

**Kristīne Anuļeviča**

**Daugavpils Universitāte**

**2003**

*Geometrisko figūru šķēlumu vizualizācija ar šablona  
metodi*

**Latvijas Zinātņu akadēmijas jauno  
zinātnisku konkursam**

# SATURS

Ievads	3
Literatūras apskats	6
1. Klūdas telpisku figūru attēlošanā mācību grāmatās	12
2. Sferas šķēluma ar plakni paralēlprojekcija	22
3. Cilindra eliptiskā šķēluma paralēlprojekcija	25
4. Konusa eliptiskā šķēluma paralēlprojekcija	27
5. Konusa hiperboliskā šķēluma paralēlprojekcija	33
6. Konusa paraboliskā šķēluma paralēlprojekcija	44
7. Otrās kārtas līkņu, kas pieskaras divām dotajām taisnēm, centru ģeometriskā vieta	49
7.1. Elipses, kas pieskaras divām dotajām taisnēm, centru ģeometriskā vieta . .	50
7.2. Hiperbolas, kas pieskaras divām dotajām taisnēm, centru ģeometriskā vieta	53
8. Elipšu (hiperbolu), kas pieskaras perpendikulāram taisnēm, centru ģeometriskā vieta	57
Nobeigums	58
<b>LITERATŪRA</b>	<b>59</b>

## Ievads

Skolas ģeometrijas stereometrijas kursa svarīga sastāvdaļa ir telpisko figūru attēlošana paralēlprojekcijā.

Izveidot zīmējumus stereometrijā ir nenoliedzami grūtāk nekā planimetrijā, jo telpiskiem objektiem ir trīs dimensijas, bet plaknei, kurā tie jāattēlo, ir tikai divas dimensijas. Te jāņem vērā, ka katram ķermenim iespējamas bezgala daudzas paralēlprojekcijas, no kurām jāizvēlas tā, kas dod labāko priekšstātu par attēlojamo ķermenī.

Runājot par uzdevumiem stereometrijā, būtu jāaplūko modeļu izgatavošana, pie tam pēc iepriekš dotiem izmēriem, un vienlaicīga to zīmēšana. Modeļu būvēšana, it īpaši stereometrijas kursa sākumā, ievadot skolēnus telpas izpratnē, ir ļoti derīga, jo ļauj vienlaicīgi aplūkot gan modeli, gan tā ēnu (paralēlprojekcijas uzskatāmu realizāciju). Tālākajā kursā šāda rīcība jau kļūst ļoti sarežģīta, prasa daudz laika, tāpēc ķermenis jāiztēlojas, vienlaicīgi veidojot tā zīmējumu. Telpiskās iztēles attīstīšana ir viens no stereometrijas kursa uzdevumiem.

Mācību grāmatās arvien biežāk sastopami kļūdaini zīmējumi, daudzi no tiem domāti kā paraugi, jo ir atrisinātu uzdevumu sastāvdaļa. Tas rada telpiskās figūras uztveres un uzdevuma satura pretrunu skolēnu apzinā. Kļūdas, kas saistītas ar nepareizu telpisko figūru attēlošanu, kļūst masveidīgas. Tās sastopamas ne tikai mācību grāmatās, bet pat autoritatīvā žurnālā "Математика в школе" [26].

Telpisku figūru attēlošanas racionālu paņēmienu teorētiskā pamatošana tālu pārsniedz skolas ģeometrijas kursa iespējas, bet iegūtos rezultātus iespējams pielietot skolas praksē, jo tos skolēni var uztvert intuitīvā līmenī. Gatava attēla kā parauga izmantošanas problēmai ir liela nozīme ģeometrijas mācīšanā. Mūsdienās šī nozīme ir krietni pieaugusi.

Telpisku figūru zīmējumu veidošanas racionālo paņēmienu zināšana un pielietošana ir nepieciešama gan uzdevumu atrisināšanā, gan teorēmu pierādīšanā.

Pētījuma tēmas izvēli nosaka telpisko figūru zīmējumu svarīgā loma skolas ģeometrijas stereometrijas kursā, kā arī zemā to kvalitāte mācību grāmatās un mācību līdzekļos. Par konkrēto pētījuma objektu esam izvēlējušies dažu rotācijas ķermeņu šķēluma ar plakni attēlus. Šo izvēli pamato sekojošie apsvērumi.

Mācību grāmatās parasti netiek sistematiski aplūkotas telpisku ķermeņu attēlošanas metodes.

Veidojot zīmējumus, skolnieki vadās no intuitīva priekšstata par attēlojamo ķermenī, un, kas vēl svarīgāk, no gataviem paraugiem mācību grāmatās.

Īpaši daudz nepareizu rotācijas ķermeņu attēlu ir [1], [6], [10] mācību grāmatās. Šie attēli ir sastopami gan teorēmu pierādījumos, gan uzdevumu atrisinājumos.

Biežāk sastopamās kļūdas un nepilnības rotāciju ķermeņu attēlošanā:

- 1) nepareizi sfēras pola, sfēras šķēluma ar plakni attēli;
- 2) nepareizi konusa un cilindra attēli, nepareizi to diametrālā šķēluma attēli;
- 3) uzskatamības zaudēšana (daudzos zīmējumos neparāda neredzamās līnijas ar svītrīniju, tāpēc zīmējumi izskatās plakani, ir sarežģīti interpretētos kā telpiskas figūras attēlus);
- 4) zīmējums tiek veidots noteiktam uzdevuma tipam, bet uzdevuma nosacījumos norādītajiem skaitliskajiem lielumiem atbilst kāds īpašs attēlojamās figūras gadījums.

Apskatot šādus zīmējumus var rasties redzes ilūzijas.

Darba galvenais mērķis ir atrast metodi, kas ļauj, izmantojot otrās kārtas līknes šablonus, izveidot cilindra, konusa un sfēras šķēlumu ar plakni attēlus paralēlprojekcijā. Šablona izmantošana sfēras šķēluma ar plakni attēlošanai noskaidrota grāmatā [4]. Šādu šķēlumu zīmējumu izveidošana, kas aprakstīta literatūrā, pamatojas uz atsevišķu līknes punktu konstruēšanu kompleksajā rasējumā. Konstruētos punktus pēc tam savieno ar šablona palīdzību. Šāda metode ir ļoti darbietilpīga, prasa plašas tēlotājas ģeometrijas zināšanas, tāpēc ir pilnīgi nepieejama skolas ģeometrijas kursā.

Visefektīvākā metode zīmējuma kvalitates paaugstināšanai un darbietilpības samazināšanai ir tiesu aprēķinu pielietošana un šablonu izmantošana.

Līdzīgas pētišanas metodes pielietošanu var atrast N. Beskina un E. Stārodetko grāmatās [12], [19].

Grāmatā [12] ir izklāstīti ģeometriskās teorijas jautājumi, kas saistīti ar telpisko zīmējumu konstruēšanu stereometrijā. Šis grāmatas autors, pamatojoties uz tiesu aprēķinu metodi, kā piemēru demonstrē Viviāni līknes zīmējuma izveidošanu, aprēķinot punktu koordinātas. Iegūtie punkti tomēr jāsavieno ar lekāla palīdzību.

Grāmatā [19] ir izpētīti ģeometriskās modelēšanas pamati ar datorprogrammas palīdzību. Liela uzmanība tiek veltīta attēla konstruēšanas teorētiskiem jautājumiem un ģeometrisko uzdevumu novešanai uz skaitlisķām metodēm.

**Darba pētījuma priekšmets:** tēlotāja ģeometrija.

**Darba pētījuma objekts:** rotācijas ķermeņu: cilindra, konusa un sfēras šķēluma ar plakni attēlošana paralēlprojekcijā, izmantojot otrās kārtas līknes šablonus. Šablona stāvokļa noteikšanai nepieciešamos skaitliskos parametrus: centra vai virsotnes koordinātas, ass pagrieziena leņķi aprēķina analītiski.

**Pētījuma metode:** pētījumos izmantotas analītiskās ģeometrijas aprēķinu metodes, grafisko oprāciju skaits, kas nepieciešams zīmējuma izveidošanai, ir minimāls.

**Rezultātu aprobācija:** atsevišķi pētījuma rezultāti aprobēti divos referatos studentu zinātniskās konferencēs.

## Literatūras apskats

Problēma par telpisko figūru attēlu konstruēšanu plaknē pastāvēja visos laikmetos un pastāv arī šodien. Jau senos laikos telpisko formu attēliem bija liela praktiska nozīme, tos izmantoja dažādiem nolūkiem arhitekti. Renesances laikmeta mākslinieki saviem nolūkiem centās izveidot matemātiski pamatotu šādu attēlu konstruēšanas teoriju - centrālo projicēšanu.

Tēlotāja ģeometrija ir teorētskais pamats telpisko figūru attēlu konstruēšanai plaknē. Tā apskata metodes, ar kuru palīdzību telpas objektus (punktus, līnijas, ķermērus) projicē plaknē, un kā atrisina ģeometriskas dabas uzdevumus par šiem telpas objektiem ar to attēlu palīdzību [4], [5], [7], [8], [9].

Attēlu konstruēšanas un uzdevumu risināšanas atsevišķus noteikumus un paņēmienus, kas bija atrasti laika gaitā, pirmo reizi apkopoja un izveidoja vienotu sistēmu franču zinātnieks matemātiķis Gaspars Monzs (1746-1818). Viņš izstrādāja vispārējo teoriju trīsdimensiju objektu ortogonalo projekciju konstruēšanai divās vai trijās plaknēs [15]. Viņa piedāvātās metodes ir aktuālas arī mūsdienās.

Par telpiskas figūras attēlošanas problēmu sakarā ar skolas ģeometrijas stereometrijas kursu rakstīja N. Četveruhins [24] un A. Grava [2].

Šo autoru darbos ir sniepts sistemātisks un teorētiski pamatots izklāsts par to, kā izgatavojami zīmējumi stereometrijā, kādam prasībām tiem jāpakļaujas, lai zīmējums noderētu uzdevumu atrisināšanā.

A. Grava parāda, ka izgatavot stereometrijas zīmējumus paralēlprojekcijā ir vienkāršāk salīdzinājumā ar centrālo projekciju [2]. Tomēr par paralēlprojekcijas trūkumu, salīdzinot ar centrālo projekciju, viņš atzīmē tās mazāku uzskatāmību, jo priekšmets tiek projicēts no bezgalīgi liela attāluma.

Pēc akadēmiķa Raušenbaha domām tieši paralēlprojekcija vislabāk atbilst noteiktas telpas daļas attēlošanai plaknē, jo centrālo projicēšanu raksturo ļoti stiprs (bieži nepielaujamī stiprs) tuvā, vidējā un tālā plānu mērogu sagrozījums [17].

Viena no telpisku figūru attēlošanas galvenām problēmām ir telpas dziļuma ilūzijas radīšana ar plakanas figūras palīdzību. Ne katram matemātiski definēta telpas un plaknes punktu atbilstība (perspektīva) balstās uz redzes uztveres likumsakarībām. Katram perspektīvās sistēmas variantam ir savs pielietošanas apgabals telpā. Telpā ir pilnā konstantuma apgabals, kurā skatītājam nav novērojama šķietamā priekšmeta samazināšanās,

palielinoties attālumam līdz tam.

Paralēlā projekcija ir zinātniska perspektīva, tā noder nelielu priekšmetu attēlošanai, kurus aplūko no liela attāluma. Tā ir pilnīgi zinātniska un dabīga norādītajos apstāklos. Sagrozījumi, kas neizbēgami piemīt jebkuram perspektīvās sistēmas variantam, paralēlās projicēšanas gadījumā atrodas uz horizonta, kuru neattēlo, piemēram, redzam, ka paralēlu taišņu attēli krustojas kādā horizonta punktā.

Paralēlā projekcijā saglabājas homotētisku plakanu figūru attēlu līdzība, kas uzlabo attēla uzskatāmību.

Runājot par telpiskām figūrām, jāuzsver pozicionālo uzdevumu loma stereometrijas zīmējumā. Risinot šāda tipa uzdevumus, konstruē ķermeņa šķēlumu ar plakni, taisnes krustpunktu ar virsmu un citus, ar punktu piederību saistītos uzdevumus.

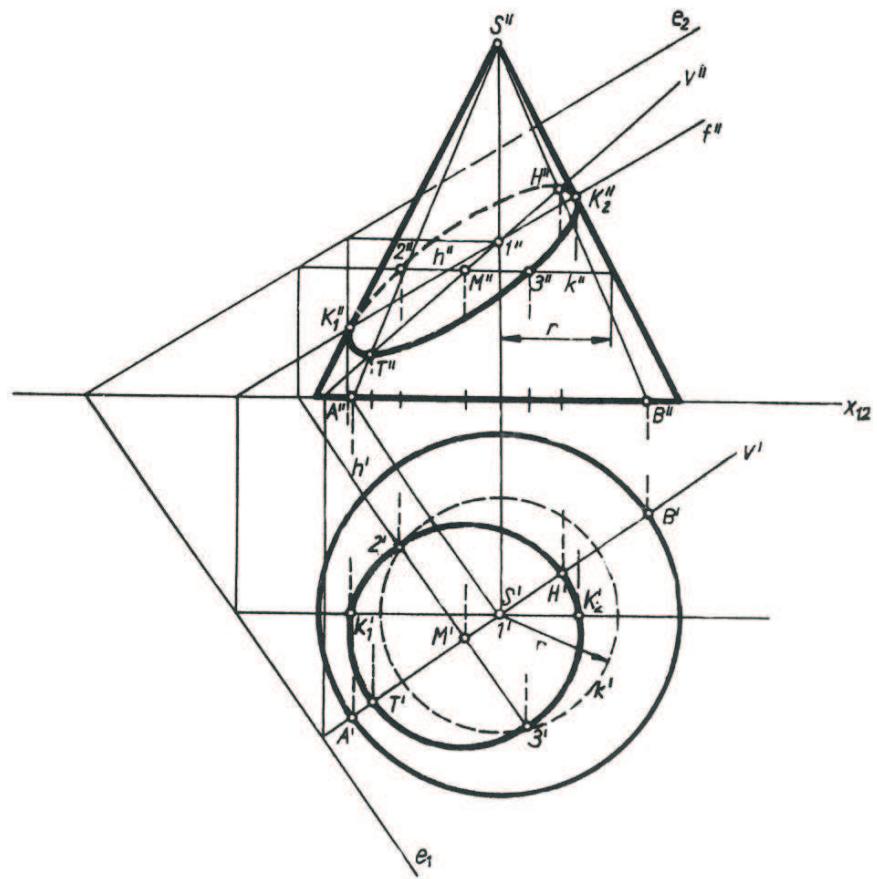
Šīs problēmas būtība ir izklāstīta N. Četveruhina grāmatās [20], [21], [22], [23].

