DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Algebriskās struktūras

5.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2008./2009.studiju gads

Saturs

1. Grupu reizinājumi **3**

1.1. Tiešais reizinājums 3

1.1.1. Ārējais tiešais reizinājums 3

1.1.2. Iekšējais tiešais reizinājums 7

1.2. Pustiešais reizinājums 13

1.2.1. Iekšējais pustiešais reizinājums 13

1.2.2. Grupu automorfismi 15

1.2.3. Ārējais pustiešais reizinājums 17

1.3. Zappa-Szep reizinājums 20

2. 5.mājasdarbs **22**

1. Grupu reizinājumi

1.1. Tiešais reizinājums

1.1.1. Ārējais tiešais reizinājums

Ja G, H ir grupas, tad par to *(ārējo) tiešo reizinājumu* sauksim $(G \times H, *)$, kur operācija $*$ tiek uzdota šādi:

$$(g, h) * (g', h') = (gg', hh').$$

1.1. teorēma. $(G \times H, *)$ ir grupa.

PIERĀDĪJUMS
Asociativitāte Visiem $g, g', g'' \in G$ un $h, h', h'' \in H$ izpildās

$$((g, h)(g', h'))(g'', h'') = (gg', hh')(g'', h'') =$$
$$((gg')g'', (hh')h'') = (g(g'g''), h(h'h'')) = (g, h)((g', h')(g'', h'')).$$

<u>Vienības elements</u> Visiem $g \in G$, $h \in H$ izpildās

$$(g,h)(e,e) = (ge,he) = (eg,eh) = (g,h),$$

tāpēc (e,e) ir vienības elements.

<u>Inversais elements</u> Visiem $g \in G$, $h \in H$ izpildās

$$(g,h)(g^{-1},h^{-1}) = (gg^{-1},hh^{-1}) = (e,e),$$

tāpēc katram $G \times H$ elementam eksistē inversais elements. ■

1.1. piezīme. Ja G un H ir komutatīvas, tad $G \times H$ arī ir komutatīva.

Ja G un H ir galīgas, tad $G \times H$ ir galīga un $|G \times H| = |G| \cdot |H|$.

$G \times H \simeq H \times G$, izomorfisms $f : G \times H \to H \times G$ var tikt definēts šādi:

$$f((g,h)) = (h,g).$$

$(G\times H)\times I \simeq G\times(H\times I)$, izomorfisms $f : (G\times H)\times I \to G\times(H\times I)$ var tikt definēts šādi:

$$f(((g,h),i)) = (h,(g,i)).$$

Tādējādi grupu tiešais reizinājums ir ar precizitāti līdz izomorfismam komutatīva un asociatīva operācija grupu kopā. Eksistē vienības elements - triviālā grupa $E = \{e\}$: $\forall G$ izpildās

$$G \times E \simeq G.$$

Tiešo reizinājumu var vispārināt uz patvaļīgas galīgas grupu kopas gadījumu: ja ir dotas n kopas $G_1, ..., G_n$, tad par to tiešo reizinājumu sauc kopu $G_1 \times ... \times G_n$ ar šādu operāciju:

$$(a_1, ..., a_n)(a_1', ..., a_n') = (a_1a_1', ..., a_na_n').$$

1.1. piemērs. Vektoru kopas:

$$\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}.$$

Taisnstūra rotācijas. Atlikumi.

1.2. piezīme. Aditīvajā pierakstā (ja visas grupas G_i ir komutatīvas) izmanto apzīmējumu $G_1 \oplus G_2 \oplus ... \oplus G_n$.

1.3. piezīme. Ja $G = N \times M$, tad definēsim

$$\widetilde{N} = \{x \in G | x = (n, e), \text{ kur } n \in N\},$$

$$\widetilde{M} = \{x \in G | x = (e, m), \text{ kur } m \in M\}.$$

Var redzēt, ka $\widetilde{N} \trianglelefteq G$, $\widetilde{M} \trianglelefteq G$ un $\forall g \in G$ ir viennozīmīgi izsakāms formā

$$g = \widetilde{n}\widetilde{m} = \widetilde{m}\widetilde{n},$$

kur $\widetilde{n} \in \widetilde{N}$ un $\widetilde{m} \in \widetilde{M}$ $(G = \widetilde{N}\widetilde{M} = \widetilde{M}\widetilde{N})$:

$$(n', m')^{-1}(n, e)(n', m') = (n'^{-1}nn', m'^{-1}em') = (\underbrace{n'^{-1}nn'}_{\in N}, e) \in \widetilde{N},$$

