

*DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE*  
*Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte*  
*Matemātikas katedra*  
*Bakalaura studiju programma "Matemātika"*

*Studiju kurss*

## **Algebriskās struktūras**

### **11.lekcija**

*Docētājs: Dr. P. Daugulis*

*2008./2009.studiju gads*

# Saturs

<b>1. Bāzes maiņa lineārajās telpās</b>	<b>3</b>
1.1. Bāzes maiņa kā lineārs attēlojums . . . . .	3
1.2. Lineāru attēlojumu kompozīcija un matricu reizināšana	7
1.3. Lineāra attēlojuma matricas maiņa . . . . .	9
<b>2. Lineāro attēlojumu struktūra un invarianti</b>	<b>13</b>
2.1. Lineārā attēlojuma struktūra . . . . .	13
2.1.1. Izomorfismu teorēma . . . . .	13
2.2. Lineāro operatoru struktūra . . . . .	17
2.2.1. Invariantās apakštelpas . . . . .	17
2.2.2. Īpašvērtības un īpašvektori . . . . .	19
2.2.3. Raksturīgais polinoms un tā pielietojumi . . . .	20
<b>3. 11.mājasdarbs</b>	<b>23</b>

# 1. Bāzes maiņa lineārajās telpās

## 1.1. Bāzes maiņa kā lineārs attēlojums

Strādājot ar lineārajām telpām var rasties nepieciešamība pāriet uz jaunu bāzi. Šāda pārveidojuma rezultātā ir jāmaina elementu koordinātes un lineāro attēlojumu matricas.

Pieņemsim, ka ir dota galīgi dimensionāla lineāra telpa  $L$  un divas bāzes

$$B = \{e_1, \dots, e_n\},$$
$$B' = \{e'_1, \dots, e'_n\}.$$

Apskatīsim vienības attēlojumu  $\text{id}_L : L \rightarrow L$  un atradīsim tā matricu  $S$  attiecībā uz bāzēm  $B$  ( $L$  kā definīcijas apgabālā) un  $B'$  ( $L$  kā

vērtību apgabalā):

$$\begin{cases} \text{id}_L(e_1) = e_1 = s_{11}e'_1 + s_{12}e'_2 + \dots + s_{1n}e'_n \\ \text{id}_L(e_2) = e_2 = s_{21}e'_1 + s_{22}e'_2 + \dots + s_{2n}e'_n \\ \dots \\ \text{id}_L(e_n) = e_n = s_{n1}e'_1 + s_{n2}e'_2 + \dots + s_{nn}e'_n \end{cases}$$

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{21} & \dots & s_{n1} \\ s_{12} & s_{22} & \dots & s_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{1n} & s_{2n} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}$$

Redzam, ka inversā matrica  $S^{-1}$  ir vienības attēlojuma matrica no  $L$  ar bāzi  $B'$  uz  $L$  ar bāzi  $B$ :

$$\begin{cases} \text{id}_L(e'_1) = e'_1 = u_{11}e'_1 + u_{12}e'_2 + \dots + u_{1n}e'_n \\ \text{id}_L(e'_2) = e'_2 = u_{21}e'_1 + u_{22}e'_2 + \dots + u_{2n}e'_n \\ \dots \\ \text{id}_L(e'_n) = e'_n = u_{n1}e'_1 + u_{n2}e'_2 + \dots + u_{nn}e'_n \end{cases}$$

$$U = S^{-1} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & \dots & u_{n1} \\ u_{12} & u_{22} & \dots & u_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{1n} & u_{2n} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Ja ir dots elements

$$l = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T,$$

tad  $Sl$  ir  $l$  koordinātu kolonna attiecībā uz bāzi  $B'$ .

Ja ir dots elements

$$l' = \beta_1 e'_1 + \dots + \beta_n e'_n = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T,$$

tad  $S^{-1}l' = Ul'$  ir  $l'$  koordinātu kolonna attiecībā uz bāzi  $B$ .

1.1. piemērs. Dots, ka

$$\begin{cases} e_1 = e'_1 + 2e'_2 \\ e_2 = e'_1 - e'_2 \end{cases}$$

Tad

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Elements  $l = 2e_1 + 3e_2 = (2, 3)^T$  bāzē  $B'$  ir vienāds ar

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Izsakot  $B'$  ar  $B$  palīdzību, iegūsim

$$\begin{cases} e'_1 = \frac{1}{3}e_1 + \frac{2}{3}e_2 \\ e'_2 = \frac{1}{3}e_1 - \frac{1}{3}e_2 \end{cases}$$

Tad

$$S^{-1} = U = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

## 1.2. Lineāru attēlojumu kompozīcija un matricu reizināšana

Ir dotas lineāras telpas  $L$ ,  $T$  un  $Z$  ar bāzēm

$$B_L = \{e_1, \dots, e_n\},$$

$$B_T = \{t_1, \dots, t_m\},$$

$$B_Z = \{z_1, \dots, z_l\}$$

un lineāri attēlojumi

$$f : L \rightarrow T,$$

$$g : T \rightarrow Z$$

ar matricām  $F$  un  $G$ .

