DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma "Matemātika"

Studiju kurss

Algebriskās struktūras

4.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2008./2009.studiju gads

Saturs

1. Normālās apakšgrupas un faktorizācija

1.1. Normālās apakšgrupas

1.1. piemērs. Atcerēsimies kongruences īpašību veselo skaitļu un polinomu teorijā: ja $a \equiv b (\mathrm{mod\ m})$ un $a' \equiv b' (\mathrm{mod\ m})$, tad

$$a + a' \equiv b + b' (\mathrm{mod\ m}).$$

Šī īpašība ļauj korekti definēt atbilstošo operāciju kongruences klašu kopa un dabiskā projekcija

$$\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$$

ir grupu homomorfisms. Ja grupa nav komutatīva, tad šī īpašība var

neizpildīties.

1.2. piemērs. $G = \Sigma_3$, $|H| = 2$.

Grupas G apakšgrupu N sauksim par *normālu apakšgrupu (normālu dalītāju, apzīmē ar $N \trianglelefteq G$)* ja katram $a \in G$ izpildās nosacījums

$$Na = aN.$$

Ja grupai nav netriviālu normālu apakšgrupu, tad to sauc par *vienkāršu grupu.*

1.3. piemērs. Katrai grupai G triviālās apakšgrupas $\{e\}$ un G ir normālas. Ja G ir komutatīva, tad katra apakšgrupa ir normāla.

1.1. teorēma. Dots, ka $N \trianglelefteq G$. Ja $a \equiv b (\mathrm{mod}\ N)$ un $a' \equiv b' (\mathrm{mod}\ N)$, tad

$$aa' \equiv bb' (\mathrm{mod}\ N).$$

(abām kongruencēm)

PIERĀDĪJUMS No kongruences seko, ka $ab^{-1} = h \in N$ un $a'b'^{-1} = h' \in N$. Redzam, ka

$$(aa')(bb')^{-1} = aa'b'^{-1}b^{-1} = ah'b^{-1}.$$

Tā kā $Na = aN$, tad eksistē $h'' \in N$ tāds, ka $ah' = h''a$, tādējādi

$$(aa')(bb')^{-1} = ah'b^{-1} = h''ab^{-1} = h''h \in N.$$

Seko, ka $aa' \equiv bb' (\mathrm{mod}\ N)$. ■

1.2. teorēma. Sekojošie apgalvojumi ir ekvivalenti:

1. $N \trianglelefteq G$;
2. $\forall a \in G\ a^{-1}Na \subseteq N$;
3. $\forall a \in G\ a^{-1}Na = N$.

PIERĀDĪJUMS Pierādīsim apgalvojumu ekvivalenci ar ciklisko metodi.

<u>1. $\implies$ 2.</u> Apskatīsim elementu $a^{-1}ha$ patvaļīgam $h \in N$:

$$a^{-1}ha = (h^{-1}a)^{-1}a.$$

Tā kā $Na = aN$, tad eksistē $h' \in N$ tāds ka $ah' = h^{-1}a$. Redzam, ka

$$a^{-1}ha = (h^{-1}a)^{-1}a = (ah')^{-1}a = h'^{-1}a^{-1}a = h'^{-1} \in N.$$

<u>2. $\Longrightarrow$ 3.</u> Ir jāpierāda, ka $N \subseteq a^{-1}Na$. Ir dots, ka $\forall h \in N$ izpildās $a^{-1}ha \in N$.

Ja $h' \in N$, tad

$$h' = a^{-1}ah'a^{-1}a = a^{-1}\underbrace{(ah'a^{-1})}_{\in N}a = a^{-1}h''a \in a^{-1}Na.$$

<u>3. $\Longrightarrow$ 1.</u> Jāpierāda, ka katram $h \in N$ eksistē $h' \in N$ tāds, ka $ha = ah'$ un $h'' \in N$ tāds, ka $ah = h''a$.

Dots, ka $a^{-1}ha = h' \in N$, tāpēc $ha = ah'$. Dots, ka $h = a^{-1}h''a$, tāpēc $ah = h''a$.

