DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra
Bakalaura studiju programma “Matemātika”

Studiju kurss

Algebriskās struktūras

10.lekcija

Docētājs: Dr. P. Daugulis

2008./2009.studiju gads

Saturs

1. Lineāro telpu struktūra

1.1. Operācijas ar apakštelpām

Dota aptverošā lineārā telpa L, apskatām tās apakštelpas.

Agrāk bija definēts apakštelpu šķēlums

$$U, V \to U \cap V.$$

Apakštelpu šķēlums ir apakštelpa.

Apakštelpu apvienojums nav apakštelpa.

1.1. piemērs. Vektori.

1.1.1. Apakštelpu summa

Par *apakštelpu U un V summu* sauc kopu

$$U + V = \{x|x = u + v, \text{kur } u \in U, v \in V\}.$$

1.2. piemērs. Vektori.

1.1. piezīme. Tāpat kā šķēlumu, arī summu var vispārināt uz vairāku apakštelpu gadījumu:

$$U_1, ..., U_n \to U_1 + ... + U_n.$$

1.1. teorēma.

1. $U + V$ ir apakštelpa.
2. $U + V$ ir mazākā apakštelpa, kas satur U un V.
3. $U + V = V + U$.

4. $(U_1 + U_2) + U_3 = U_1 + (U_2 + U_3)$.
5. $U + \{0\} = U$.

PIERĀDĪJUMS
1. Pārbaudām lineāras telpas aksiomas.

2. Redzam, ka $U \subseteq U + V$ un $V \subseteq U + V$.

Jāpierāda, ka

$$U \subseteq W \wedge V \subseteq W \implies U + V \subseteq W.$$

Ja $u \in U \subseteq W$ un $v \in V \subseteq W$, tad $u + v \in W$.

3.-5. Viegli.
■

Lielumu $\operatorname{codim}(L) = \dim(L) - \dim(U)$ sauc par U *kodimensiju.*

1.2. teorēma. Ja U un V ir galīgi dimensionālas lineāras telpas, tad

$$\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V).$$

PIERĀDĪJUMS Apzīmēsim $\dim(U) = m$, $\dim(V) = n$, $\dim(U \cap V) = k$.

Redzam, ka $U \cap V \leq U, U \cap V$. Izvēlēsimies apakštelpā $U \cap V$ bāzi

$$\{e_1, ..., e_k\}$$

un papildināsim to līdz bāzēm

$$\{e_1, ..., e_k, f_1, ...f_{m-k}\}$$

un

$$\{e_1, ..., e_k, g_1, ...g_{n-k}\},$$

attiecīgi, apakštelpām U un V.

Redzam, ka kopa

$$\{e_1, ..., e_k, f_1, ..., f_{m-k}, g_1, ...g_{n-k}\}$$

ir apakštelpas $U + V$ veidotājsistēma. Pierādīsim, ka tā ir lineāri neatkarīga un, tādējādi, bāze apakštelpai $U + V$.

Pieņemsim, ka eksistē lineāra kombinācija

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{m-k} \nu_i f_i + \sum_{j=1}^{n-k} \mu_j g_j = 0.$$

Pārveidosim to šādā veidā:

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{m-k} \nu_i f_i = -\sum_{j=1}^{n-k} \mu_j g_j = h.$$

Redzam, ka $h \in U \cap V$. Seko, ka

$$-\sum_{j=1}^{n-k} \mu_j g_j = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i e_i.$$

Tā kā iegūtā sakarība saista V bāzes elementus, seko, ka tā ir triviāla. Seko, ka visi koeficienti σ, λ, ν, μ ir vienādi ar 0.