Var definēt kompozīciju

$$g \circ f : L \rightarrow Z,$$

$$(g \circ f)(l) = g(f(l)).$$

**1.1. teorēma.** Lineāru attēlojumu kompozīcija ir lineārs attēlojums.

PIERĀDĪJUMS Īpašību pārbaude. ■

Atradīsim  $g \circ f$  matricu attiecībā uz dotajām bāzēm  $B_L$  un  $B_Z$ .

Ir dots, ka

$$f(e_i) = \sum_{j=1}^m f_{ji} t_j,$$

$$g(t_j) = \sum_{k=1}^l g_{kj} z_k.$$



Redzam, ka

$$\begin{aligned}
 (g \circ f)(e_i) &= g(f(e_i)) = g\left(\sum_{j=1}^m f_{ji}t_j\right) = \sum_{j=1}^m f_{ji}g(t_j) = \\
 \sum_{j=1}^m f_{ji} \sum_{k=1}^l g_{kj}z_k &= \sum_{k=1}^l \underbrace{\left(\sum_{j=1}^m g_{kj}f_{ji}\right)}_{=h_{ki}} z_k = \sum_{k=1}^m h_{ki}z_k.
 \end{aligned}$$

### 1.3. Lineāra attēlojuma matricas maiņa

Strādājot ar lineārajiem attēlojumiem, ir lietderīgi mainīt bāzes tā, lai jaunajās bāzēs lineāro attēlojumu matricas ir vieglāk pētāmas un labāk attēlo lineārā attēlojuma struktūru un īpašības.

Pieņemsim, ka ir dotas galīgi dimensionālas lineāras telpas  $L$  un  $T$ , ar attiecīgajām bāzēm

$$B_L = \{e_1, \dots, e_n\},$$

$$B_T = \{t_1, \dots, t_m\}.$$

Pieņemsim, ka ir dots lineārs attēlojums  $f : L \rightarrow T$ , kura matrica attiecībā uz dotajām bāzēm ir  $F$  ( $m \times n$  matrica).

Noskaidrosim, kā mainās  $f$  matrica, ja notiek pāreja uz citām bāzēm telpās  $L$  un  $T$ .

Pieņemsim, ka telpās  $L$  un  $T$  ir dotas citas bāzes -

$$B'_L = \{e'_1, \dots, e'_n\},$$

$$B'_T = \{t'_1, \dots, t'_m\}$$

ar atbilstošajām pārejas matricām  $S$  un  $V$ .

Lai atrastu  $f$  matricu  $\tilde{F}$  attiecībā uz bāzēm  $B'_L$  un  $B'_T$ , attēlosim

visus attēlojumus vienā diagrammā:

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f} & T \\ S^{-1} \uparrow & & \downarrow V \\ L & \xrightarrow{f} & T \end{array}$$

Redzam, ka

$$\tilde{F} = VFS^{-1}.$$

**1.1. piezīme.** Ja  $L = T$ , tad iegūsim, ka  $\tilde{F} = SFS^{-1}$ .

**1.2. piezīme.** Ja visas matricas ir kvadrātveida, tad

$$\begin{aligned} \det(\tilde{F}) &= \det(SFS^{-1}) = \det(S) \det(F) \det(S^{-1}) = \\ &= \underbrace{\det(S) \det(S^{-1})}_{=1} \det(F) = \det(F). \end{aligned}$$

## 1.2. piemērs.

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Ja lineāra operatora  $f : L \rightarrow L$  matrica sākotnējā bāzē ir

$$F = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$

tad jaunajā bāzē tā ir

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

## 2. Lineāro attēlojumu struktūra un invariānti

### 2.1. Lineārā attēlojuma struktūra

#### 2.1.1. Izomorfismu teorēma

**2.1. teorēma.** Dots lineārs attēlojums  $f : L \rightarrow T$ .

1. Telpām  $L$  un  $T$  eksistē sadalījumi (iekšējās) tiešajās summās

$$L = L_0 \oplus L_1,$$

$$T = T_0 \oplus T_1$$

tādi, ka  $\text{Ker}(f) = L_0$  un  $f$  sašaurinājums uz  $L_1$  ir izomorfisms uz  $T_1$ .