$$(n, m) = (n, e)(e, m) \in \widetilde{N}\widetilde{M}.$$

1.1.2. Iekšējais tiešais reizinājums

1.2. teorēma. Ja grupa G satur n normālas apakšgrupas $N_1, ..., N_n$ un $\forall g \in G$ ir viennozīmīgi izsakāms formā

$$g = g_1 g_2 ... g_n,$$

kur $g_i \in N_i$, tad

$$G \simeq N_1 \times N_2 \times ... \times N_n.$$

PIERĀDĪJUMS Definēsim funkciju

$$f : N_1 \times N_2 \times ... \times N_n \to G,$$

$$f(a_1,,,a_n) = a_1...a_n.$$

Pierādīsim, ka f ir grupu izomorfisms.

Sirjektivitāte $\forall g \in G$ ir uzrakstāms formā

$$g = g_1 g_2 ... g_n,$$

kur $g_i \in N_i$, tāpēc $g = f(g_1, ..., g_n)$.

Injektivitāte Ja

$$f(a_1, ..., a_n) = f(b_1, ..., b_n),$$

tad

$$a_1...a_n = b_1...b_n.$$

Tā kā katrs G elements ir viennozīmīgi izsakāms reizinājuma formā, tad seko, ka

$$a_i = b_i, \forall i.$$

<u>Homomorfisms</u> No sākuma pierādīsim, ka $N_i \cap N_j = \{e\}$, ja $i \neq j$.

Ja $N_i \cap N_j \ni a$, tad a var divos dažādos veidos uzrakstīt kā reizinājumu:

$$\underbrace{e...e}_{i-1} ae...e = \underbrace{e...e}_{j-1} ae...e.$$

Seko, ka $a = e$.

No viena mājasdarba uzdevuma seko, ka ja $a_i \in N_i$ un $a_j \in N_j$, tad $a_i a_j = a_j a_i$.

Tagad redzam, ka

$$f((a_1, ..., a_n)(b_1, ..., b_n)) = f((a_1 b_1, ..., a_n b_n)) =$$
$$a_1 b_1 a_2 b_2 ... a_n b_n = a_1 a_2 ... a_n b_1 b_2 ... b_n = f((a_1, ..., a_n)) f(b_1, ..., b_n).$$

■

1.3. teorēma. Ja $N, N' \trianglelefteq G$, $N \cap N' = \{e\}$ un $G = NN'$, tad

$$G \simeq N \times N',$$

PIERĀDĪJUMS Jāpierāda, ka $\forall g \in G$ ir viennozīmīgi izsakāms formā $g = hh'$, kur $h \in N$, $h' \in N'$. Tad apgalvojums sekos no iepriekšējās teorēmas.

Pieņemsim, ka

$$g = hh' = tt',$$

kur $h, t \in N$, $h', t' \in N'$.

Redzam, ka

$$\underbrace{t^{-1}h}_{\in N} = \underbrace{t'h'^{-1}}_{\in N'} = e.$$

Seko, ka $h = t$ un $h' = t'$, tātad g ir izsakāms viennozīmīgi reizinājuma veidā. ■

1.4. piezīme. Iepriekšējās teorēmas terminos G ir apakšgrupu N un N' *iekšējais tiešais reizinājums*- $G = N \times N'$.

1.5. piezīme. Grupu sauc par *nedalāmu*, ja tā nav izsakāma kā netriviāls iekšējais tiešais reizinājums:

$$G = N \times N' \iff N = \{e\} \text{ vai } N' = \{e\}.$$

1.4. teorēma. Ja $G = N \times N'$ (iekšējais reizinājums), tad

$$G/N \simeq N'.$$

PIERĀDĪJUMS Definēsim

$$\varphi : G/N \to N',$$

$$\varphi(N(aa')) = a',$$

kur $a \in N$, $a' \in N'$. Pierādīsim, ka φ ir grupu izomorfisms.

Homomorfisms

$$\varphi((H(aa'))(Hbb')) = \varphi(H(aba'b')) = a'b' = \varphi(H(aa'))\varphi(H(bb')).$$

Sirjektivitāte Katram $a' \in N'$ izpildās $a' = \varphi(N(ea'))$.