Zinātniskās literatūras apskats rāda, ka, izmantojot projicēšanas metodi, pārsvarā telpisko figūru attēlošanai lieto grafiskas konstrukcijas. Tomēr rodas jautājums, vai vienmēr šī metode ir efektīvāka salīdzinājumā ar citām metodēm, piemēram, aprēķinu metodi, kurai literatūrā tiek pievērsta maza uzmanība.

Runājot par rotācijas ķermeņu un to šķēluma ar plakni līnijas attēla konstruēšanu, literatūrā [11], [13], [28] visplašāk lietotā metode ir šīs līnijas atsevišķu punktu grafiska atrašana. Pēc tam tos savieno ar lekāla palīdzību (skat. 1., 2., 3. un 4. zīm.). Šī metode ir darbietilpīga un prasa ļoti rūpīgu darbu ar instrumentiem. Šablonus izmanto galvenokārt cilindru un konusu pamatu, sfēras ekvātora un paralēles attēlošanai.

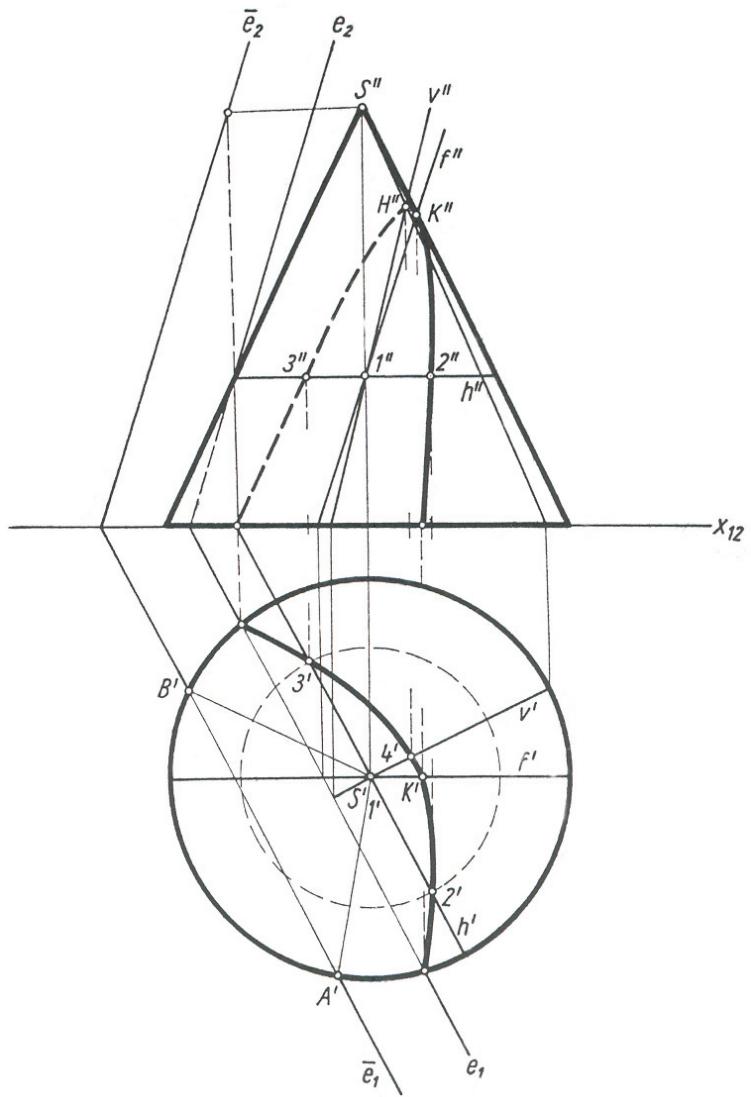
Līdz šim laikam neviena grāmatā vēl nav piedāvāta efektīvāka metode, kas saistīta ar rotācijas ķermeņa šķēluma līnijas attēlošanu.

Izeju no dotās problēmas piedāvājam apskatīt nākamajās nodaļās.



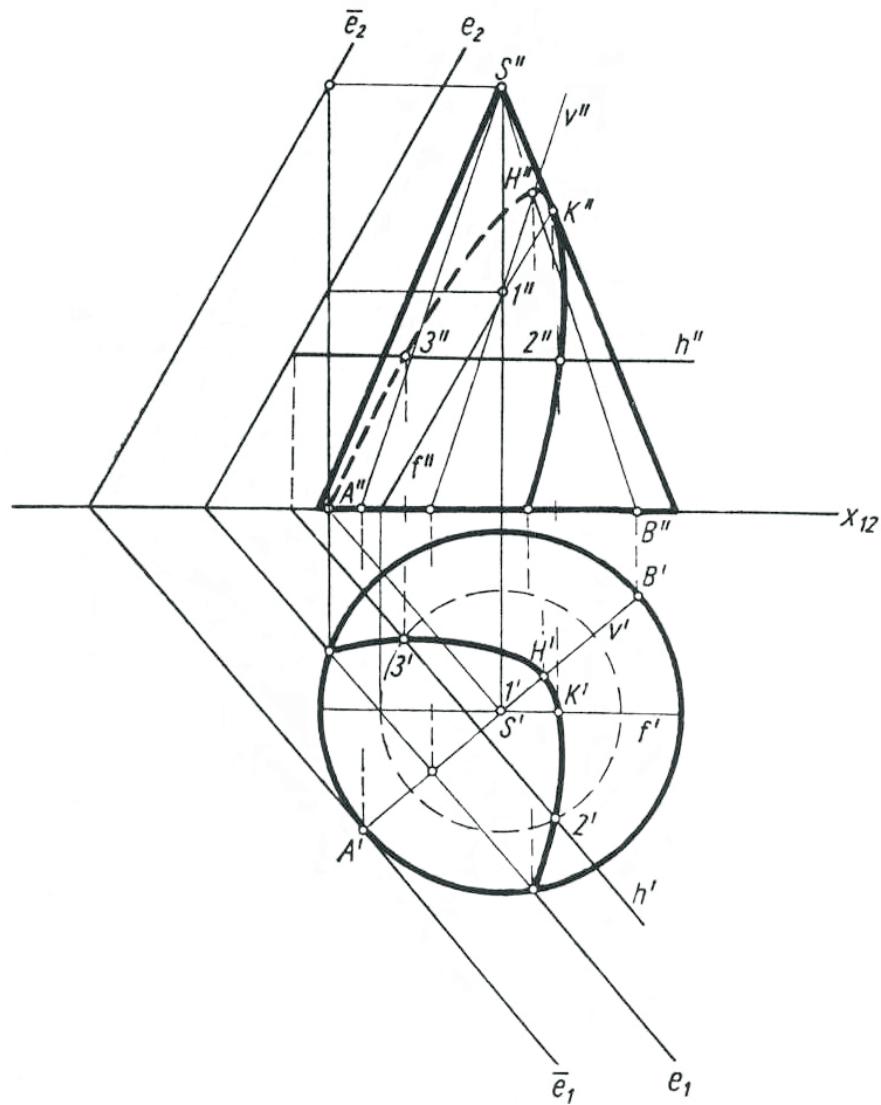
### 1. zīm.

Konusa eliptiskā šķēluma kompleksais rasējums [11]



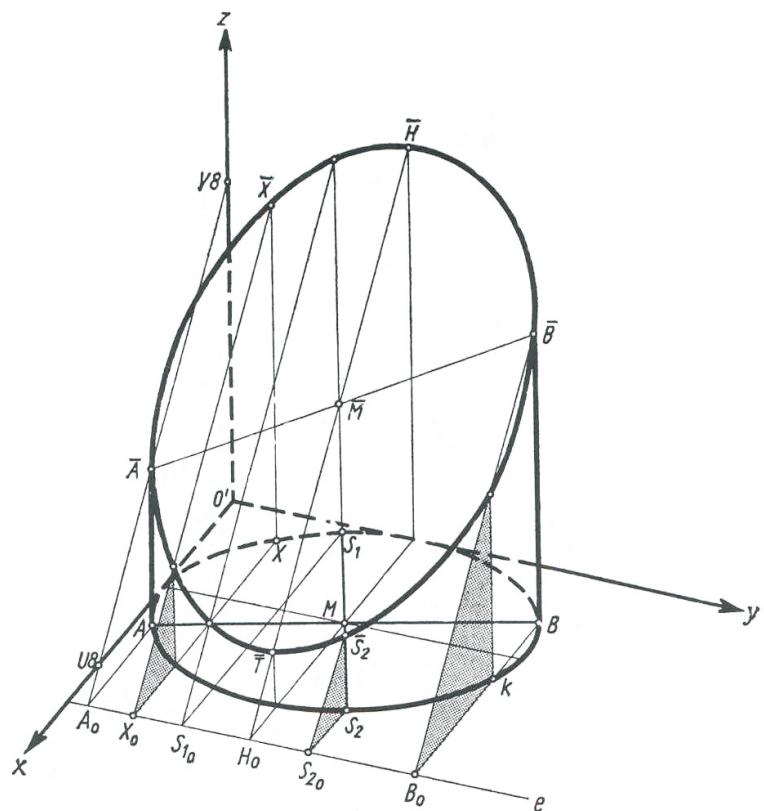
## 2. zīm.

Konusa hiperboliskā šķēluma kompleksais rasējums [11]



### 3. zīm.

Konusa paraboliskā šķēluma kompleksais rasējums [11]



#### 4. zīm.

Cilindra eliptiskā šķēluma aksonometriskā projekcija [11]

# 1. Kļūdas telpisku figūru attēlošanā mācību grāmatās

Jebkuru stereometrisko uzdevumu risināšana prasa ne tikai skaitliskas un loģiskas iemaņas un prasmes, bet telpiskas figūras attēlošanas plaknē iemaņas.

Daudzu disciplīnu pasniedzēji, it sevišķi stereometrijas un tēlotājgeo-metrijas pasniedzēji, savās stundās plaši izmanto uzskatāmus figūru attēlus, kuriem ir noteikta loma mācību procesā. Šie uzskatāmie attēli ne tikai atvieglo pasniedzēja paskaidrojumu izprašanu un iegaumēšanu, bet, kas ir īpaši svarīgi, tie attīsta skolēnos telpiskos priekšstātus un pilnveido zināšanas par konkrētām ģeometriskām formām. Tādā formā materiālu iegaumē labāk un pamatīgāk. No otras puses, labs rasējums palīdz atrast pareizu uzdevuma risinājumu, un otrādi, nepareizs attēls skolēnam rada nepareizu priekšstātu par aplūkojamo figūru.

Īpaši svarīga nozīme telpisku figūru uzskatāmam attēlam ir skolēnu telpiskas iztēles attīstīšanā, kas ir viens no ģeometrijas mācīšanas mērķiem.

Pirmais un pats svarīgākais solis ģeometrisko uzdevumu risināšanā ir zīmējuma konstruēšana, kas atbilst dotajiem nosacījumiem. Jāņem vērā, ka pirmais zīmējums var būt tāls no pareizā zīmējuma, jo daudzu tā elementu novietojums kļūst skaidrs tikai pēc uzdevuma atrisināšanas. Tad var izveidot otru - pareizu zīmējumu. Abus šos procesus: zīmējuma izveidošanu un uzdevuma atrisināšanu var apvienot.

Attēlojot telpiskas figūras rodas grūtības. Zīmējumam jāatbilst dažādiem nosacījumiem, kas ļauj vislābāk uztvert telpisko figūru attēlu.

## 1. Attēlam jābūt pareizam, t.i., tam jābūt līdzīgam kādai no attēlojamās figūras projekcijām.

Dotās figūras attēlu sauc par pareizu, ja tas līdzīgs kādai tās paralēlprojekcijai. Pretējā gadījumā attēls ir nepareizs.

Parasti attēlojamās figūras (tās modeļa) mūsu rīcībā nav. Ir tikai figūras apraksts (uzdevuma noteikumi) un figūras paralēlprojekcija. Tātad uzdevuma tekstu jāuzskata par attēla interpretāciju. Ja interpretācija un attēls nav pretrunīgs, zīmējums ir pareizs. Vienu un to pašu attēlu iespējams interpretēt dažādos veidos.

Interpretējot zīmējumu, jāņem verā pieļaujamā grafiskā kļūda. Vidēja izmēra zīmējumā  $50 \times 50$  mm tā var būt  $\approx 2$  mm. Ja kļūda pārsniedz 5% no zīmējuma videjā izmēra, tad zīmējums ir vai nu nekvalitatīvs vai nepareizs.