2. Telpās  $L$  un  $T$  eksistē tādas bāzes, attiecībā uz kurām  $f$  matrica ir

$$\begin{pmatrix} E_n & O_{nm} \\ O_{kn} & O_m \end{pmatrix},$$

kur  $n = \dim(L_1) = \dim(T_1)$ ,  $m = \dim(L_0)$ ,  $k = \dim(T_0)$ .

## PIERĀDĪJUMS

1. Definēsim  $L_0 = Ker(f)$  un  $T_1 = Im(f)$ .

Saskaņā ar agrāk pierādītu teorēmu eksistē apakštelpas  $L_1$  un  $T_0$  tādas, ka

$$L = L_0 \oplus L_1,$$

$$T = T_0 \oplus T_1.$$

Pierādīsim, ka  $f$  sašaurinājums uz  $L_1$  ir izomorfisms uz  $T_1$ .

Injektivitāte  $f(x) = f(x') \implies f(x - x') = 0 \implies x - x' \in L_0$ .

$x, x' \in L_1 \implies x - x' \in L_1 \implies x - x' = 0$ , jo  $L_0 \cap L_1 = \{0\}$ .

Sirjektivitāte  $\forall y \in T_1 = Im(f) \exists x \in L$  tāds, ka  $y = f(x)$ .

Tā kā  $L = L_0 \oplus L_1$ , tad

$$x = \underbrace{x_0}_{\in L_0} + \underbrace{x_1}_{\in L_1}.$$

Redzam, ka

$$f(x) = f(x_0 + x_1) = f(x_0) + f(x_1) = f(x_1) = y.$$

2. Izvēlēsimies bāzi

$$B_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$$

apakštelpā  $L_1$ , bāzi

$$B_2 = \{e_{n+1}, \dots, e_{n+m}\}$$

apakštelpā  $L_0$ . Tādējādi  $B_1 \cup B_2$  ir bāze telpai  $L$ .

Definēsim  $t_i = f(e_i)$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Kopa  $B_3 = \{t_1, \dots, t_n\}$  veido bāzi

apakštelpai  $T_1$ . Ja eksistētu netriviāla kombinācija

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i f(e_i) = 0,$$

tad sekotu, ka

$$\sum_{i=1}^n f(\lambda_i e_i) = f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i\right) = 0.$$

Sekotu, ka  $l = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in \text{Ker}(f) \implies l = 0$ . Sekotu, ka  $B_1$  nav  $L_1$  bāze.

Izvēlēsimies jebkuru bāzi  $B_4$  telpai  $T_0$  un izveidosim bāzi  $B_3 \cup B_4$  telpai  $T$ .

Pārbaudīsim, ka attiecībā uz bāzēm  $B_1 \cup B_2$  un  $B_3 \cup B_4$  dotā  $f$  matrica ir pareiza:

$$\begin{aligned} f(e_i) &= t_i, \forall 1 \leq i \leq n, \\ f(e_i) &= 0, \forall n+1 \leq i \leq n+m. \end{aligned}$$





## 2.2. Lineāro operatoru struktūra

Šajā sadaļā apskatīsim lineāros operatorus  $f : L \rightarrow L$ .

Ja  $p(X) = p_n X^n + \dots + p_0 \in k[X]$ , tad definēsim

$$p(f) = p_n f^n + \dots + p_0 \cdot \text{id}$$

un

$$p(F) = p_n F^n + \dots + p_0 \cdot E.$$

### 2.2.1. Invariantās apakštelpas

Dots lineārs operators  $f : L \rightarrow L$ .

Apakštelpu  $U \leq L$  sauc par  $f$ -invariantu apakštelpu, ja

$$u \in U \implies f(u) \in U.$$

Citiem vārdiem sakot  $f(U) \subseteq U$ .

Ja  $U$  ir  $f$ -invarianta apakštelpa, tad katram polinomam  $p(X) \in k[X]$  izpildās

$$p(f)(U) \subseteq U,$$

to pierāda ar matemātisko indukciju pēc  $p$  pakāpes:

$$f^2(U) = f(f(U)) \subseteq f(U) \subseteq U, f^3(U) \subseteq U,$$

$$(\lambda f + \mu f^2)(U) \subseteq U, \dots$$

**2.1. piemērs.**  $Ker(f)$ ,  $Im(f)$  - invariantas apakštelpas. Vektori, funkcijas.

Ja  $U$  ir  $f$ -invarianta, tad eksistē  $L$  bāze, attiecībā uz kuru  $f$  matrica  $F$  ir trijstūrveida:

$$F = \begin{pmatrix} A & B \\ O_{mn} & C \end{pmatrix},$$

kur  $n = \dim(U)$ ,  $m = \dim(L) - \dim(U)$ . Izvēlamies jebkuru bāzi apakštelpā  $U$ , papildinām to līdz  $U$  bāzei.

Ja  $B = 0$ , tad  $L = U \oplus V$ , kur  $V$  arī ir  $f$ -invarianta apakštelpa.