Injektivitāte Ja $\varphi(N(aa')) = \varphi(N(bb'))$, tad $a' = b'$ un $Na' = Nb'$. Seko, ka $N(aa') = N(bb')$. ■

1.2. Pustiešais reizinājums

1.2.1. Iekšējais pustiešais reizinājums

Ja $N \trianglelefteq G$, $A \leq G$, $N \cap A = \{e\}$ un $G = NA$, tad saka, ka G ir N un A *(iekšējais) pustiešais reizinājums (semidirect product)* - $G = N \rtimes A$.

1.2. piemērs.

1.5. teorēma. Dots, ka $N \trianglelefteq G$, $A \leq G$. Sekojošie apgalvojumi ir ekvivalenti:

1. $N \cap A = \{e\}$ un $G = NA$ ($G = N \rtimes A$);
2. $N \cap A = \{e\}$ un $G = AN$;
3. $\forall g \in G$ ir viennozīmīgi izsakāms formā $g = ha$, kur $h \in N$, $a \in A$;
4. $\forall g \in G$ ir viennozīmīgi izsakāms formā $g = a'h'$, kur $h' \in N$, $a' \in A$;

PIERĀDĪJUMS

<u>1. $\iff$ 2.</u> Ja $G = NA$, tad $\forall g \in G$ izpildās nosacījums $g = ha$, kur $h \in N$, $a \in A$. Redzam, ka

$$g = ha = a\,\underbrace{a^{-1}ha}_{\in N} = ah' \in AN.$$

Ja $G = AN$, tad $\forall g \in G$ izpildās nosacījums $g = a'h'$, kur $h' \in N$, $a' \in A$. Redzam, ka

$$g = a'h' = \underbrace{a'h'a'^{-1}}_{\in N}a' = h''a' \in NA.$$

<u>1. $\iff$ 3.</u> Pieņemsim, ka $N \cap A = \{e\}$ un $G = NA$. Pieņemsim, ka $\exists g \in G$, kurš ir izsakāms kā reizinājums divos veidos:

$$g = ha = \widetilde{h}\widetilde{a},$$

kur $h, \widetilde{h} \in N$, $a, \widetilde{a} \in A$. Pārnesīsim elementus tā, lai katrā pusē būtu vienas apakšgrupas elementi:

$$ha = \widetilde{h}\widetilde{a} \iff \underbrace{\widetilde{h}^{-1}h}_{\in N} = \underbrace{\widetilde{a}a^{-1}}_{\in A}.$$

Seko, ka

$$\widetilde{h}^{-1}h = \widetilde{a}a^{-1} = e,$$

tātad $h = \widetilde{h}$ un $a = \widetilde{a}$.

<u>2. $\iff$ 4.</u> Pierāda līdzīgi.
■

1.6. piezīme. Ja $G = N \rtimes A$, tad $|G| = |N| \cdot |A|$.

1.2.2. Grupu automorfismi

Par grupas *automorfismu* sauc grupu izomorfismu $G \to G$. Visu G automorfismu kopu apzīmē ar $Aut(G)$. Tā ir grupa ar funkciju kompozīcijas operāciju.

Grupas G automorfismu $\eta \in Aut(G)$ sauksim par *iekšēju automorfismu*, ja

$$\eta(g) = aga^{-1} = \eta_a(g)$$

kādam fiksētam a. Var redzēt, ka

$$\eta_a(gg') = a(gg')a^{-1} = (aga^{-1})(ag'a^{-1}) = \eta_a(g)\eta_a(g').$$

Fakti:

- Visu iekšējo automorfismu kopa $Inn(G)$ veido normālu apakšgrupu: $Inn(G) \trianglelefteq Aut(G)$.
- Faktorgrupu $Aut(G)/Inn(G) = Out(G)$ sauc par *ārējo automorfismu grupu.*
- $Inn(G) \simeq G/Z(G)$.

1.2.3. Ārējais pustiešais reizinājums

Dotas grupas N, A un grupu homomorfisms $\varphi : A \to Aut(N)$. Apzīmēsim $\varphi(a)(g) = \varphi_a(g)$. Izpildās nosacījumi

$$\varphi_a(gg') = \varphi_a(g)\varphi_a(g'), \forall a, g, g',$$
$$\varphi_{ab}(g) = \varphi_a(\varphi_b(g)).$$

Kopā $N \times A$ definēsim šādu operāciju:

$$(h, a)(h'a') = (h, \varphi_a(h'), aa').$$

Var pierādīt, ka ar šo operāciju tiek definēta grupa, ko sauc par N un A *ārējo pustiešo reizinājumu* - $N \rtimes_\varphi A$.