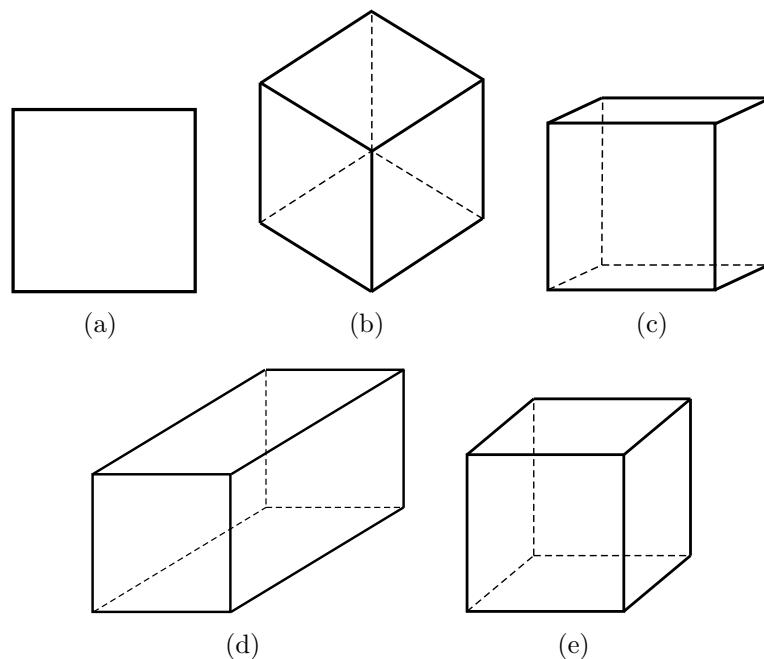
Minimālā klūda vienā operācijā ir 0,1 mm (minimālais līnijas platus). Ja zīmējumu iegūst daudzu operāciju rezultātā, tad statistiski palielinās zīmējuma grafiskā klūda, tas ir nenovēršami.

Vismazākā grafiskā klūda sasniedzama, izmantojot aprēķinus, tiešu mērišanu un kvalitatīvus instrumentus (lineālu, taisno leņķi, cirkuli, otrās kārtas līkņu šablonus un labu zīmuli vai flomasteri).

Līknes novilkšana ar šablonu ir efektīvs paņēmiens zīmējuma kvalitātes paaugstināšanai un darbietilpības samazināšanai.

**2. Attēlam jābūt uzskatāmam, t.i., tādam, lai bez iztēles piepūles varētu uztvert, kāds ķermenis ir attēlots, tāpēc mērķa sasniegšanai attēlā parāda ne tikai ķermeņa ārējo izskatu, bet arī neredzamās līnijas**

Šī prasība ir ļoti nozīmīga mācību procesā, kas saitās ar telpisko figūru attēlošanu. Tikai ārkārtējos gadījumos (ja uzskatāmam attēlojumam ir ļoti sarežģīts izpildījums un prasa daudz laika) var samierināties ar mazāk uzskatāmu, bet vieglāk konstruējamu rasējumu. Nevajadzētu jaukt uzskatāmību ar attēla pareizību. Attēls var būt pareizs, bet ļoti neuzskatāms, jo attēlam jārada pēc iespējas pilnīgāka īstenības ilūzija. Aplūkosim kuba projekcijas (5. zīmējums).



**5. zīm.**  
Kuba paralēlprojekciju varianti

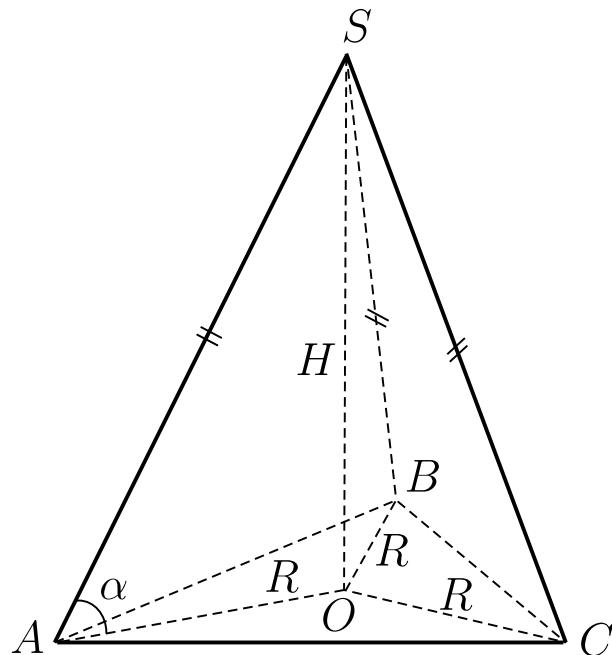
Šie attēli ir pareizi, tā kā tie ir kuba paralēlprojekcijas dažādos tā novietojumos, dažādiem projicēšanas virzieniem, bet tie nav uzskatāmi, izņemot 5. (e) zīmējumu.

Aplūkosim dažus piemērus no skolas mācību grāmatām, kurās ir vairāki zīmējumi ar rupjām kļūdam.

---

**1.1. piemērs.** *B. Āboltiņa, P. Čepuls. Geometrija vidusskolai. - R.: Zvaigzne ABC, 2000. - 162. lpp.*

*Piramīdas pamats ir trijstūris, kura malu garumi ir 2 m, 2 m,  $2\sqrt{2}$  m un visas sānu šķautnes ir vienādas ar 4 m. Aprēķināt piramīdas augstumu un leņķus, ko veido sānu šķautnes ar pamata plakni.*



**6. zīm.**

Novilksim piramīdas augstumu  $SO$  ( $O$  - augstuma pamats). Tā kā piramīdas visas sānu šķautnes ir vienādas, tad saskaņā ar teorēmu piramīdas augstuma pamats  $O$  ir ap pamatu apvilktais riņķa līnijas centrs un visi leņķi, ko veido sānu šķautnes ar pamata plakni, ir vienādi, t.i.,

$$OA = OB = OC = R,$$

$$\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO.$$

Aprēķināsim  $AO = R$  pēc formulas

$$S_{\triangle ABC} = \frac{abc}{4R}. \quad (*)$$

Šeit trijstūra  $ABC$  laukumu aprēķināsim, lietojot Hērona formulu

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

$$P_{\triangle ABC} = 2 + 2 + 2\sqrt{2} = 4 + 2\sqrt{2} \text{ (m)},$$

tātad pusperimetrs

$$p = 2 + \sqrt{2} \text{ (m)}.$$

Tad no (\*) seko

$$2 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2}}{4R}; \quad R = \sqrt{2} \text{ (m)}.$$

Tātad

$$OA = OB = OC = R = \sqrt{2} \text{ (m)}.$$

Lai aprēķinātu piramīdas augstumu  $SO = H$ , aplūkosim trijstūri  $SAO$  (protams,  $\triangle SAO = \triangle SBO = \triangle SCO$ ):

$$SO = H = \sqrt{AS^2 - R^2} = \sqrt{16 - 2} = \sqrt{14} \text{ (m)},$$

$$\tg \alpha = \frac{H}{R} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{2}} = \sqrt{7}.$$

Tā kā lenķis  $\alpha$  ir šaurs lenķis, tad

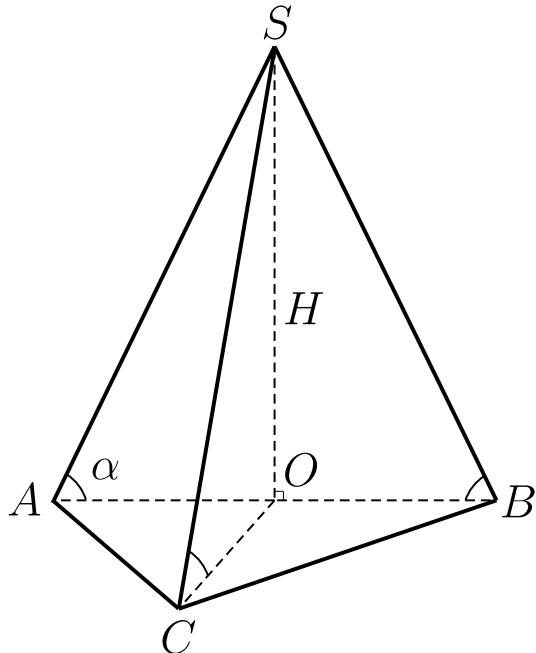
$$\alpha = \arctg \sqrt{7}.$$

## 6. zīmējuma analīze.

Zīmējums (6. zīm.) ir nepareizs: pēc uzdevuma noteikumiem trijstūris  $ABC$  ir taislenķa un sānu šķautnes veido vienādus leņķus ar pamatu, tātad piramīdas augstuma pamats  $O$  jāattēlo hipotenūzas viduspunktā.

6. zīmējuma apraksts ir pretrunīgs zīmējumam.

Viens no iespējamajiem zīmējuma variantiem redzams 7. zīm.



7. zīm.

Aprēķināsim piramīdas augstumu  $SO = H$ .

No taisnlenķa trijstūra  $AOS$  pēc Pitagora teorēmas

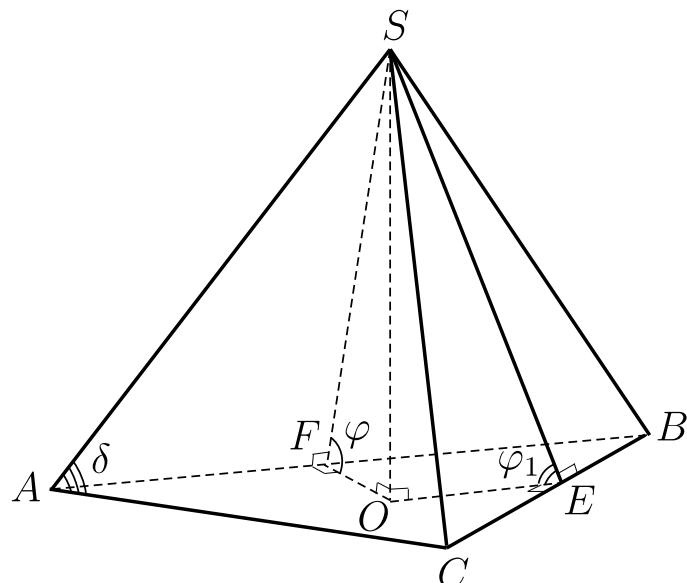
$$SO = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{16 - 2} = \sqrt{14} \text{ (m)}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{H}{R} = \frac{SO}{AO} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{2}} = \sqrt{7}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \sqrt{7}.$$

**1.2. piemērs.** *B. Āboltiņa, P. Čepuls. Geometrija vidusskolai. - R.: Zvaigzne ABC, 2000. - 153. lpp.*

*Leņķi, ko veido piramīdas sānu skaldne ar pamata plakni, sauc par divplakņu kakta leņķi pie pamata, piemēram, (8. zīm.)  $\angle SFO = \varphi$  un  $\angle SEO = \varphi_1$ .*



8. zīm.

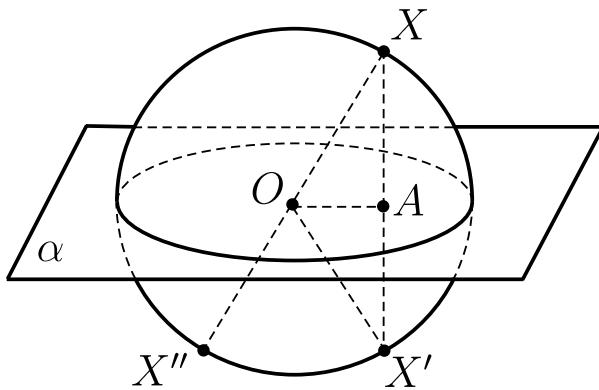
### 8. zīmējuma analīze.

Zīmējumā (8. zīm.)  $FB \parallel OE$ , bet  $BC$  attēlo nogriezni, kas perpendikulārs nogrieznim  $OE$ ,  $OF \perp AB$ , tātad  $OF \perp OE$ . Nogriežni  $OF$  un  $BE$  ir divi perpendikuli pret paralēlām taisnēm, tātad tiem jābūt paralēliem. Apraksts pretrunīgs zīmējumam.

---

**1.3. piemērs.** A. Pogorelovs. *Geometrija 9. - 11. klasei. - R.: Zvaigzne, 1987. - 71. lpp.*

**Teorēma:** Jebkura lodes diametrālā plakne ir lodes simetrijas plakne. Lodes centrs ir tās simetrijas centrs.



**9. zīm.**

**Pierādījums.** Pieņemsim, ka  $\alpha$  ir diametrālā plakne, bet  $X$  - brīvi izraudzīts lodes punkts (9. zīm.). Konstruēsim punktu  $X'$ , kas simetrisks punktam  $X$  attiecībā pret plakni  $\alpha$ . Nogrieznis  $XX'$  ir perpendikulārs plaknēi  $\alpha$  un krustpunktā ar šo plakni (punktā  $A$ ) dalās uz pusēm. No taisnlenķa trijstūru  $OAX$  un  $OAX'$  vienādības izriet, ka  $OX' = OX$ . Tā kā  $OX \leq R$ , tad arī  $OX' \leq R$ , t.i., punkta  $X$  simetriskais punkts  $X'$  pieder pie lodes. Teorēmas pirmais apgalvojums ir pierādīts.