■

1.2. Faktorgrupas

Dots, ka $N \trianglelefteq G$. Apzīmēsim labo blakusklašu kopu ar G/N. Tādējādi G/N elementi ir kopas formā Na. Varam mēģināt definēt operāciju labo blakusklašu kopā šādi:

$$(Na)(Nb) = N(ab).$$

Citiem vārdiem sakot, izvēlamies no katras blakusklases vienu pārstāvi, veicam ar tiem operāciju un apskatām rezultāta blakusklasi.

Katrs no kopas Na elementiem var tikt izvēlēts a vietā.

1.1. piezīme. Atzīmēsim, ka ja $Na = Na'$, tad $a = ha'$ un $a' = h''a$.

Jautājums ir, vai šī operācija ar blakusklasēm ir korekti definēta - nav atkarīga no klases pārstāvju izvēles.

1.3. teorēma. Dots, ka $N \trianglelefteq G$. Ja $Na = Nb$ un $Na' = Nb'$, tad

$$Naa' = Nbb'.$$

PIERĀDĪJUMS Saskaņā ar iepriekšējām teorēmām seko, ka

$$a \equiv b (\mathrm{mod}\ N)$$

un

$$a' \equiv b' (\mathrm{mod}\ N),$$

tāpēc

$$aa' \equiv bb' (\mathrm{mod}\ N)$$

un

$$Naa' = Nbb'.$$

■

1.4. teorēma. Ja $N \trianglelefteq G$, tad G/N ir grupa attiecībā uz blakusklašu kopā definēto operāciju.

PIERĀDĪJUMS Ir jāpārbauda, ka ir spēkā grupas aksiomas.

Operācijas asociativitāte $\forall a, b, c \in G$ izpildās

$$((Na)(Nb))(Na) = N(ab)Nc = N((ab)c) =$$
$$N(a(bc)) = (Na)N(bc) = (Na)((Nb)(Nc)).$$

Vienības elementa eksistence $\forall a \in G$ izpildās

$$(Na)(Ne) = N(ae) = Na$$

un

$$(Ne)(Na) = N(ea) = Na.$$

Seko, ka Ne ir vienības elements.

Inversā elementa eksistence $\forall a \in G$ izpildās

$$(Na)(Na^{-1}) = N(aa^{-1}) = Ne.$$

Seko, ka klase Na^{-1} ir inversais elements klasei Na.

■

Grupu G/N sauc par *faktorgrupu* G mod N.

1.2. piezīme. Ja G ir galīga grupa, tad $|G/N| = |G|/|N|$.

1.4. piemērs. Atlikumu klašu grupa.

Ja $G = \Sigma_3$ un $|N| = 3$, tad $G/N \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

2. "Izomorfismu teorēmas"

2.1. Palīgrezultāti

2.1. teorēma.

1. Ja $f : G \to H$ ir grupu homomorfisms, tad
$$Ker(f) \trianglelefteq G.$$
2. Ja $f : G \to H$ ir grupu homomorfisms, tad
$$f \text{ ir injektīvs } \iff Ker(f) = \{e\}.$$
3. Ja $N \trianglelefteq G$, tad funkcija
$$\pi : G \to G/N,$$
$$\pi(a) = Na$$
ir sirjektīvs homomorfisms un $Ker(f) = N$,

PIERĀDĪJUMS

1. Pierādīsim, ka $Ker(f) \leq G$. $f(e) = e$. Ja $f(a) = f(a') = e$, tad

$$f(aa') = f(a)f(a') = ee = e,$$

$$f(a^{-1}) = f(a)^{-1} = e^{-1} = e.$$

Pierādīsim, ka $Ker(f)$ ir normāla apakšgrupa. Pierādīsim, ka $\forall x \in Ker(f)$, $\forall a \in G$ izpildās $a^{-1}xa \in Ker(f)$:

$$f(a^{-1}xa) = f(a^{-1})f(x)f(a) = f(a)^{-1}ef(a) = f(a)^{-1}f(a) = e.$$

2. Ja f ir injektīvs, tad $Ker(f) = \{e\}$ pēc injektivitātes definīcijas.

Pieņemsim, ka $Ker(f) = \{e\}$, $f(a) = f(a')$. Seko, ka

$$f(aa'^{-1}) = f(a)f(a'^{-1}) = f(a)f(a')^{-1} = e,$$

tāpēc $aa'^{-1} = e$ un $a = a'$.