1.6. teorēma. $N \rtimes_\varphi A$ ir grupa.

PIERĀDĪJUMS

Asociativitāte No vienas puses:

$$((h,a)(h',a'))(h'',a'') = (h\varphi_a(h'),aa')(h'',a'') =$$
$$(h\varphi_a(h')\varphi_{aa'}(h''),aa'a'') = (h\varphi_a(h')\varphi_a(\varphi_{a'}(h'')),aa'a'').$$

No otras puses:

$$(h,a)((h',a')(h'',a'')) = (h,a)(h'\varphi_{a'}(h''),a'a'') =$$
$$(h\varphi_a(h'\varphi_{a'}(h'')),aa'a'') = (h\varphi_a(h')\varphi_a(\varphi_{a'}(h'')),aa'a'').$$

Redzam, ka ir vienādība.

Vienības elements Redzam, ka

$$(h,a)(e,e) = (h\varphi_a(e),ae) = (h,e),$$
$$(e,e)(h,a) = (e\varphi_e(h),ea) = (h,a).$$

Seko, ka (e, e) ir vienības elements.

<u>Inversais elements</u> Pierādīsim, ka

$$(h, a)^{-1} = (\varphi_a^{-1}(h^{-1}), a^{-1}) = (\varphi_{a^{-1}}(h^{-1}), a^{-1}).$$

Redzam, ka

$$(h, a)(\varphi_{a^{-1}}(h^{-1}), a^{-1}) = (h\varphi_a(\varphi_{a^{-1}}(h^{-1})), aa^{-1}) =$$
$$(h\varphi_{aa^{-1}}(h^{-1}), e) = (h\varphi_e(h^{-1}), e) = (hh^{-1}, e) = (e, e).$$

1.7. piezīme. Ja ir dots iekšējais pustiešais reizinājums $G = N \rtimes A$, tad šādā gadījumā $\varphi_a(h) = aha^{-1}$.

1.8. piezīme. Ja $\forall a \in A$ $\varphi(a) = id$, tad iegūsim tiešo reizinājumu.

1.3. Zappa-Szep reizinājums

Ja $H \leq G$, $A \leq G$, $H \cap A = \{e\}$ un $G = HA$, tad saka, ka G ir H un A *(iekšējais) Zappa-Szep reizinājums* - $G = H \bowtie A$.

1.3. piemērs.

1.7. teorēma. Dots, ka $H \leq G$, $A \leq G$. Sekojošie apgalvojumi ir ekvivalenti:

1. $H \cap A = \{e\}$ un $G = HA$ ($G = H \bowtie A$);
2. $\forall g \in G$ ir viennozīmīgi izsakāms formā $g = ha$, kur $h \in H$, $a \in A$.

PIERĀDĪJUMS Pieņemsim, ka $H \cap A = \{e\}$ un $G = HA$. Pieņemsim, ka $\exists g \in G$, kurš ir izsakāms kā reizinājums divos veidos:

$$g = ha = \widetilde{h}\widetilde{a},$$

kur $h, \widetilde{h} \in H$, $a, \widetilde{a} \in A$. Pārnesīsim elementus tā, lai katrā pusē būtu vienas apakšgrupas elementi:

$$ha = \widetilde{h}\widetilde{a} \iff \underbrace{\widetilde{h}^{-1}h}_{\in H} = \underbrace{\widetilde{a}a^{-1}}_{\in A}.$$

Seko, ka

$$\widetilde{h}^{-1}h = \widetilde{a}a^{-1} = e,$$

tātad $h = \widetilde{h}$ un $a = \widetilde{a}$. ■

2. 5.mājasdarbs

5.1 Atrodiet visas apakšgrupas šādām grupām:

(a) $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$;
(b) $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$;
(c) $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

5.2 Izsakiet grupu $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ kā netriviālu iekšējo tiešo reizinājumu.

5.3 Pierādiet, ka dotās grupas ir nedalāmas, bet ir izsakāmas kā iekšējie pustiešie reizinājumi:

(a) Σ_3;
(b) kvadrāta rotāciju grupa.

5.4 G ir grupa no uzdevuma 4.4, kurā reālo skaitļu lauks tiek aizvietots ar lauku $\mathbb{F}_2$. Vai G ir izsakāma kā

(a) tiešais reizinājums,
(b) pustiešais reizinājums,
(c) Zappa-Szep reizinājums?

Pozitīvu atbilžu gadījumā atrodiet atbilstošās apakšgrupas.