Esam pierādījuši, ka $\{e_1, ..., e_k, f_1, ..., f_{m-k}, g_1, ...g_{n-k}\}$ ir $U + V$ bāze. Tagad skaitīsim dimensijas:

$$\dim(U+V) = k + (m-k) + (n-k) = m + n - k = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V).$$

■

1.2. piezīme. Var redzēt, ka galīgi dimensionālā telpā L eksistē visu iespējamo dimensionalitāšu apakštelpas. Ja $\{e_1, ..., e_n\}$ ir L bāze, un $V_k = \langle e_1, ..., e_k \rangle$, tad $\dim(V_k) = k$.

1.1.2. Tiešā summa

Par lineāru telpu L_1 un L_2 *(ārējo) tiešo summu* $L_1 \oplus L_2$ sauc kopu $L_1 \times L_2$ ar šādām operācijām:

- $(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b')$;
- $\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$.

1.3. piezīme. Tiešo summu var vispārināt uz vairāk nekā 2 apakštelpu gadījumu.

1.4. piezīme. Ja $L = U_1 \oplus U_2$, tad kopas $U_1 \oplus \{0\}$ un $\{0\} \oplus U_2$ ir apakštelpas.

Ja $L = U_1 + U_2$ un $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, tad saka, ka L ir apakštelpu U_1 un U_2 *(iekšējā) tiešā summa* - $L = U_1 \oplus U_2$.

1.3. teorēma. Ja $L = U_1 + U_2$, tad

$$L = U_1 \oplus U_2 \iff \forall l \in L \ \exists\, !\ u_i \in U_i : \ l = u_1 + u_2.$$

PIERĀDĪJUMS

$\underline{\Longrightarrow}$

Ja $\exists l$, kurš izsakās divos dažādos veidos, tad

$$l = \alpha u_1 + \beta u_2 = \alpha' u_1' + \beta' u_2',$$

kur $\alpha \neq \alpha'$ vai $\beta \neq \beta'$. Redzam, ka

$$\alpha u_1 - \alpha' u_1' = \beta' u_2' - \beta u_2 = 0.$$

Seko, ka sadalījums ir noteikts viennozīmīgi un tā ir pretruna.

$\underline{\Leftarrow}$

Ja $L \neq U_1 \oplus U_2$, tad $\exists l \neq 0 : l \in U_1 \cap U_2$. Redzam, ka

$$l = l + 0 = 0 + l,$$

tādējādi l var izteikt divos veidos kā U_i elementu summu.

■

1.4. teorēma. Ja $L = U_1 + ... + U_n$, tad

1.

$$L = U_1 \oplus ... \oplus U_n \iff \dim(L) = \sum_{i=1}^{n} \dim(U_i).$$

2.

$$L = U_1 \oplus ... \oplus U_n \iff U_i \cap \sum_{j \neq i} U_j = \{0\}.$$

PIERĀDĪJUMS Matemātiskā indukcija ar parametru n.
■

1.5. teorēma. $\forall U \leq L\ \exists V \leq L$ tāda, ka

$$L = U \oplus V.$$

PIERĀDĪJUMS Izvēlēsimies U bāzi

$$\{e_1, ..., e_m\}.$$

Papildināsim to līdz L bāzei

$$\{e_1, ..., e_m, f_1, ..., f_k\}.$$

Apskatīsim apakštelpu

$$V = \langle f_1, ..., f_k \rangle.$$

Redzam, ka $U + V = L$. Pierādīsim, ka $U \cap V = \{0\}$.

$U \cap V \neq \{0\} \implies \exists l \neq 0:$

$$l = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^{k} \mu_i f_i,$$

kur vismaz viens koeficients nav 0. Seko, ka eksistē netriviāla lineāra kombinācija

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i e_i - \sum_{i=1}^{k} \mu_i f_i = 0,$$

kas ir pretrunā ar bāzes īpašību. ■

1.2. Faktortelpas

Ja $U \leq L$, tad varam apskatīt faktorgrupu L/U, kuras elementi ir kongruences klases mod U:

$$L/U = \{l + U | l \in L\}.$$

Kopā L/U var definēt arī reizināšanu ar k elementiem:

$$\lambda(l + U) = \lambda l + U.$$

1.6. teorēma. L/U ar definētajām operācijām ir k-lineāra telpa.

