apgalvojums ir patiess, ja $|\langle g\rangle|$ dala n pirmskaitļi.

Pieņemsim, ka

$$|\langle g\rangle| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_n^{\alpha_n} = \underbrace{(p_1^{\alpha_1} ... p_{n-1}^{\alpha_{n-1}})}_{u} \underbrace{(p_n^{\alpha_n})}_{v}$$

Citiem vārdiem sakot $k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_n^{\alpha_n}$ ir g kārta: mazākais naturālais skaitlis, kuram $kg = 0$.

Zinām, ka $LKD(u, v) = 1$, tāpēc eksistē veseli skaitļi a un b tādi, ka

$$au + bv = 1.$$

"Sašķelsim" g:

$$g = 1 \cdot g = (au + bv)g = aug + bvg = a(ug) + b(vg) = b\widetilde{g} + ag_n.$$

Redzam, ka

$$p_n^{\alpha_n} g_n = \underbrace{p_n^{\alpha_n} u}_{=k} g = kg = 0,$$

tāpēc $g_n \in G(p_n)$. Līdzīgā veidā redzam, ka

$$(p_1^{\alpha_1} ... p_n^{\alpha_n})\widetilde{g} = (p_1^{\alpha_1} ... p_n^{\alpha_n}) v g = kg = 0.$$

Elementa $\widetilde{g}$ kārtu dala ne vairāk kā $n-1$ pirmskaitļi $p_1, ..., p_{n-1}$, tāpēc saskaņā ar indukcijas pieņēmumu

$$\widetilde{g} = g_1 + ... + g_{n-1},$$

kur $g_i \in G(p_i)$.

Apvienojot visu kopā, iegūstam, ka

$$g = b(g_1 + ... + g_{n-1}) + ag_n = bg_1 + ... + bg_{n-1} + ag_n,$$

kur $bg_i \in G(p_i)$, $ag_n \in G(p_n)$. ■

2.3. teorēma. Ja G ir galīga komutatīva grupa un $|G| = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_n^{\alpha_n}$, tad

$$G = G(p_1) \oplus G(p_2) \oplus ... \oplus G(p_n).$$

PIERĀDĪJUMS

Viennozīmīgums Pierādīsim, ka katrs elements $g \in G$ ir viennozīmīgi izsakāms formā

$$g = g_1 + g_2 + ... + g_n,$$

kur $g_i \in G(p_i)$.

Tā kā $|\langle g \rangle| \mid |G|$, tad saskaņā ar iepriekšējo teorēmu g var izteikt formā

$$g = g_1 + g_2 + ... + g_n,$$

kur $g_i \in G(p_i)$.

Pieņemsim, ka g var izteikt divos veidos:

$$g = g_1 + g_2 + ... + g_n = \\ = h_1 + h_2 + ... + h_n,$$

kur $g_i, h_i \in G(p_i)$.

Tā kā G ir komutatīva grupa, tad

$$g_n - h_n = (h_1 - g_1) + (h_2 - g_2) + ... + (h_{n-1} - g_{n-1}).$$

$\forall i \ h_i - g_i \in G(p_i)$, tāpēc elementa $h_i - g_i$ kārta ir $p_i^{\beta_i}$. Apzīmēsim $p_1^{\beta_1}...p_{n-1}^{\beta_{n-1}}$ ar K. Redzam, ka

$$K((h_1 - g_1) + ... + (h_{n-1} - g_{n-1})) = 0,$$

tāpēc $K(g_n - h_n) = 0$. Seko, ka $g_n - h_n$ kārta dala K, bet tā ir vienāda ar p_n pakāpi. Tātad $g_n - h_n$ kārta ir $1 = p_n^0$ un $g_n = h_n$.

Līdzīgā veidā pierāda, ka $\forall i \ g_i = h_i$.

Triviālais šķēlums Ja $p_i \neq p_j$, tad $G(p_i) \cap G(p_j) = \emptyset$. ■

2.1. piemērs. $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} = G(2) \oplus G(3)$.
$\mathbb{Z}/15\mathbb{Z} = G(3) \oplus G(5)$.

2.2. Maksimālas kārtas elementa apakšgrupas atšķelšana

Dots, ka G ir galīga komutatīva p-grupa. $g \in G$ sauc par *maksimālas kārtas elementu*, ja tā kārta ir maksimāli iespējamā grupā G.

2.2. piemērs. Primitīvās saknes grupā U_m.

2.4. teorēma. Ja G ir galīga komutatīva p-grupa un g ir maksimālas kārtas elements, tad eksistē apakšgrupa $H \trianglelefteq G$ tāda, ka

$$G = \langle g \rangle \oplus H.$$

PIERĀDĪJUMS

Apskatīsim visas G apakšgrupas N, kurām izpildās nosacījums

$$N \cap \langle g \rangle = \{0\}.$$

Vismaz viena tāda apakšgrupa eksistē - $\{0\}$.

Tā kā G ir galīga grupa, tad ir jāeksistē maksimālai (attiecībā uz iekļaušanu) apakšgrupai ar šādu īpašību. Apzīmēsim to ar H. Jāpierāda, ka

$$G = \langle g \rangle + H,$$

tad no grupu tiešā reizinājuma/summas īpašībām sekos, ka

$$G = \langle g \rangle \oplus H.$$

Pieņemsim pretējo - $G \supsetneqq \langle g \rangle + H$. Tātad eksistē $x \notin \langle g \rangle + H$, $x \neq 0$.