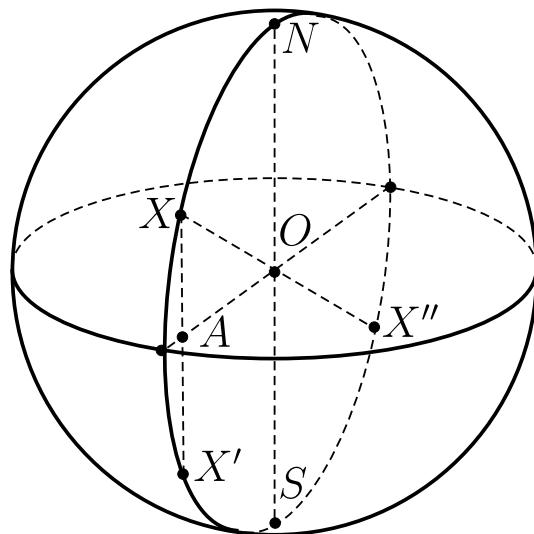
Pieņemsim tagad, ka  $X''$  ir punkta  $X$  simetriskais punkts attiecībā pret lodes centru. Tādā gadījumā  $OX'' = OX \leq R$ , un tas nozīmē, ka punkts  $X''$  pieder pie lodes. Teorēma ir pilnīgi pierādīta.

---

## 9. zīmējuma analīze.

Zīmējumā (9. zīm.) redzama lodes ortogonālā projekcija, jo tās kontūra ir riņķa līnija, ekvātora attēls ir elipse, kas pieskaras šai riņķa līnijai. Kontūras riņķa līnija ir paralēla projekciju plaknei, bet ekvātora plakne nav perpendikulāra šai plaknei (pretējā gadījumā ekvātora vietā būtu redzams nogrieznis). Punkti  $X$  un  $X'$  pieder kontūras plaknei, tātad taisne  $XX'$  nav pret ekvātora plakni perpendikulārās taisnes attēls. No šejienes seko, ka  $X$  un  $X'$  neattēlo simetriskus punktus attiecībā pret plakni  $\alpha$ . Zīmējums ir nepareizs.

Pareizs zīmējuma variants ir redzams 10. zīm.



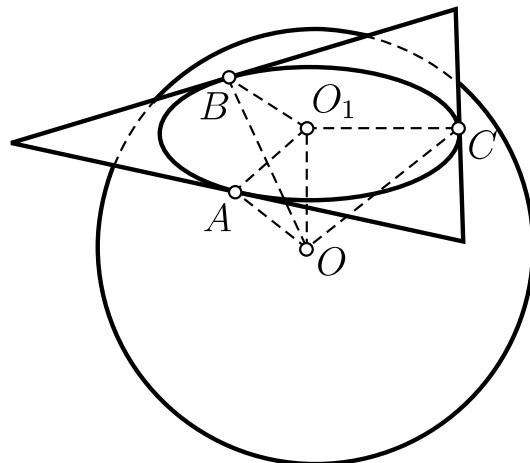
10. zīm.

---

1.4. piemērs. A. Pogorelovs. Geometrija 9. - 11. klasei. -

R.: Zvaigzne, 1987. - 72. lpp.

Lode, kuras rādiuss ir  $R$ , pieskaras regulāra trijstūra visām trim malām. Aprēķināt attālumu no lodes centra līdz trijstūra plaknei, ja trijstūra mala ir  $a$ .



11. zīm.

**Atrisinājums.** Pieņemsim, ka  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ir lodes un trijstūru malu pieskaršanās punkti (11. zīm.). No lodes centra  $O$  novilksim perpendikulu  $OO_1$  pret trijstūra plakni. Nogriežņi  $OA$ ,  $OB$  un  $OC$  ir perpendikulāri trijstūra malām. Pēc triju perpendikulu teorēmas nogriežņi  $O_1A$ ,  $O_1B$  un  $O_1C$  arī ir perpendikulāri attiecīgajām trijstūra malām. No taisnleņķa trijstūru  $OO_1A$ ,  $OO_1B$ ,  $OO_1C$  vienādības (šiem trijstūriem katete  $OO_1$  ir kopēja, bet hipotenūzas ir vienādas kā rādiuss) izriet malu vienādība:  $O_1A = O_1B = O_1C$ . Tātad  $O_1$  ir trijstūrī ievilktais riņķa līnijas centrs. Kā zināms, šīs riņķa līnijas rādiuss ir vienāds ar  $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ . Pēc Pitagora teorēmas atrodam meklēto attālumu:  $\sqrt{OA^2 - O_1A^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{12}}$ .

---

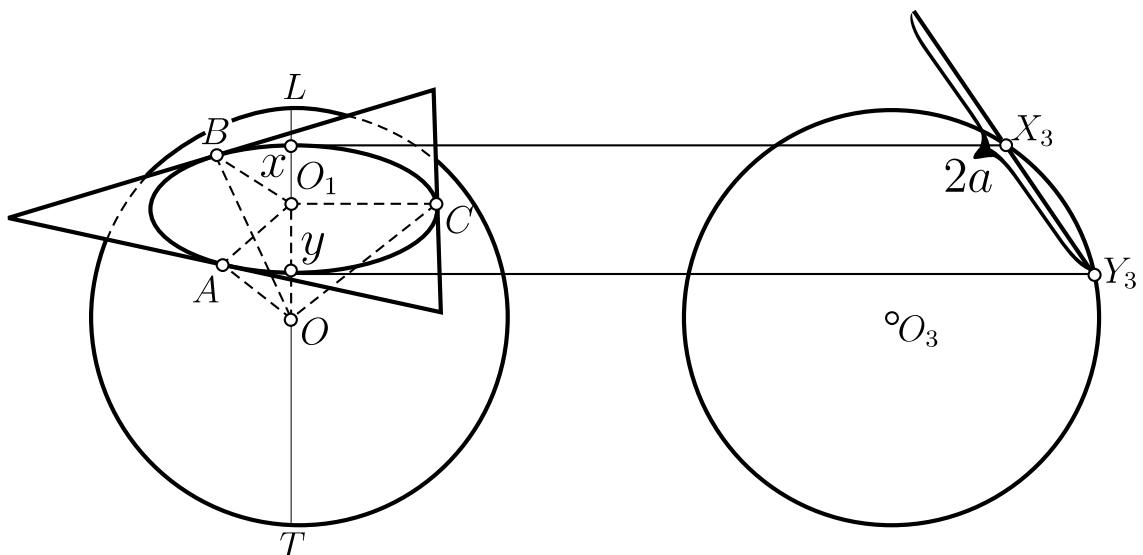
## 11. zīmējuma analīze.

Sfēras attēlojums izpildīts ortogonālā projekcijā, jo attēla kontūra ir rīnga līnija.

Šajā zīmējumā klūdas noteikšanai nepieciešamas papildu konstrukcijas.

Konstruēsim lodes profilo projekciju, pieņemot doto attēlu par frontālo projekciju.

Diametru  $LT$  interpretēsim kā lodes lielo riņķa līniju, kas perpendikulāra frontālai projekciju plaknei. Profilā plaknē tās projekcija ir riņķa līnija. Pa kārtotējām līnijām atrodam  $X$  un  $Y$  atbilstošās punktu profilās projekcijas.  $X_3Y_3$  jābūt vienādam ar elipses lielo asi  $2a$ .



12. zím.

## 2. Sfēras šķēluma ar plakni paralēlprojekcija

Sfēras attēlošanai izmanto ortogonālo paralēlprojekciju. Zīmējumā parāda sfēras projekcijas kontūru - tās šķēluma ar projekciju plaknei paralēlu plakni ortogonālo projekciju. Sfēras projekcijas kontūra ir riņķa līnija, kuras rādiuss ir vienāds ar sfēras rādiusu. Lai parādītu sfēras dziļumu, zīmējumā vēl jāparāda sfēras riņķa līniju projekcijas, kuru plaknes nav paralēlas projekciju plaknei.

Sfēras šķēluma ar plakni ortogonālo projekciju, ja tas iespējams, novelk ar elipses šablonu vai cirkuli.

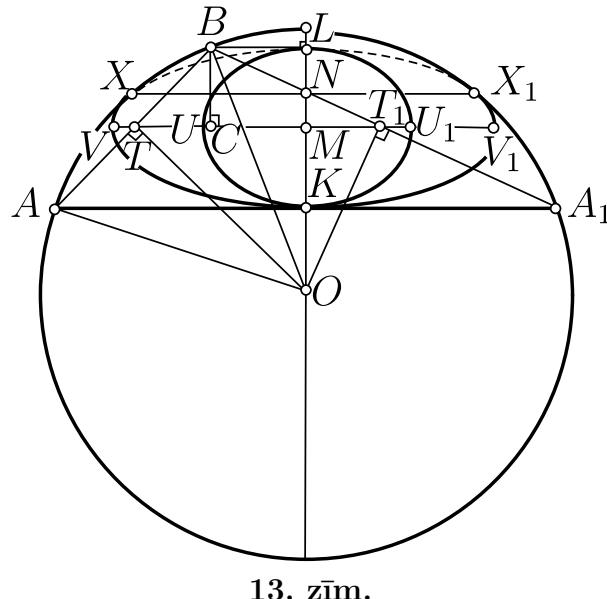
Riņķa līniju ar centru  $O$  un rādiusu  $R$  apzīmēsim  $\omega(O; R)$ , bet elipsi ar centru  $M$ , pusasīm  $a$  un  $b$ , apzīmēsim  $\varepsilon(M; a, b)$ .

**Teorēma 1:** ja riņķa līnijas  $\omega_0(O; R)$  centrs pieder taisnei, kas satur elapses  $\varepsilon(M; a, b)$  mazo pusasi  $b$  un

$$OM = \sqrt{R^2 - a^2} \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a},$$

tad riņķa līniju un elpsi var interpretēt kā sfēras ortogonālās projekcijas kontūru un tās šķēluma ar plakni ortogonālo projekciju.

Elipse  $\varepsilon(M; a, b)$ , kur  $a = MU = MU_1$ ,  $b = ML = ML_1$ , un riņķa līnija  $\omega_0(O; R)$  novietotas atbilstoši teorēmas nosacījumiem. (13. zīm.).



13. zīm.

Pierādīsim, ka eksistē vēl viena elipse  $\varepsilon_1(M; a_1, b)$ , kas atbilst teorēmas nosacījumiem, ka uz sfēras eksistē riņķa līnijas  $\omega'$  un  $\omega'_1$ , kuru ortogonālās projekcijas ir atbilstoši elapses  $\varepsilon$  un  $\varepsilon_1$ .

Pieņemsim, ka riņķa līnija  $\omega_0$  ir sfēras šķēlums ar projekciju plakni. Caur elipses  $\varepsilon$  mazās ass galapunktiem  $L$  un  $K$  novilksim perpendikulāri pret to nogriežņus  $BL$  un  $AA_1$ .

Apzīmēsim  $AB = 2x$  un  $A_1B = 2x_1$ , punkti  $T$  un  $T_1$  ir attiecīgi šo nogriežņu viduspunkti.

Leņķi  $\alpha = \angle TBC = \angle MTO$ ,  $\alpha_1 = \angle T_1BC = \angle MT_1O$ , kā leņķi ar perpendikulārām malām, kur  $\cos \alpha = \frac{b}{x}$  un  $\cos \alpha_1 = \frac{b}{x_1}$ . No taislenķa trijstūriem  $BTO$  un  $BT_1O$  attiecīgi  $OT = \sqrt{R^2 - x^2}$  un  $OT_1 = \sqrt{R^2 - x_1^2}$ , bet no taislenķa trijstūriem  $OTM$  un  $OT_1M$  iegūstam

$$OM = OT \sin \alpha = OT_1 \sin \alpha_1.$$

No kurienes

$$OM = \sqrt{R^2 - x^2} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{R^2 - x^2} \frac{\sqrt{x^2 - b^2}}{x},$$

$$OM = \sqrt{R^2 - x_1^2} \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_1} = \sqrt{R^2 - x_1^2} \frac{\sqrt{x_1^2 - b^2}}{x_1}.$$

Tātad nogriežņi  $AB = 2x$  un  $A_1B = 2x_1$  ir vienādi ar tādu elipšu lielajām asīm, kas apmierina teorēmas nosacījumus:

$$AB = UU_1 = 2a$$

$$A_1B = 2a_1.$$

Nogriežņus  $AB$  un  $A_1B$  uzskatīsim par sfēras riņķa līniju  $\omega'$  un  $\omega'_1$ , kuru plaknes perpendikulāras projekciju plaknei  $P$ , ortogonālajām projekcijām. Punkti  $T$  un  $T_1$  ir attiecīgi šo riņķa līniju diametru  $d$  un  $d_1$ , kas perpendikulāri plaknei  $P$ , ortogonālās projekcijas.

Sfēru pagriežam par  $90^\circ$  ap asi  $OL$ . Diametri  $d$  un  $d_1$  kļūst paralēli projekciju plaknei  $P$ , un to projekcijas ir attiecīgi elipšu  $\varepsilon$  un  $\varepsilon_1$  asis  $UU_1$  un  $VV_1$ . Riņķa līnijas  $\omega_0$  plakne pēc pagriešanas kļūst perpendikulāra projekciju plaknei, tāpēc riņķa līniju  $\omega'$  un  $\omega'_1$  diametru  $AB$  un  $A_1B$  projekcija ir elipšu  $\varepsilon$  un  $\varepsilon_1$  mazā ass  $KL$ .