### 2.2.2. Īpašvērtības un īpašvektori

Viendimensionālas  $f$ -invariantas apakštelpas bāzes elementu sauc par *īpašvektoru*. Citiem vārdiem sakot,  $l \neq 0$  ir īpašvektors, ja eksistē  $\lambda \in k$  (*īpašvērtība*) tāds, ka

$$f(l) = \lambda l.$$

Redzam, ka  $f^n(l) = \lambda^n l$  un  $p(f)(l) = p(\lambda)l$ .

### 2.2. piemērs.

Apzīmēsim ar  $V^\lambda$  visu  $\lambda$ -īpašvektoru kopu.

**2.2. teorēma.**  $V^\lambda$  ir apakštelpa

$$\text{PIERĀDĪJUMS } f(l) = \lambda l \implies f(\mu l) = \mu f(l) = \mu \lambda l = \lambda(\mu l). \\ f(l + l') = f(l) + f(l') = \lambda l + \lambda l' = \lambda(l + l'). \blacksquare$$

### 2.2.3. Raksturīgais polinoms un tā pielietojumi

$$l \text{ ir } f \text{ īpašvektors} \iff (f - \lambda \text{id})l = 0.$$

$$\text{Ja } l \text{ ir } f \text{ īpašvektors ar īpašvērtību } \lambda \implies \text{Ker}(f - \lambda \text{id}) \neq \{0\} \implies$$

$$\det(F - \lambda E) = 0,$$

kur  $F$  ir  $f$  matrica kādā bāzē.

Dots lineārs attēlojums  $f : L \rightarrow L$ ,  $L$  bāze  $B$  un  $f$  matrica bāzē  $B$ .

Par  $F$  un  $f$  (bāzē  $B$ ) raksturīgo polinomu sauc

$$P(t) = \det(tE - F) \in k[t].$$

### 2.3. piemērs.

### 2.3. teorēma.

1. Lineāra attēlojuma raksturīgais polinoms nav atkarīgs no bāzes.
2.  $\lambda \in k$  ir  $f$  īpašvērtība  $\iff P(\lambda) = 0$ .

### PIERĀDĪJUMS

1. Pārejot uz jaunu bāzi ar bāzes maiņas matricu  $S$ ,  $f$  matrica mainās no  $F$  uz  $S^{-1}FS$ . Redzam, ka

$$\begin{aligned} \det(tE - S^{-1}FS) &= \det(S^{-1}(tE)S - S^{-1}FS) = \\ \det(S^{-1}(tE - F)S) &= \det(S^{-1}) \det(tE - F) \det(S) = \\ \underbrace{\det(S)^{-1} \det(S)}_{=1} \det(tE - F) &= \det(tE - F). \end{aligned}$$

2.  $\lambda \in k$  ir  $f$  īpašvērtība  $\implies$

$$\exists l \in L : (f - \lambda \text{id})l = 0 \implies \text{Ker}(f - \lambda \text{id}) \neq \{0\}.$$

Seko, ka  $f - \lambda \text{id}$  nav invertējams operators, tātad

$$\det(\lambda E - F) = \pm \det(F - \lambda E) = 0.$$

Ja  $\det(\lambda E - F) = 0$ , tad  $F - \lambda E$  ir neinvertējama matrica, tātad  $\text{Ker}(f - \lambda \text{id}) \neq \{0\}$ . Seko, ka eksistē īpašvektors ar īpašvērtību  $\lambda$ . ■

### 3. 11.mājasdarbs

11.1 Kāda būs bāzes maiņas matrica, ja notiks šādas bāzes maiņas telpā  $L$ :

- (a) tiks mainīti vietām divi bāzes elementi;
- (b) bāzes elementu kārtība tiks mainīta uz pretējo.

11.2 Telpā  $L$  ar bāzi  $B = \{e_1, e_2, e_3\}$  lineāra operatora  $f$  matrica ir

$$F = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Atrodiet  $f$  matricu bāzē  $B' = \{e_2 + e_1 - e_3, 2e_1 - e_3, 3e_2 + e_1\}$ .

11.3  $L$  ir visu reālu polinomu telpa, kuru pakāe nepārsniedz 3. Atrodiet atvasināšanas operatora matricu bāzē

$$\{1, (X - 1), (X - 1)^2, (X - 1)^3\}.$$

11.4 Atrodiet dotajām matricām atbilstošo lineāro operatoru īpašvērtības un īpašvektorus:

(a)

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -4 \\ 9 & -4 & 1 \\ 7 & -5 & 4 \end{pmatrix},$$

virs  $\mathbb{R}$ , virs  $\mathbb{C}$ .

(b)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

virs  $\mathbb{F}_3$ .