PIERĀDĪJUMS Aksiomu pārbaude. ■.

L/U sauc par *faktortelpu* L mod U.

2. Lineārie attēlojumi

2.1. Pamatfakti

Dotas divas k-lineāras telpas L un T. Funkciju $f : L \to T$ sauc par k-lineāru attēlojumu, ja

- $f(l + l') = f(l) + f(l')$ - f ir aditīvo grupu homomorfisms;
- $f(\lambda l) = \lambda f(l)$ - f ir k-moduļu homomorfisms.

2.1. piezīme. No definīcijas seko, ka

$$f(\lambda l + \mu l') = \lambda f(l) + \mu f(l').$$

2.2. piezīme. Apskatīsim svarīgākos "dabiskos" lineāros attēlojumus. 0, id.

Ja $U \leq L$, tad ir definēts dabiskās iekļaušanas lineārais attēlojums

$$\iota : U \to,$$

$$\iota(u) = u.$$

Ir definēts dabiskās projekcijas lineārais attēlojums

$$\pi : L \to L/U,$$

$$\pi(l) = l + U.$$

2.1. piemērs.

$f(l) = \alpha l.$

Vektoriem - plaknes vai telpas simetrijas un rotācijas, projekcija uz noteiktu asi vai plakni.

Matricām - transponēšana, reizināšana ar fiksētu matricu.

Funkcijām - atvasināšana.

Visu lineāru attēlojumu kopu no L uz T apzīmēsim ar $Hom(L, T)$.

Lineāru attēlojumu sauc par *lineāru izomorfismu*,ja tas ir bijektīvs.

Ja eksistē lineārs izomorfisms $f : L \to T$, tad saka, ka L un T ir lineāri izomorfas, apzīmē ar $L \simeq T$.

Lineāru attēlojumu $L \to L$ sauc par *lineāru operatoru.*

Kopā $Hom(L, T)$ var definēt lineāras telpas struktūru:

- ja $f, g \in Hom(L, T)$, tad

$$(f + g)(l) = f(g) + g(l);$$

- ja $\lambda \in k$, tad

$$(\lambda f)(l) = \lambda f(l).$$

Ja $f \in Hom(L, T)$, tad

- $\mathrm{Im}(f) \subseteq T$ ir f (kā funkcijas) attēls:

$$\mathrm{Im}(f) = \{t \in T | t = f(l)\};$$

- $\mathrm{Ker}(f) = \{l \in L | f(l) = 0\} = f^{-1}(0)$ - f *kodols.*

2.1. teorēma. Dots, ka $f \in Hom(L, T)$.

1. $\mathrm{Im}(f) \leq T$.
2. $\mathrm{Ker}(f) \leq L$.

PIERĀDĪJUMS Aksiomu pārbaude.
■

2.3. piezīme. Seko, ka

$$\dim(Im(f)) \leq \dim(T), \dim(Ker(f)) \leq \dim(L).$$

$\dim(Im(f))$ sauc par f rangu.

2.2. Lineāro attēlojumu uzdošanas matricu formālisms

Dotas lineāras telpas L, T ar bāzēm

$$B_L = \{e_1, ..., e_n\},$$
$$B_T = \{t_1, ..., t_m\}.$$

2.2. teorēma.

1. Dots, ka $f \in Hom(L, T)$. Tad f ir viennozīmīgi noteikts ar tā darbību uz B_L elementiem:

$$l = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \implies f(l) = \sum_{i=1}^{n} \alpha f(e_i).$$

2. $\forall f_0 : B_L \to T\ \exists f : L \to T :$

$$f(e_i) = f_0(e_i), \forall i.$$

(jebkuru funkciju $B_L \to T$ var paplašināt līdz lineāram attēlojumam $f : L \to T$).)