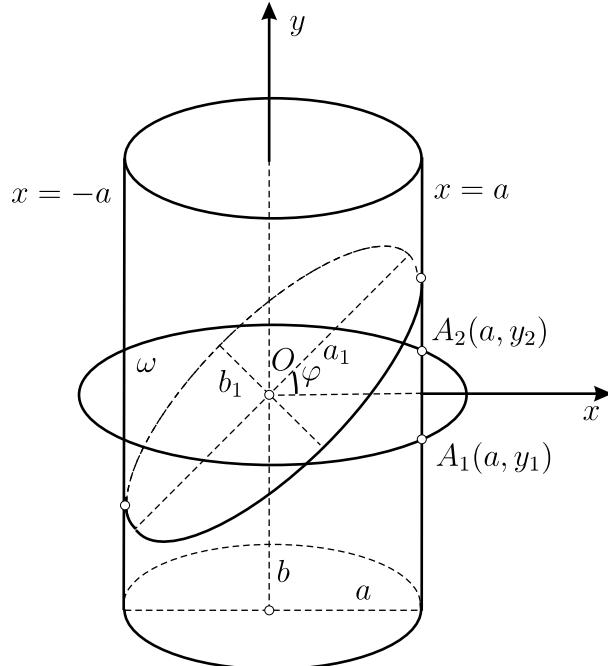
Sfēras riņķa līnijas  $\omega'$  un  $\omega'_1$  pēc pagriešanas kļūst par tās riņķa līnijām  $\omega$  un  $\omega'_1$ , kuru projekcijas ir attiecīgi elipses  $\varepsilon$  un  $\varepsilon_1$ .

Ja sfēru pagriežam par  $90^\circ$  pretējā virzienā, tad iegūstam vēl divas tās riņķa līnijas, kuru projekcijas arī ir elipses  $\varepsilon$  un  $\varepsilon_1$ . Lai tās atšķirtu no iepriekšējām, jālieto svītrīnijas attiecīgās redzamības parādīšanai.

Punkts  $N$  ir riņķa līnijas  $\omega'_1$  un sfēras lielās riņķa līnijas, kuras plakne perpendikulāra plaknei  $P$ , kopējās hordas ortogonālā projekcija. Šī horda vienāda ar nogriezni  $XX_1$ , tāpēc elipse  $\varepsilon_1$  pieskaras riņķa līnijai  $\omega_0$  punktos  $X$  un  $X_1$ .

### 3. Cilindra eliptiskā šķēluma paralēlprojekcija

Aplūkosim metodi, kas ļauj, izmantojot divus elipses šablonus, pareizi novietot šīs elipses un to kopīgas paralēlās pieskares tā, lai zīmējumu varētu interpretēt kā rotācijas cilindra šķēluma ar plakni attēlu paralēlprojekcijā. Izmantojot algebrisko līniju vienādojumus, atradīsim formulu, kas ļauj aprēķināt lielākās elipses ass pagrieziena leņķi  $\varphi$ .



14. zīm.

Novietosim Dekarta koordinātas sistēmu punktā  $O$ .

Lai pareizi novilktu rotācijas cilindra šķēluma ar plakni attēlu, rīkosimies sekojošā veidā.

Novietosim elipses  $\omega$  lielo asi perpendikulāri cilindra veiduļu  $x = a$  un  $x = -a$  attēliem, šī elipse krusto taisni  $x = a$  divos punktos  $A_1(a, y_1)$  un  $A_2(a, y_2)$ .

Dekarta koordinātu sistēmā elipses  $\omega$  vienādojums ir:

$$\frac{(x')^2}{a_1^2} + \frac{(y')^2}{b_1^2} = 1 \quad (3.1)$$

vai

$$b_1^2 (x')^2 + a_1^2 (y')^2 - a_1^2 b_1^2 = 0. \quad (3.2)$$

Izmantojot pagrieziena formulas

$$\begin{cases} x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi, \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi, \end{cases} \quad (3.3)$$

pagriezīsim elipsi (3.2) par leņķi  $\varphi$  tā, ka tā pieskaras taisnei  $x = a$ .

Pagrieztās elipses vienādojums ir:

$$b_1^2(x \cos \varphi + y \sin \varphi)^2 + a_1^2(y \cos \varphi - x \sin \varphi) - a_1^2 b_1^2 = 0 \quad (3.4)$$

Elipses (3.4) un taisnes  $x = a$  krustpunktu koordinātas var atrast no vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} b_1^2(x \cos \varphi + y \sin \varphi)^2 + a_1^2(y \cos \varphi - x \sin \varphi) - a_1^2 b_1^2 = 0, \\ x = a. \end{cases} \quad (3.5)$$

Ievietojot pirmajā vienādojumā  $x = a$ , iegūsim kvadrātvienādojumu

$$\begin{aligned} y^2(b_1^2 \sin^2 \varphi + a_1^2 \cos^2 \varphi) + 2y(ab_1^2 - aa_1^2) \sin \varphi \cos \varphi + \\ + (a^2 b_1^2 \cos^2 \varphi + a^2 a_1^2 \sin^2 \varphi - a_1^2 b_1^2) = 0. \end{aligned}$$

Lai līknei (3.4) un taisnei  $x = a$  būtu viens kopīgs punkts, vienādojumu sistēmai (3.5) jābūt diviem sakrītošiem atrisinājumiem, t.i.,  $y_1 = y_2$ .

Šajā gadījumā kvadrātvienādojuma diskriminantam jābūt vienādam ar nulli, t.i.,

$$\begin{aligned} a^2(a_1^2 - b_1^2)^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi - \\ - (b_1^2 \sin^2 \varphi + a_1^2 \cos^2 \varphi)(a^2 b_1^2 \cos^2 \varphi + a^2 a_1^2 \sin^2 \varphi - a_1^2 b_1^2) = 0. \end{aligned}$$

Veicam algebriskus pārveidojumus:

$$\begin{aligned} a^2(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)^2 - a_1^2 \cos^2 \varphi - b_1^2 \sin^2 \varphi = 0, \\ a_1^2 \cos^2 \varphi + b_1^2 \sin^2 \varphi - a^2 = 0, \\ a_1^2 \cos^2 \varphi + b_1^2 \sin^2 \varphi - a^2 (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = 0, \\ (a_1^2 - a^2) \cos^2 \varphi = (a^2 - b_1^2) \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

Rezultātā iegūstam formulu pagrieziena leņķa  $\varphi$  aprēķināšanai, t.i.,

$$\operatorname{tg}^2 \varphi = \frac{a_1^2 - a^2}{a^2 - b_1^2}.$$

Ar šīs formulas palīdzību varam, izmantojot elipses šablonu, novilk rotācijas cilindra šķēluma ar plakni attēlu.

No formulas un arī no ģeometriskiem apsvērumiem redzam, ka var izmantot tikai tādu šablonu, kura pusasis  $a_1 \geq a$ ,  $b_1 \leq a$ , pretejā gadījumā šablonu nevar novietot tā, ka tas pieskaras taisnēm  $x = a$  un  $x = -a$ .

## 4. Konusa eliptiskā šķēluma paralēlprojekcija

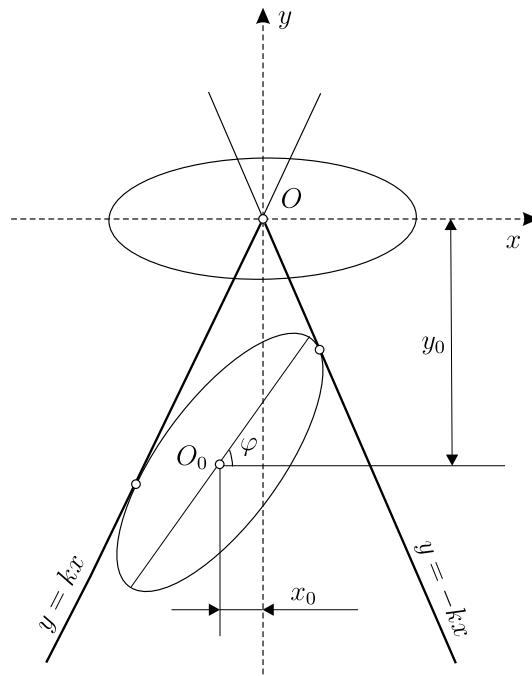
Aplūkosim metodi, kas ļauj, izmantojot divus elipses šablonus, pareizi novietot šīs elipses un to kopīgas pieskares tā, lai zīmējumu varētu interpretēt kā rotācijas konusa šķēluma ar plakni attēlu paralēlprojekcijā.

Četri leņķi, ko veido taisnes  $y = kx$  un  $y = -kx$ , nosaka četrus plaknes apgabalus, kuriem var piederēt konusa projekcija.

Turpmāk uzskatīsim, ka konusa projekcija pieder apgabalam, kuru norobežo ar platāku līniju novilktie stari.

Nosauksim to par ***konusa projekcijas apgabalu***.

Leņķi starp stariem apzīmēsim  $\alpha$ .



15. zīm.

Novietosim Dekarta koordinātas sistēmu konusa virsotnes attēlā  $O$ . Dotajā koordinātu sistēmā  $Oxy$  elipses un konusa veiduļu attēlu vienādojumi ir:

$$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1, \quad (4.1)$$

$$y = kx, \quad (4.2)$$

$$y = -kx. \quad (4.3)$$

Izmantojot kustības formulas

$$\begin{cases} x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi + x_0, \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi + y_0, \end{cases} \quad (4.4)$$

novietosim elipsi (4.1) tā, ka tā pieskaras taisnēm (4.2) un (4.3).

Formulās (4.4) orientētu leņķi  $\varphi$  nemsim robežās  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .

Pārējos elapses novietojumus var iegūt, izmantojot simetriju.

Punkta  $O_0$  koordinātas ir funkcijas no  $\varphi$ :

$$x_0 = x(\varphi), \quad y_0 = y(\varphi),$$

t.i., uzskatām pagrieziena leņķi  $\varphi$  par parametru, kuru varam brīvi izvēlēties no 0 līdz  $\frac{\pi}{2}$ .

Pagrieztās elapses vienādojums ir:

$$b^2((x \cos \varphi + y \sin \varphi) - m)^2 + a^2((y \cos \varphi - x \sin \varphi) - n)^2 - a^2 b^2 = 0, \quad (4.5)$$

kur

$$x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi = m,$$

$$y_0 \cos \varphi - x_0 \sin \varphi = n.$$

$O_0(x_0, y_0)$  ir elapses (4.5) centrs.

Aplūkosim līknes (4.5) un taisnē (4.2), (4.3) savstarpējo novietojumu.

Risinot vienādojumu (4.2), (4.5) un (4.3), (4.5) sistēmas, iegūsim kvadrātvienādojumus:

$$\begin{aligned} & x^2(b^2(\cos \varphi + k \sin \varphi)^2 + a^2(k \cos \varphi - \sin \varphi)^2) - \\ & - 2x((\cos \varphi + k \sin \varphi)mb^2 + (k \cos \varphi - \sin \varphi)na^2) + \\ & + (m^2b^2 + n^2a^2 - a^2b^2) = 0, \quad (4.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x^2(b^2(\cos \varphi - k \sin \varphi)^2 + a^2(k \cos \varphi + \sin \varphi)^2) - \\ & - 2x((\cos \varphi - k \sin \varphi)mb^2 - (k \cos \varphi + \sin \varphi)na^2) + \\ & + (m^2b^2 + n^2a^2 - a^2b^2) = 0. \quad (4.7) \end{aligned}$$

Lai līknei (4.5) un taisnēm (4.2), (4.3) būtu pa vienam kopīgam punktam, vienādojumu sistēmam (4.2), (4.5) un (4.3), (4.5) jābūt diviem sakrītošiem atrisinājumiem. Šajā gadījumā kvadrātvienādojumu (4.6) un (4.7) diskriminantiem jābūt vienādiem ar nulli, t.i.,

$$\begin{aligned} & ((\cos \varphi + k \sin \varphi) mb^2 + (k \cos \varphi - \sin \varphi) na^2)^2 - \\ & - (b^2 (\cos \varphi + k \sin \varphi)^2 + a^2 (k \cos \varphi - \sin \varphi)^2) (m^2 b^2 + n^2 a^2 - a^2 b^2) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ((\cos \varphi - k \sin \varphi) mb^2 - (k \cos \varphi + \sin \varphi) na^2)^2 - \\ & - (b^2 (\cos \varphi - k \sin \varphi)^2 + a^2 (k \cos \varphi + \sin \varphi)^2) (m^2 b^2 + n^2 a^2 - a^2 b^2) = 0. \end{aligned}$$

Veicot pārveidojumus, iegūstam:

$$(y_0 - kx_0)^2 = a^2 (k \cos \varphi - \sin \varphi)^2 + b^2 (\cos \varphi + k \sin \varphi)^2, \quad (4.8)$$

$$(y_0 + kx_0)^2 = a^2 (k \cos \varphi + \sin \varphi)^2 + b^2 (\cos \varphi - k \sin \varphi)^2. \quad (4.9)$$

Vienādojumu (4.8) un (4.9) sistēmas atrisinājums ir

$$x_0 = x(\varphi), \quad y_0 = y(\varphi) :$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = \frac{1}{2k} \left[ \pm \sqrt{a^2(k \cos \varphi + \sin \varphi)^2 + b^2(\cos \varphi - k \sin \varphi)^2} - \right. \\ \left. - \left( \pm \sqrt{a^2(k \cos \varphi - \sin \varphi)^2 + b^2(\cos \varphi + k \sin \varphi)^2} \right) \right], \\ y_0 = \frac{1}{2} \left[ \pm \sqrt{a^2(k \cos \varphi - \sin \varphi)^2 + b^2(\cos \varphi + k \sin \varphi)^2} \pm \right. \\ \left. \pm \sqrt{a^2(k \cos \varphi + \sin \varphi)^2 + b^2(\cos \varphi - k \sin \varphi)^2} \right]. \end{array} \right. \quad (4.10)$$

Apzīmējot

$$\begin{aligned} a^2 (k \cos \varphi + \sin \varphi)^2 + b^2 (\cos \varphi - k \sin \varphi)^2 &= A^2, \\ a^2 (k \cos \varphi - \sin \varphi)^2 + b^2 (\cos \varphi + k \sin \varphi)^2 &= B^2, \end{aligned}$$

iegūstam

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = \frac{1}{2k} [\pm A - (\pm B)], \\ y_0 = \frac{1}{2} [\pm A \pm B]. \end{array} \right. \quad (4.11)$$