3. Sirjektivitāte $\forall a \in G$ izpildās $Na = \pi(a)$.

Homomorfisms $\forall a, a' \in G$ izpildās

$$\pi(aa') = Naa' = (Na)(Na').$$

Kodols Ja $\pi(a) = Na = Ne$, tad $a \in N$ un seko, ka

$$Ker(\pi) \subseteq N.$$

Ja $h \in N$, tad $\pi(h) = Nh = N = Ne$. Seko, ka $Ker(\pi) = N$. ■

2.1. piemērs. Atlikumu grupas.

Ja ir dotas divas grupas G apakškopas A un B, tad definēsim

$$AB = \{x \in G | x = ab, \text{ kur } a \in A, b \in B\}.$$

2.2. teorēma. Ja $N \trianglelefteq G$ un $K \leq G$, tad

1. $NK = KN \leq G$.

2. $N \trianglelefteq KN$.

PIERĀDĪJUMS

1. $\underline{NK = KN}$ Ja $h \in N$ un $k \in K$, tad

$$hk = k\underbrace{(k^{-1}hk)}_{\in N} \in KN.$$

Seko, ka $NK \subseteq KN$.

Ja $h \in N$ un $k \in K$, tad no tā, ka $Nk = kN$ seko, ka

$$kh = h'k \in NK,$$

tādējādi $KN \subseteq NK$ un $NK = KN$.

$\underline{KN \leq G}$ Ja $k, k' \in K$ un $h, h' \in N$, tad

$$(kh)(k'h') = k\underbrace{(hk)}_{\in KH}h' = k(k''h'')h' = (kk'')(h''h') \in KH.$$

Ja $k \in K$ un $h \in N$, tad

$$(kh)^{-1} = h^{-1}k^{-1} \in HK = KH.$$

$e = ee \in KH.$

2. Ja $N \trianglelefteq G$, tad $\forall a \in G$ izpildās $a^{-1}Na \subseteq N$. Seko, ka $\forall a \in KN$ arī izpildās $a^{-1}Na$.

■

2.2. Galvenie rezultāti

2.3. teorēma. (*Pirmā izomorfismu teorēma*) Ja $f : G \to H$ ir grupu homomorfisms, tad

$$Im(f) \simeq G/Ker(f).$$

PIERĀDĪJUMS Apzīmēsim $Ker(f)$ ar N. Definēsim funkciju

$$\varphi : G/N \to Im(f),$$

$$\varphi(Na) = f(a).$$

Pierādīsim, ka φ ir korekti definēts grupu izomorfisms.

Korektums Ja $Na = Na'$, tad $a = ha'$. Seko, ka

$$\varphi(Na) = f(a) = f(ha') = f(h)f(a') = ef(a') = f(a') = \varphi(Na').$$

Homomorfisms

$$\varphi((Na)(Nb)) = \varphi(Nab) = f(ab) = f(a)f(b) = \varphi(Na)\varphi(Nb).$$

<u>Bijektivitāte</u> Sirjektivitāte - $\forall t \in Im(f)$ izpildās

$$t = f(a) = \varphi(Na).$$

Injektivitāte - ja $\varphi(Na) = \varphi(Na')$, tad $f(a) = f(a')$. Seko, ka

$$f(a)f(a')^{-1} = f(aa'^{-1}) = e$$

un $aa'^{-1} = h \in N$. Beidzot seko, ka $a = ha'$ un tāpēc $Na = Na'$.

■

2.1. piezīme. No iepriekš dotām teorēmām seko, ka vienkāršās grupas nevar tikt "vienkāršotas" - ja G ir vienkārša grupa, tad neeksistē netriviāli neinjektīvi homomorfismi $f : G \to H$ (kuriem $Ker(f) \neq G$).

Šī novērojuma dēļ ir lietderīgi pētīt un klasificēt vienkāršās grupas. No 1950.g. līdz 1980.g tika īstenots pētniecības projekts, kura mērķis bija klasificēt galīgās vienkāršās grupas. Tiek uzskatīts, ka ap 1980.g šis mērķis tika sasniegts.

2.4. teorēma. (*Otrā izomorfismu teorēma*) Ja $N \trianglelefteq G$ un $K \leq G$, tad

1. $N \cap K \trianglelefteq K$,
2. $K/(N \cap K) \simeq NK/N$.