PIERĀDĪJUMS

1.

$$f(l) = f(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(e_i)$$

2. Ja $l = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$, tad definēsim

$$f(l) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_0(e_i).$$

Var pārbaudīt, ka f ir lineārs attēlojums un apmierina nosacījumu $f(e_i) = f_0(e_i)$. ■

Pieņemsim, ka ir dots $f \in Hom(L,T)$, kas apmierina nosacījumus

$$\begin{cases} f(e_1) = f_{11}t_1 + f_{21}t_2 + ... + f_{m1}t_m \\ f(e_2) = f_{12}t_1 + f_{22}t_2 + ... + f_{m2}t_m \\ ... \\ f(e_n) = f_{1n}t_1 + f_{2n}t_2 + ... + f_{mn}t_m \end{cases}$$

Tabulu

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & ... & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & ... & f_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ f_{m1} & f_{m2} & ... & f_{mn} \end{pmatrix}$$

sauc par f matricu F attiecībā uz bāzēm B_L un B_T.

2.3. teorēma. Dotas k-lineāras telpas L, T ar fiksētām bāzēm B_L, B_T. Ir bijektīva atbilstība starp $Hom(L,T)$ un $\dim(T) \times \dim(L)$ matricām ar elementiem laukā k.

PIERĀDĪJUMS Definēsim funkciju φ, kas katram attēlojumam piekārto tā matricu.

φ ir sirjektīva, jo katrai matricai atbilst kāds lineārs attēlojums.

φ ir injektīva, jo ja diviem attēlojumiem atbilst vienādas matricas, tad tie sakrīt. ■

2.4. piezīme. Redzam, ka F j-tā kolonna ir $f(e_j)$ koordinātes attiecībā uz B_T.

Izmantojot matricu reizināšanas operāciju var ērti aprēķināt f darbību uz $l = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$:

1. l reprezentējam kā matricu-kolonnu

$$l = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

2. Atrodam $f(l) = Fl$.

2.2. piemērs. Matricas šādiem attēlojumiem: 0, id. ι, plaknes vai telpas simetrijas un rotācijas, projekcija uz noteiktu asi vai plakni, matricu transponēšana, reizināšana ar fiksētu matricu, funkciju atvasināšana.

2.3. Daži svarīgi izomorfismi

2.4. teorēma. Dots, ka L ir k-lineāra telpa. Tad

$$\dim(L) = n \iff L \simeq k^n.$$

PIERĀDĪJUMS Fiksēsim L bāzi $B_L = \{e_1, ..., e_n\}$. Telpā k^n izvēlēsimies standarta bāzi $S_n = \{s_1, ..., s_n\}$, kur

$$s_i = (0, ..., \underbrace{1}_{i\text{-tajā vietā}}, ..., 0).$$

Definēsim lineāru attēlojumu $\varphi : L \rightarrow$, kas turpina funkciju

$$\varphi_0 : B_L \rightarrow k^n,$$

$$\varphi_0(e_i) = s_i.$$

Pierādīsim, ka φ ir bijektīvs.

Sirjektivitāte

Izvēlēsimies patvaļīgu elementu $\sum_{i=1}^n \alpha_i s_i \in k^n$. Redzam, ka

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i s_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_0(e_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi(e_i) = \varphi(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i).$$

Injektivitāte

$\varphi(l) = \varphi(l)' \implies \varphi(l - l') = 0$. Pieņemsim, ka

$$l - l' = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i.$$

Seko, ka

$$\varphi(l - l') = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i s_i = 0.$$

Ja vismaz viens $\lambda_i \neq 0$, tad S_n nav lineāri neatkarīga kopa - pretruna. Seko, ka $l - l' = 0$ un $l = l'$.