No visam zīmju kombinācijām izvēlēsimies to, kas atbilst 15. zīm., t.i.,

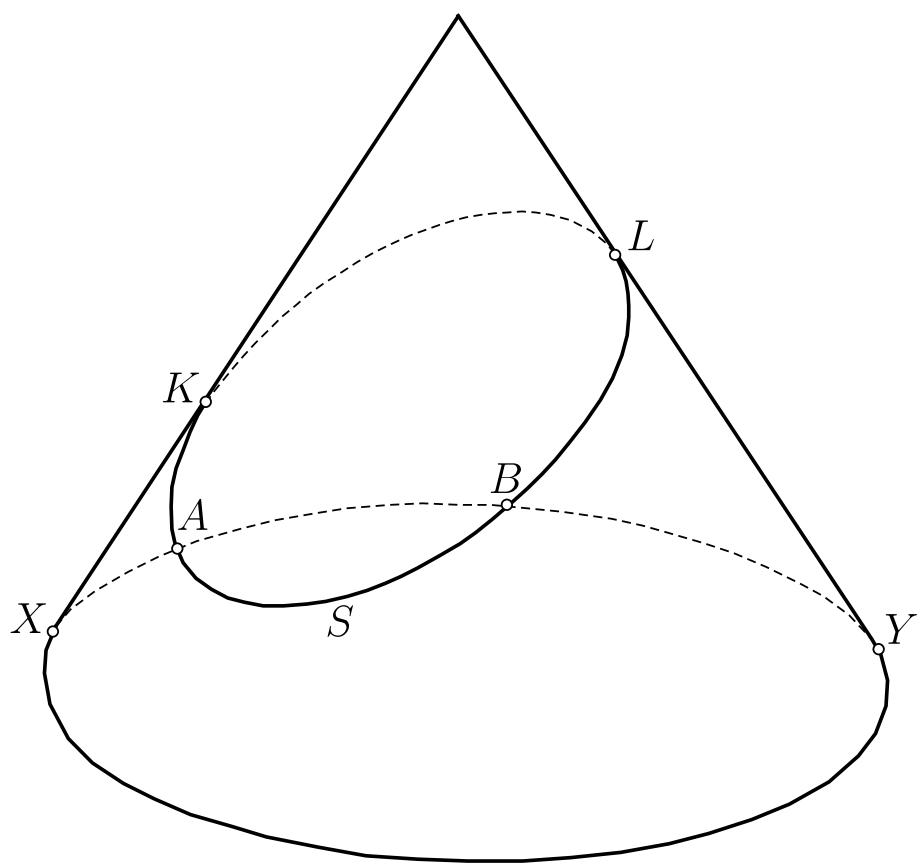
$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = \frac{1}{2k} [-A + B] < 0, \\ y_0 = \frac{1}{2} [-A - B] < 0. \end{array} \right. \quad (4.12)$$

Salīdzināsim  $A$  un  $B$  vērtības, t.i.,

$$\begin{aligned}B^2 - A^2 &= -4ka^2 \cos \varphi \sin \varphi + 4kb^2 \cos \varphi \sin \varphi = \\&= 4k \cos \varphi \sin \varphi (b^2 - a^2) = -4k \cos \varphi \sin \varphi (a^2 - b^2) \leq 0.\end{aligned}$$

No šejienes  $A \geq B$ , jo  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$  un  $a > b$ .

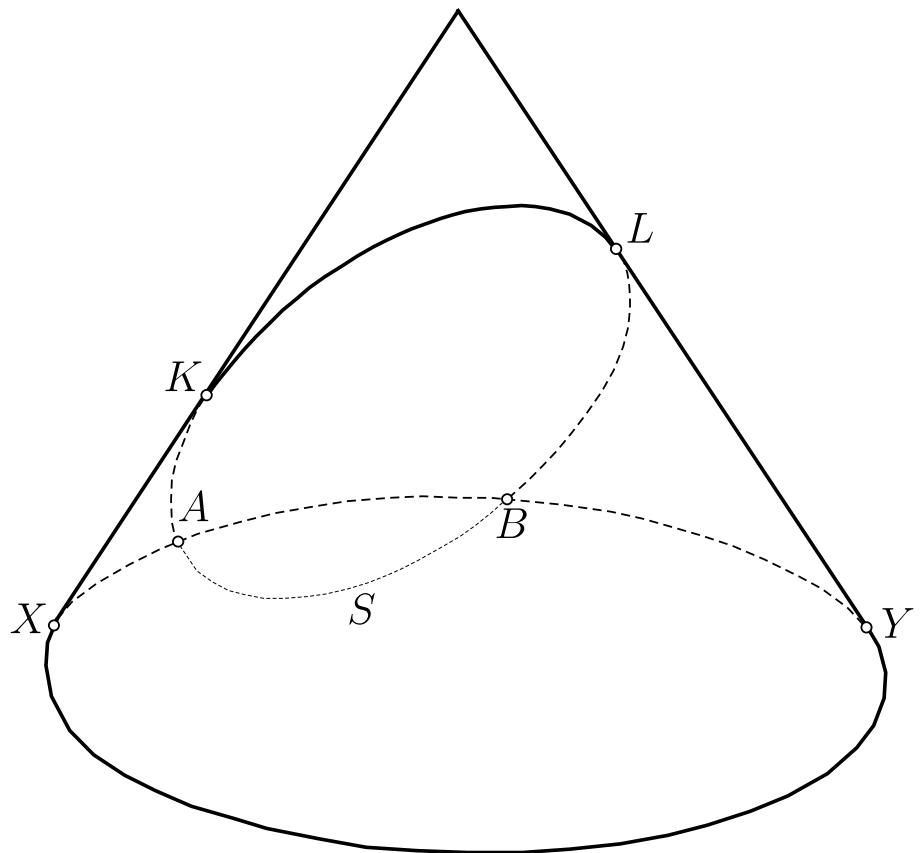
Iegūtos parametriskos vienādojumus (4.10) ērti izmantot konusa eliptiskā šķēluma ar plakni attēlošanai. Izvēloties veiduļu attēlus (dotās taisnes), pēc šablona pusasīm  $a$ ,  $b$  un pagrieziena leņķi  $\varphi$  aprēķina centra koordinātas.



**16. zīm.**

Konusa eliptiskā šķēluma paralēlprojekcija

Punkti  $A$  un  $B$  attēlo šķēluma un pamata konkurējošos punktus

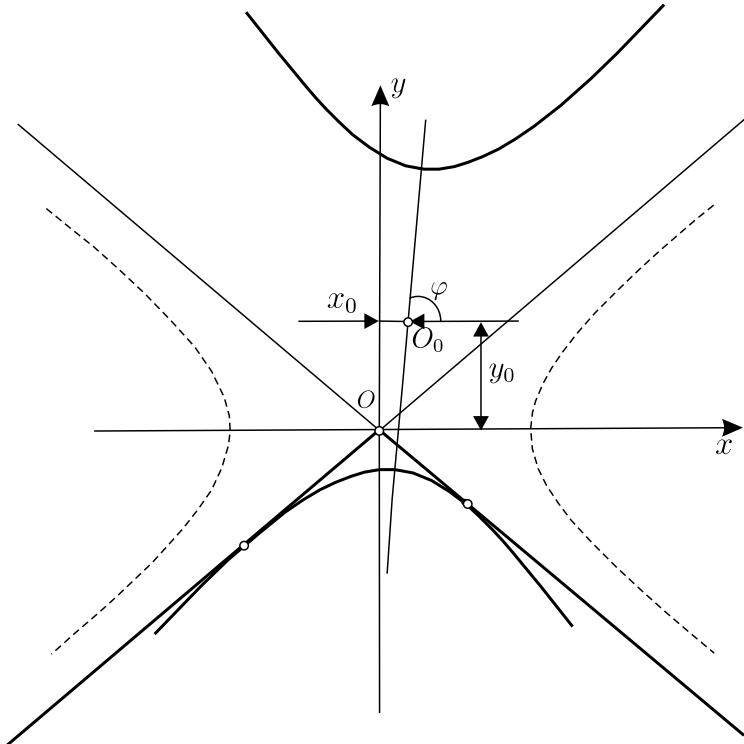


17. zīm.

Konusa eliptiskā šķēluma paralēlprojekcija  
Punkti  $A$  un  $B$  ir šķēluma un pamata krustpunktu attēli

## 5. Konusa hiperboliskā šķēluma paralēlprojekcija

Aplūkosim metodi, kas ļauj, izmantojot hiperolas šablonu, pareizi novietot šo hiperbolu un tās kopīgas pieskares tā, lai zīmējumu varētu interpretēt kā rotācijas konusa šķēluma ar plakni attēlu paralēlprojekcijā.



18. zīm.

Novietosim Dekarta koordinātu sistēmu konusa virsotnes attēlā  $O$ .

Dotajā koordinātu sistēmā  $Oxy$  hiperbolas un konusa veiduļu attēlu vienādojumi ir:

$$\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1, \quad (5.1)$$

$$y = kx, \quad (5.2)$$

$$y = -kx. \quad (5.3)$$

Izmantojot kustības formulas

$$\begin{cases} x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi + x_0, \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi + y_0, \end{cases} \quad (5.4)$$

novietosim hiperbolu (5.1) tā, ka tā pieskaras taisnēm (5.2) un (5.3).

Lai hiperbolu varētu novietot konusa projekcijas apgabalā, nepieciešams, lai leņķis  $\alpha$  starp stariem, kas to ierobežo, nebūtu mazāks par leņķi starp hiperbolas asimptotēm  $\beta$ . Te  $\beta$  ir leņķis starp hiperbolas asimptotēm piederošiem stariem, kas satur hiperbolas reālo asi.

Jāizpildās nevienādībai  $0 \leq k \leq \frac{a}{b}$ .

Ja pagrieziena leņķis vienāds ar  $\arctg k$ , tad hiperbolas reālā ass  $Ox$  kļūst paralēla taisnei  $y = kx$ .

Lai hiperbolas asimptote piederētu konusa projekcijas apgabalam, jāpagriež vēl par leņķi  $\arctg \frac{b}{a}$ .

Kopējais pagrieziena leņķis  $\varphi$  nav mazāks par šo leņķu summu, bet nepārsniedz  $\frac{\pi}{2}$ , tātad  $\gamma = \arctg k + \arctg \frac{b}{a} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .

Pagrieztās hiperbolas vienādojums ir:

$$b^2((x \cos \varphi + y \sin \varphi) - m)^2 - a^2((y \cos \varphi - x \sin \varphi) - n)^2 - a^2b^2 = 0, \quad (5.5)$$

kur

$$x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi = m,$$

$$y_0 \cos \varphi - x_0 \sin \varphi = n.$$

$O_0(x_0, y_0)$  ir hiperbolas (5.5) centrs.

Aplūkosim līknes (5.5) un taišņu (5.2), (5.3) savstarpējo novietojumu.

Risinot vienādojumu (5.2), (5.5) un (5.3), (5.5) sistēmas, iegūsim kvadrātvienādojumus:

$$\begin{aligned} & x^2(b^2(\cos \varphi + k \sin \varphi)^2 - a^2(k \cos \varphi - \sin \varphi)^2) - \\ & - 2x((\cos \varphi + k \sin \varphi)mb^2 - (k \cos \varphi - \sin \varphi)na^2) + \\ & + (m^2b^2 - n^2a^2 - a^2b^2) = 0, \quad (5.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x^2(b^2(\cos \varphi - k \sin \varphi)^2 - a^2(k \cos \varphi + \sin \varphi)^2) - \\ & - 2x((\cos \varphi - k \sin \varphi)mb^2 + (k \cos \varphi + \sin \varphi)na^2) + \\ & + (m^2b^2 - n^2a^2 - a^2b^2) = 0. \quad (5.7) \end{aligned}$$

Lai līknei (5.5) un taisnēm (5.2), (5.3) būtu pa vienam kopīgam punktam, vienādojumu sistēmām (5.2), (5.5) un (5.3), (5.5) jābūt diviem sakrītošiem atrisinājumiem. Šajā gadījumā kvadrātvienādojumu (5.6) un (5.7) diskriminantiem jābūt vienādiem ar nulli, t.i.,

$$\begin{aligned} & ((\cos \varphi + k \sin \varphi) mb^2 - (k \cos \varphi - \sin \varphi) na^2)^2 - \\ & - (b^2 (\cos \varphi + k \sin \varphi)^2 - a^2 (k \cos \varphi - \sin \varphi)^2) (m^2 b^2 - n^2 a^2 - a^2 b^2) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & ((\cos \varphi - k \sin \varphi) mb^2 - (k \cos \varphi + \sin \varphi) na^2)^2 - \\ & - (b^2 (\cos \varphi - k \sin \varphi)^2 - a^2 (k \cos \varphi + \sin \varphi)^2) (m^2 b^2 - n^2 a^2 - a^2 b^2) = 0. \end{aligned}$$

Veicot pārveidojumus, iegūstam:

$$(y_0 - kx_0)^2 = a^2 (k \cos \varphi - \sin \varphi)^2 - b^2 (\cos \varphi + k \sin \varphi)^2, \quad (5.8)$$

$$(y_0 + kx_0)^2 = a^2 (k \cos \varphi + \sin \varphi)^2 - b^2 (\cos \varphi - k \sin \varphi)^2. \quad (5.9)$$

Vienādojumu (5.8) un (5.9) sistēmas atrisinājums ir

$$x_0 = x(\varphi), \quad y_0 = y(\varphi) :$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = \frac{1}{2k} \left[ \pm \sqrt{a^2(k \cos \varphi + \sin \varphi)^2 - b^2(\cos \varphi - k \sin \varphi)^2} - \right. \\ \left. - \left( \pm \sqrt{a^2(k \cos \varphi - \sin \varphi)^2 - b^2(\cos \varphi + k \sin \varphi)^2} \right) \right], \\ y_0 = \frac{1}{2} \left[ \pm \sqrt{a^2(k \cos \varphi - \sin \varphi)^2 - b^2(\cos \varphi + k \sin \varphi)^2} \pm \right. \\ \left. \pm \sqrt{a^2(k \cos \varphi + \sin \varphi)^2 - b^2(\cos \varphi - k \sin \varphi)^2} \right]. \end{array} \right. \quad (5.10)$$

Formulas (5.10) var iegūt no formulām (4.10) ievietojot tajās  $b$  vietā  $bi$ , kur  $i^2 = -1$ .