PIERĀDĪJUMS Definēsim funkciju

$$\varphi : K \to NK/N,$$

$$\varphi(k) = Nk.$$

Pierādīsim, ka φ ir korekti definēts sirjektīvs grupu homomorfisms, kura kodols ir $N \cap K$.

Atzīmēsim, ka katra blakusklase $Na \in NK/N$ ir formā Nk, kur $k \in K$. Pieņemsim, ka $a = hk$. Parādīsim, ka $Na = Nk$. Redzam, ka $h'a = h'hk \in Nk$ un $h''k = h''h^{-1}a \in Na$.

<u>Korektums</u> Ja $(H \cap K)k = (H \cap K)k'$, tad $kk'^{-1} = h \in H \cap K$. Redzam, ka

$$\varphi(k) = Nk = Nhk' = Nk' = \varphi(k').$$

Sirjektivitāte $\forall N(hk)$ izpildās

$$N(hk) = Nk = \varphi(k).$$

Homomorfisms Ja $k, l \in K$, tad

$$\varphi(kl) = N(kl) = (Nk)(Nl) = \varphi(k)\varphi(l).$$

Kodols Ja $\varphi(k) = Nk = Ne$, tad $k \in N$, tātad $k \in N \cap K$ un $Ker(\varphi) \subseteq N \cap K$.

Ja $k \in N \cap K$, tad

$$\varphi(k) = Nk = Ne = N,$$

tātad $N \cap K \subseteq Ker(\varphi)$ un $N \cap K = Ker(\varphi)$.

■

2.5. teorēma. (*Trešā izomorfismu teorēma*) Ja $N \trianglelefteq G$, $K \trianglelefteq G$ un $K \leq N$, tad

1. $N/K \trianglelefteq G/K$,
2. $(G/K)/(N/K) \simeq G/N$.

PIERĀDĪJUMS Definēsim funkciju

$$\varphi : G/K \to G/N,$$
$$\varphi(Ka) = Na.$$

Pierādīsim, ka φ ir korekti definēts sirjektīvs grupu homomorfisms, kura kodols ir N/K. No šī apgalvojuma sekos abi abgalvojumi.

Korektums Ja $Ka = Ka'$, tad $aa'^{-1} \in K \subseteq N$, tāpēc $Na = Na'$. Seko, ka

$$\varphi(Ka) = Na = Na' = \varphi(Ka').$$

Sirjektivitāte Katram $a \in G$ izpildās $Na = \varphi(Ka)$.

Homomorfisms $\forall ab \in G$ izpildās

$$\varphi((Ka)(Kb)) = \varphi(Kab) = Nab = (Na)(Nb) = \varphi(Ka)\varphi(Kb).$$

Kodols Ja $\varphi(Ka) = Na = Ne$, tad $a \in N$ un $Ka \in N/K$. Seko, ka $Ker(\varphi) \subseteq N/K$.

Ja $a \in N$, tad $\varphi(Ka) = Na = Ne$. Seko, ka $N/K \subseteq Ker(\varphi)$ un $N/K = Ker(\varphi)$.

■

2.2. piemērs. Atlikumu grupas.

3. 4.mājasdarbs

4.1 Pierādiet, ka $H \trianglelefteq G$ šādos gadījumos:
  (a) ja $[G : H] = 2$;
  (b) ja $G = GL(n, \mathbb{R})$ un $H = SL(n, \mathbb{R})$;

4.2 Dots, ka $N, N' \trianglelefteq G$ un $N \cap N' = \{e\}$. Pierādīt, ka $\forall a \in N$ un $\forall a \in N'$ izpildās $ab = ba$.

4.3 Par grupas G *centru* sauksim kopu $Z(G) \subseteq G$, kuras elementiem ir spēkā šāda īpašība: ja $z \in Z(G)$, tad $\forall a \in G$ izpildās

$$az = za.$$

Pierādiet, ka $Z(G) \trianglelefteq G$.

4.4 Pieņemsim, ka G ir visu to reālo matricu kopa, kas ir formā

$$\begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

  (a) Pierādiet, ka G ir grupa ar matricu reizināšanas operāciju, atrodiet vienības elementu un inversos elementus.

(b) Atrodiet $Z(G)$, pierādiet, ka $Z(G) \simeq (\mathbb{R}, +)$.

(c) Pierādiet, ka $G/Z(G)$ ir izomorfa plaknes vektoru kopai ar saskaitīšanas operāciju.