■

2.5. piezīme. Šī ir svarīga teorēma, kas saka, ka dimensionalitāte ir vienīgais lineāro telpu invariants - lineāras telpas izomorfisma tipu viennozīmīgi nosaka lauks k un dimensionalitāte.

2.5. teorēma. Ja $U \leq U$ un $\pi : L \to L/U$ ir dabiskā projekcija, tad $Ker(\pi) = U$.

PIERĀDĪJUMS

$u \in U \implies \pi(u) = u + U = 0 + U \implies U \leq Ker(\pi)$.

$$x \in Ker(\pi) \implies \pi(x) = x + U = 0 + U \implies x \in U$$
$$\implies Ker(\pi) \leq U.$$

Seko, ka $U = Ker(\pi)$. ■

2.6. teorēma. Ja $f : L \to T$ ir lineārs attēlojums, tad

$$L/Ker(f) \simeq Im(f).$$

PIERĀDĪJUMS Apzīmēsim $Ker(f)$ ar K.
Definēsim funkciju

$$\varphi : L/K \to Im(f),$$
$$\varphi(l + K) = f(l)$$

un pierādīsim, ka φ ir korekti definēts lineārs izomorfisms.

Korektums
$l+K = l'+K \implies l-l' \in K \implies f(l-l') = 0 \implies f(l) = f(l')$.
Seko, ka

$$\varphi(l + K) = f(l) = f(l') = \varphi(l' + K).$$

Linearitāte

$$\varphi((l+K)+(l'+K)) = \varphi(l+l'+K) = f(l+l') = \\ f(l)+f(l') = \varphi(l+K)+\varphi(l'+K).$$

$$\varphi(\lambda(l+K)) = \varphi(\lambda l+K) = f(\lambda l) = \lambda f(l) = \lambda\varphi(l+K).$$

Sirjektivitāte
$\forall y \in Im(f)\ \exists x \in L : y = f(x)$. Seko, ka

$$y = \varphi(x+K).$$

Injektivitāte

$$\varphi(l + K) = \varphi(l' + K) \implies f(l) = f(l') \implies f(l) - f(l') = 0.$$

Seko, ka

$$f(l - l') = 0 \implies l - l' \in K \implies l + K = l' + K.$$

■

3. 10.mājasdarbs

10.1 Dota galīgi dimensionāla telpa L, $U \leq L$, $V \leq L$. Pierādīt vienādību

$$\operatorname{codim}(U+V) + \operatorname{codim}(U \cap V) = \operatorname{codim}(U) + \operatorname{codim}(V).$$

10.2 Dotas apakštelpas

$$U = \langle (2,1,-1), (0,1,1) \rangle \leq \mathbb{Q}^3,$$
$$V = \langle (1,-1,2), (3,0,-1) \rangle \leq \mathbb{Q}^3.$$

Atrodiet bāzes apakštelpām $U \cap V$ un $U + V$.

10.3 Noteikt, kuras no dotajām funkcijām ir lineāri operatori lineārajā telpā L:

(a) $l \to \alpha$, kur α ir fiksēts L elements;
(b) $l \to \alpha + \beta l$, kur α un β ir fiksēti L elementi;
(c) $f(x) \to f(x+1) - f(x)$, kur $L = Fun(X, k)$;
(d) $(x_1, x_2, x_3) \to (x_2, x_3, x_1)$, kur $L = k^3$;
(e) $(x_1, x_2, x_3) \to (x_1^2, 0, 0)$, kur $L = k^3$.

10.4 Dots, ka $L = \mathcal{M}at_{2,2}(k)$.

(a) Pierādīt, ka funkcija $f : M \to AM$, kur $M, A \in L$ un A ir fiksēta matrica, ir lineārs operators.

(b) Atrodiet f matricu L standarta bāzē $\{e_{11}, e_{12}, e_{21}, e_{22}\}$. ($e_{ij}$ ir matrica, kurai visi elementi, izņemot elementu 1 pozīcijā (i, j), ir vienādi ar nulli).