Pieņemsim, ka k ir mazākais naturālais skaitlis, kuram izpildās

$$p^k x \in \langle g \rangle + H.$$

Tāds k eksistē, jo x kārta ir p pakāpe - $p^j x = 0 \in \langle g \rangle + H$. Seko, ka

$$y = p^{k-1} x \notin \langle g \rangle + H.$$

Tātad

$$py = p^k x = tg + h,$$

kur $h \in H$.

Pieņemsim ka g kārta ir p^n, tad $p^n a = 0$ $\forall a \in G$ (g ir maksimālas kārtas elements). Redzam, ka

$$p^n y = 0 = p^{n-1}(py) = p^{n-1}tg + p^{n-1}h.$$

Seko, ka

$$p^{n-1}tg = -p^{n-1}h \in \langle g \rangle \cap H = \{0\}.$$

Seko, ka $p|t$, tātad $t = mp$ un

$$py = tg + h = pmg + h.$$

Seko, ka

$$h = py - pmg = p\underbrace{(y - mg)}_{=z}.$$

Redzam, ka $z \notin H$, jo pretējā gadījumā $z = y - mg = h' \in H$ un $y = mg + h' \in \langle g \rangle + H$.

Kopa $S = H + \mathbb{Z}z$ ir G apakšgrupa, kas satur H. Tā kā $z \in S$ un $z \notin H$, tad $H \lneqq S$.

Tā kā H ir maksimālā apakšgrupa ar īpašību $\langle g \rangle \cap H = \{0\}$, tad $\langle g \rangle \cap S \neq \{0\}$.

Pieņemsim, ka $w \in \langle g \rangle \cap S$, $w \neq 0$. Tad

$$w = sg = h_1 + rz.$$

Pārbaudīsim, ka $p \nmid r$, jo pretējā gadījumā

$$w = \underbrace{sg}_{\in \langle g \rangle} = h_1 + lpz = h_1 + lpz = \underbrace{h_1 + lh}_{\in H} \in \langle g \rangle \cap H = \{0\}.$$

Tādējādi $LKD(p, r) = 1$ un eksistē veseli u, v tādi, ka $1 = up + vr$.

Redzam, ka

$$\begin{aligned} y = 1 \cdot y = (up + vr)y = u(py) + v(ry) = \\ u(tg + h) + v(r(z + mg)) = utg + uh + v(rz + rmg) = \\ utg + uh + v(sg - h_1 + rmg) = \\ (ut + vs + vrm)g + (uh - vh_i) \in \langle g \rangle + H. \end{aligned}$$

Tā ir pretruna, jo saskaņā ar pieņēmumu $y \notin \langle g \rangle + H$. ■

2.5. teorēma. Ja G ir galīga komutatīva grupa, tad tā ir ciklisku grupu tiešā summa, kur katrai cikliskai grupai elementu skaits ir pirmskaitļa pakāpe.

PIERĀDĪJUMS Saskaņā ar iepriekš pierādītu teorēmu

$$G = G(p_1) \oplus G(p_2) \oplus ... \oplus G(p_n).$$

Pierādīsim, ka $G(p)$ ir ciklisku grupu tiešā summa. Izmantosim matemātisko indukciju ar parametru $|G(p)|$.

<u>Indukcijas bāze</u> Ja $|G(p)| = p$, tad $G(p)$ ir cikliska grupa.

<u>Indukcijas solis</u> Apskatīsim maksimālas kārtas elementu g grupā $G(p)$. Saskaņā ar iepriekšējo teorēmu

$$G(p) = \langle g \rangle \oplus H,$$

kur H ir mazāka grupa, uz kuru attiecas indukcijas pieņēmums - tā ir ciklisku grupu tiešā summa.

■

2.3. Atlikumu klašu aditīvās grupas

Šajā sadaļā apzīmēsim $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ar $\mathbb{Z}_m$.

2.6. teorēma. $LKD(n,m) = 1 \implies \mathbb{Z}_{nm} \simeq \mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_m$.

PIERĀDĪJUMS Pārbaudīsim, ka $(1,1)$ ir grupas $\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_m$ veidotājelements.

Ja $k(1,1) = (k,k) = (0,0)$, tad $n|k$ un $m|k$. Tā kā $LKD(n,m) = 1$, tad $nm|t$.

Seko, ka apakšgrupa, ko veido $(1,1)$ satur vismaz nm dažādus elementus, tātad visu grupu $\mathbb{Z}_n \oplus \mathbb{Z}_m$.

■

2.7. teorēma. Ja $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_m^{\alpha_m}$ tad

$$\mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_{p_1^{\alpha_1}} \oplus \mathbb{Z}_{p_2^{\alpha_2}} \oplus ... \oplus \mathbb{Z}_{p_m^{\alpha_m}}.$$

PIERĀDĪJUMS Seko no iepriekšējās teorēmas.
■

3. 6.mājasdarbs

6.1 G ir grupa no uzdevuma 4.4, kurā reālo skaitļu lauks tiek aizvietots ar lauku $\mathbb{F}_3$. Atrodiet G^{ab}.

6.2 Noteikt, cik ir katras kārtas elementu grupā

(a) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$;
(b) $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4$.

6.3 G ir galīga komutatīva grupa. Pierādīt, ka

(a) kopa $pG = \{g \in G | g = px, x \in G\}$ ir apakšgrupa;
(b) $pG \lneqq G$.

6.4 Noteikt, vai grupas ir izomorfas:

(a) $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{36}$ un $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{18}$;
(b) $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{36}$ un $\mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{24}$;

6.5 Izsakiet tiešās summas veidā šādas grupas:

(a) $(\mathbb{Z}_{12}, +)$;
(b) $(U_{28}, \cdot)$.