Apzīmējot

$$\sqrt{a^2 (k \cos \varphi + \sin \varphi)^2 - b^2 (\cos \varphi - k \sin \varphi)^2} = A,$$

$$\sqrt{a^2 (k \cos \varphi - \sin \varphi)^2 - b^2 (\cos \varphi + k \sin \varphi)^2} = B,$$

iegūstam

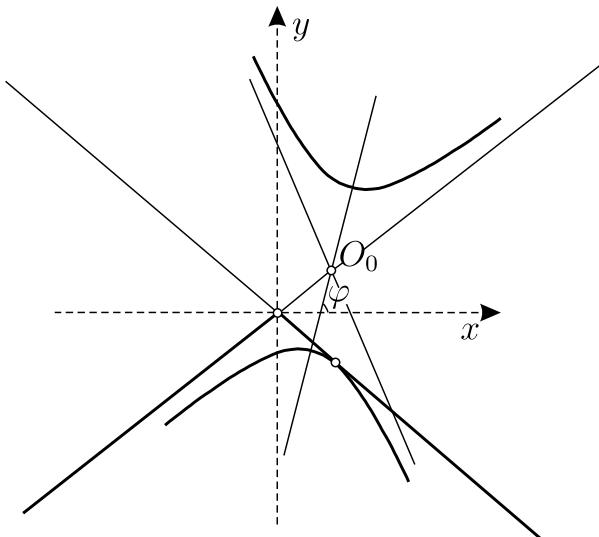
$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = \frac{1}{2k} [\pm A - (\pm B)], \\ y_0 = \frac{1}{2} [\pm A \pm B]. \end{array} \right. \quad (5.11)$$

Formulās (5.10) jāņēm tā zīmju kombinācija, kas atbilst vēlamajam zīmējuma veidam. Tie gadījumi, kas ņemti ārpus konusa projekcijas apgabala, netiek aplūkoti.

Aplūkosim zīmējumu veidus, kas atbilst sekojošām pagrieziena leņķa vērtībām:

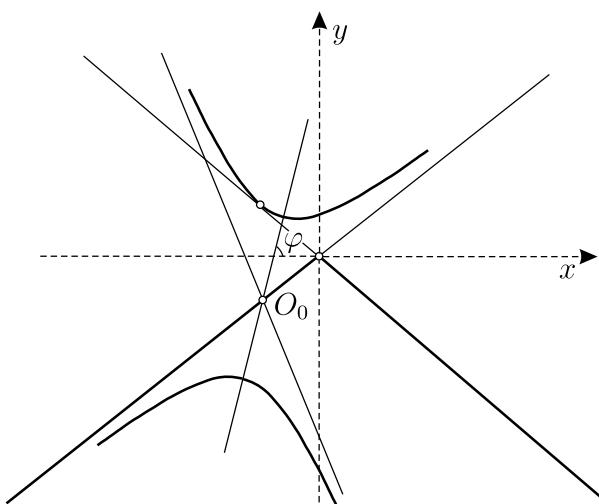
**1. Leņķis  $\alpha$  lielāks par  $\beta$ , konusa projekcijas apgabala robežstars pieder hiperbolas asimptotei, t.i.,**

$$0 < k < \frac{a}{b}, \quad \varphi = \arctg k + \arctg \frac{b}{a} \quad (19., 20. \text{ zīm.}).$$



**19. zīm.**

Labais pieskaršanās punkts pieder konusa projekcijas apgabalam

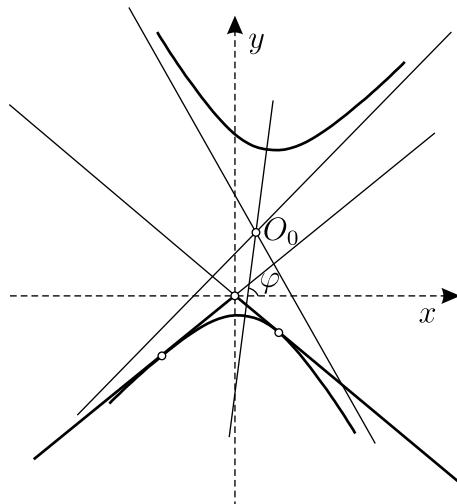


**20. zīm.**

Pieskaršanās punkti nepieder konusa projekcijas apgabalam

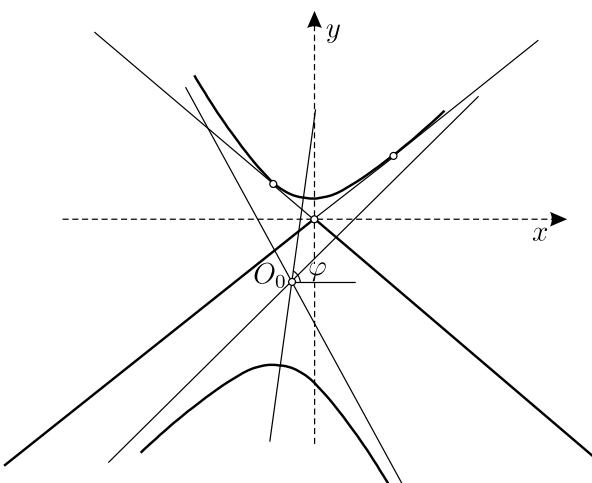
**2. Leņķis  $\alpha$  lielāks par  $\beta$ , pagrieziena leņķis  $\varphi$  lielāks par  $\gamma$ , t.i.,**

$$0 < k < \frac{a}{b}, \quad \gamma = \arctg k + \arctg \frac{b}{a} < \varphi < \frac{\pi}{2} \quad (21., 22., 23., 24. \text{ zīm.})$$



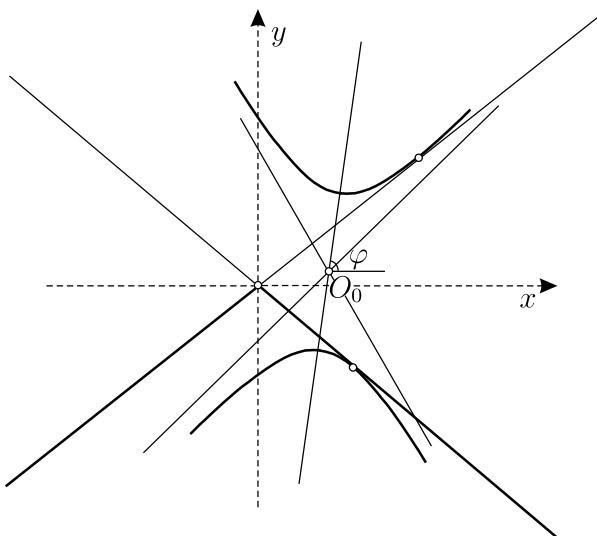
**21. zīm.**

Abi pieskaršanās punkti pieder konusa projekcijas apgabalam



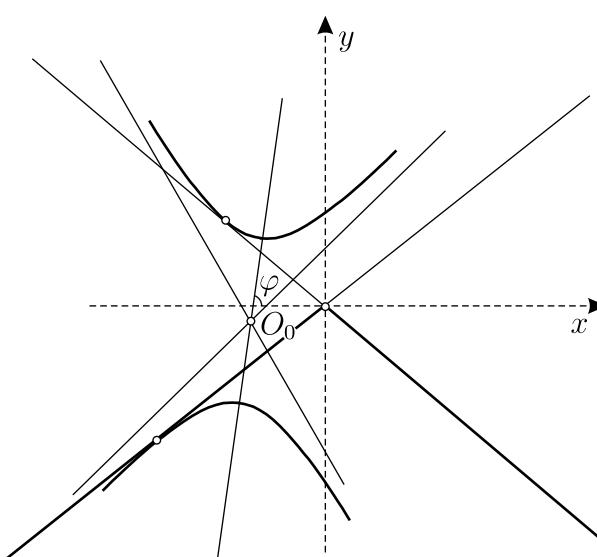
**22. zīm.**

Abi pieskaršanās punkti nepieder konusa projekcijas apgabalam



23. zīm.

Labais pieskaršanās punkts pieder konusa projekcijas apgabalam

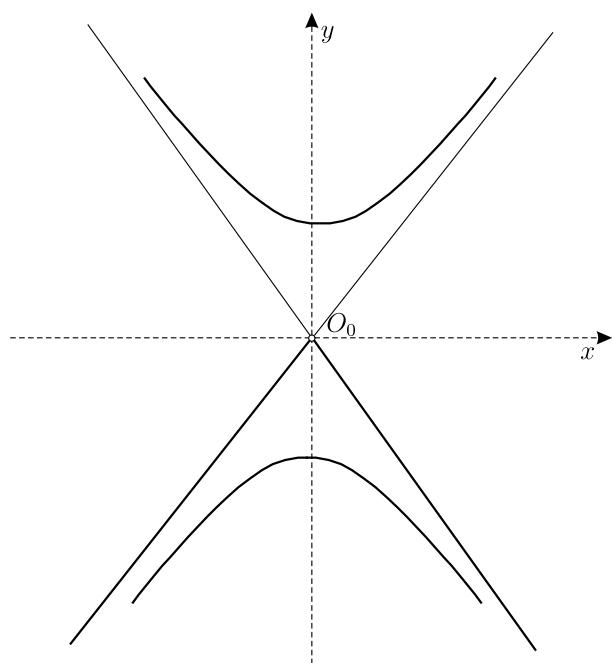


24. zīm.

Kreisais pieskaršanās punkts pieder konusa projekcijas apgabalam

3. Leņķi  $\alpha$  un  $\beta$  ir vienādi, pagrieziena leņķis  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , t.i.,

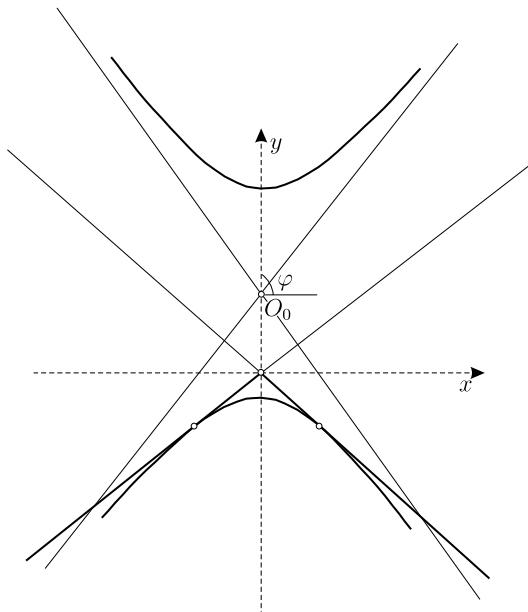
$$k = \frac{a}{b}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$



25. zīm.

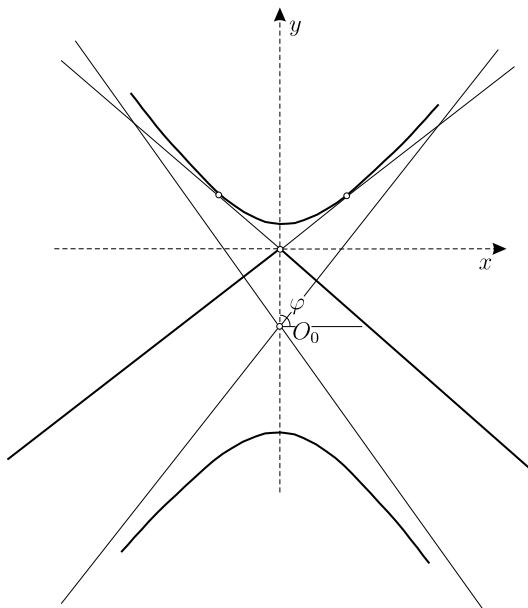
4. Leņķis  $\alpha$  lielāks par  $\beta$ , pagrieziena leņķis  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ , t.i.,

$$k < \frac{a}{b}, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad (26., 27., 28., 29. \text{ zīm.}).$$



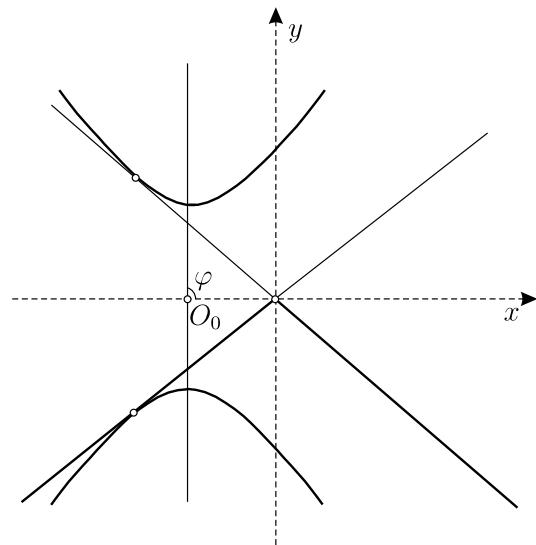
26. zīm.

Divi pieskaršanās punkti pieder konusa projekcijas apgabalam



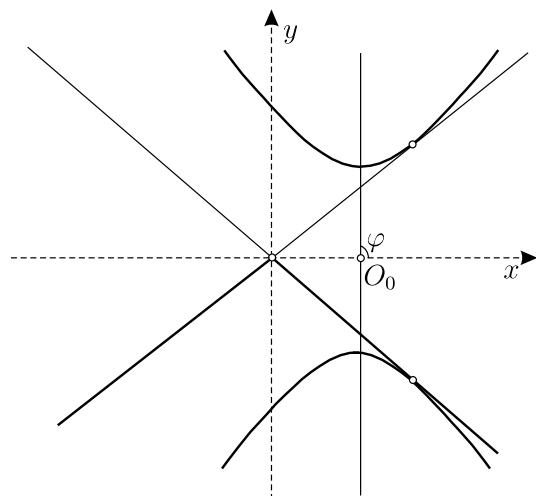
27. zīm.

Neviens pieskaršanās punkts nepieder konusa projekcijas apgabalam



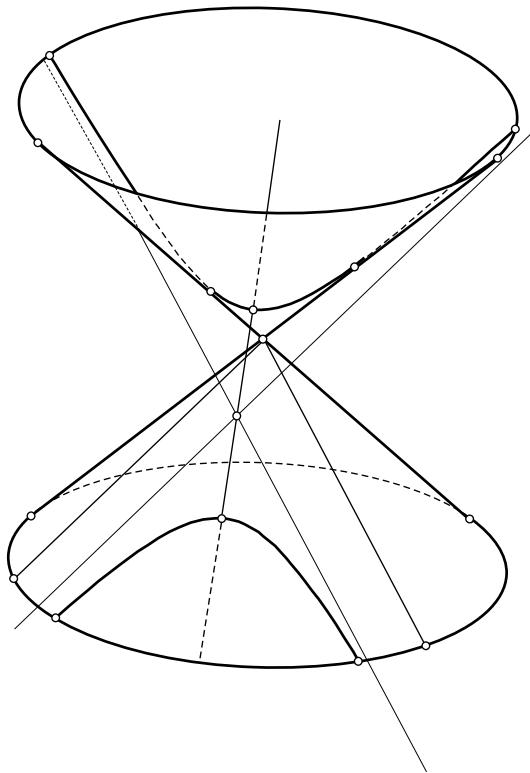
**28. zīm.**

Kreisais pieskaršanās punkts pieder konusa projekcijas apgabalam



**29. zīm.**

Labais pieskaršanās punkts pieder konusa projekcijas apgabalam

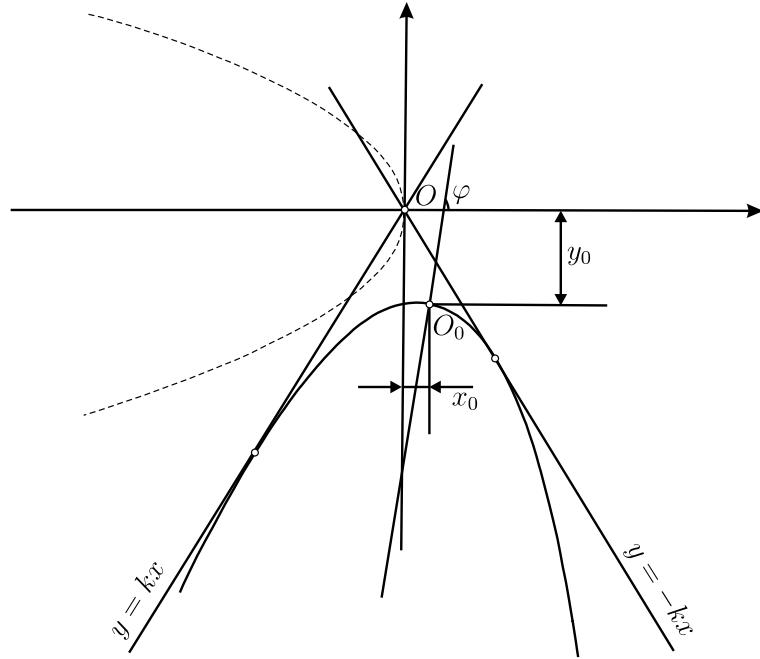


### 30. zīm.

Pilna konusa hiperboliskā šķēluma paralēlprojekcija  
Interpretēsim 22. zīmējumu kā konusa šķēlumu ar plakni attēlu.  
Uzskatamības labad to papildināsim ar elipsēm, kas attēlo konusa  
šķēlumus ar tā asij perpendikulārām plaknēm.  
Tādā veidā iegūstam pilna konusa hiperboliskā šķēluma attēlu.

## 6. Konusa paraboliskā šķēluma paralēlprojekcija

Aplūkosim metodi, kas ļauj, izmantojot parabolas šablonu, pareizi novietot šo parabolu un tās kopīgas pieskares tā, lai zīmējumu varētu interpretēt kā rotācijas konusa šķēluma ar plakni attēlu paralēlprojekcijā.



31. zīm.

Novietosim Dekarta koordinātas sistēmu konusa virsotnes attēlā  $O$ . Dotajā koordinātu sistēmā  $Oxy$  parabolas un konusa veiduļu attēlu vienādojumi ir:

$$(y')^2 = -2px', \quad (6.1)$$

$$y = kx, \quad (6.2)$$

$$y = -kx. \quad (6.3)$$

Izmantojot kustības formulas

$$\begin{cases} x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi + x_0, \\ y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi + y_0, \end{cases} \quad (6.4)$$

novietosim parabolu (6.1) tā, ka tā pieskaras taisnēm (6.2) un (6.3).

Lai saglabātu iepriekšējo konusa projekcijas apgabalu, pagrieziena leņķi  $\varphi$  ņemsim, kā parādīts 31. zīm.

Pagrieztās parabolas vienādojums ir:

$$((y \cos \varphi - x \sin \varphi) - n)^2 = -2p((x \cos \varphi + y \sin \varphi) - m), \quad (6.5)$$

kur

$$x_0 \cos \varphi + y_0 \sin \varphi = m,$$

$$y_0 \cos \varphi - x_0 \sin \varphi = n.$$

$O_0(x_0, y_0)$  ir parabolas (5.5) virsotne.

Aplūkosim līknes (6.5) un taišņu (6.2), (6.3) savstarpējo novietojumu.

Risinot vienādojumu (6.2), (6.5) un (6.3), (6.5) sistēmas, iegūsim kvadrātvienādojumus:

$$\begin{aligned} x^2 (k \cos \varphi - \sin \varphi)^2 - 2x(n(k \cos \varphi - \sin \varphi) - p(\cos \varphi + k \sin \varphi)) + \\ + (n^2 - 2pm) = 0, \end{aligned} \quad (6.6)$$

$$\begin{aligned} x^2 (k \cos \varphi + \sin \varphi)^2 + 2x(n(k \cos \varphi + \sin \varphi) + p(\cos \varphi - k \sin \varphi)) + \\ + (n^2 - 2pm) = 0. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Lai līknei (6.5) un taisnēm (6.2), (6.3) būtu pa vienam kopīgam punktam, vienādojumu sistēmām (6.2), (6.5) un (6.3), (6.5) jābūt diviem sakrītošiem atrisinājumiem. Šajā gadījumā kvadrātvienādojumu (6.6) un (6.7) diskriminantiem jābūt vienādiem ar nulli, t.i.,

$$\begin{aligned} n^2 (k \cos \varphi - \sin \varphi)^2 - 2pn(k \cos \varphi - \sin \varphi)(\cos \varphi + k \sin \varphi) + \\ + p^2(\cos \varphi + k \sin \varphi)^2 - (k \cos \varphi - \sin \varphi)^2(n^2 - 2pm) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n^2 (k \cos \varphi + \sin \varphi)^2 + 2pn(k \cos \varphi + \sin \varphi)(\cos \varphi - k \sin \varphi) + \\ + p^2(\cos \varphi - k \sin \varphi)^2 - (k \cos \varphi + \sin \varphi)^2(n^2 - 2pm) = 0. \end{aligned}$$

Veicot pārveidojumus, iegūstam:

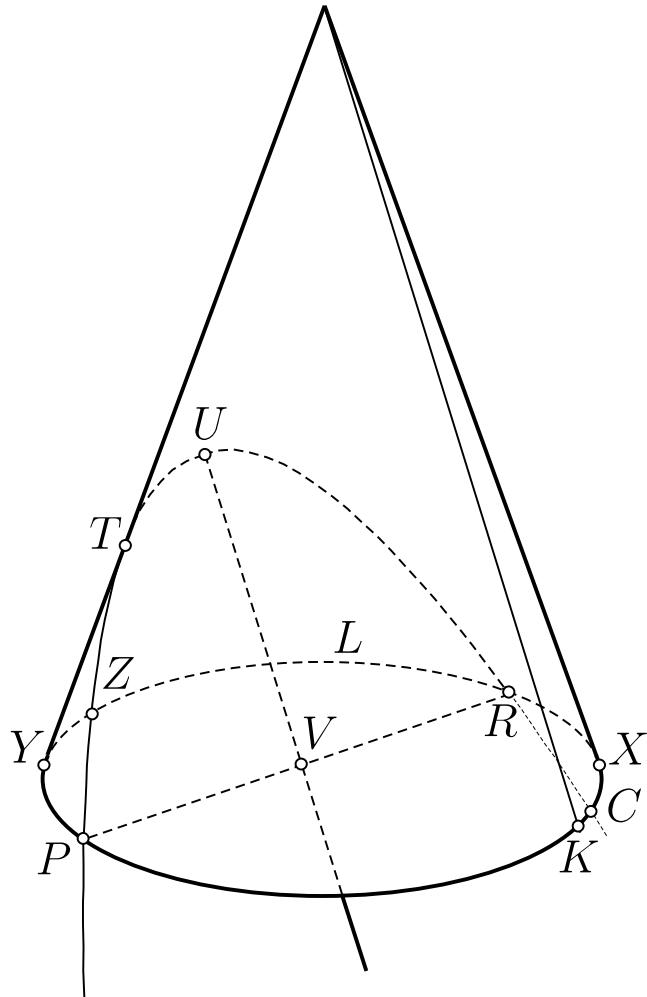
$$y_0 - kx_0 = \frac{p(\cos \varphi + k \sin \varphi)^2}{2(k \cos \varphi - \sin \varphi)}, \quad (6.8)$$

$$y_0 + kx_0 = \frac{-p(\cos \varphi - k \sin \varphi)^2}{2(k \cos \varphi + \sin \varphi)}. \quad (6.9)$$

Vienādojumu (6.8) un (6.9) sistēmas atrisinājums ir

$$x_0 = x(\varphi), \quad y_0 = y(\varphi) :$$

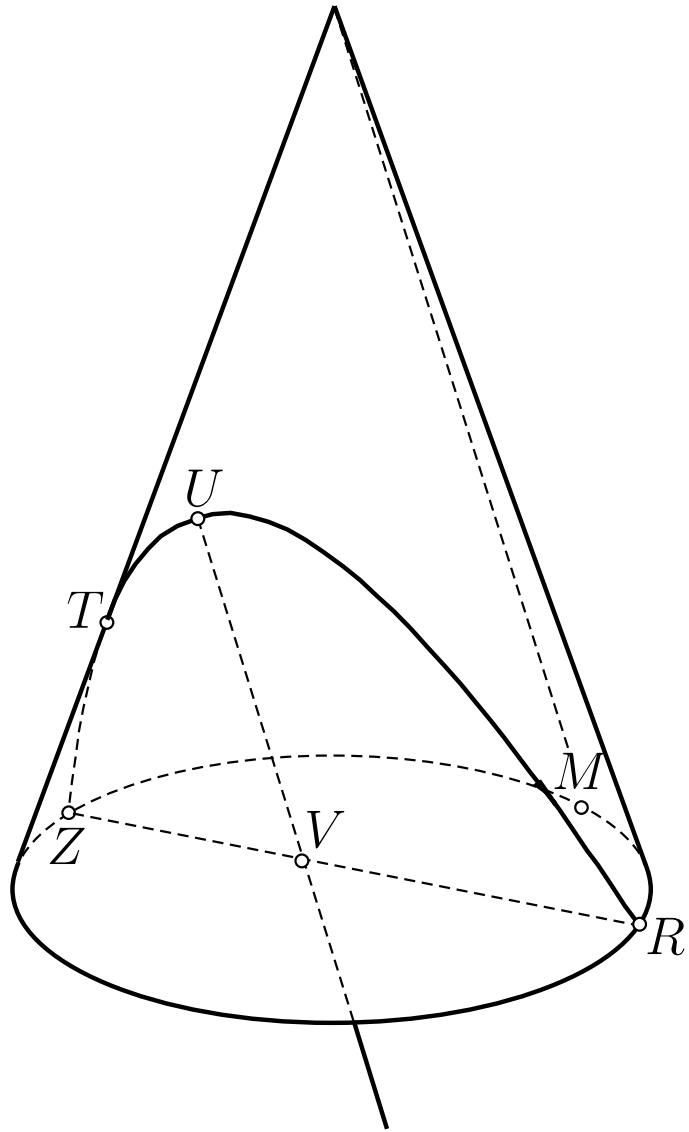
$$\begin{cases} x_0 = \frac{-p \cos \varphi (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi (2 + k^2))}{2(k^2 \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)}, \\ y_0 = \frac{p \sin \varphi (\cos^2 \varphi (1 + 2k^2) + k^2 \sin^2 \varphi)}{2(k^2 \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)}. \end{cases} \quad (6.10)$$



**32. zīm.**

Konusa paraboliskais šķēlums

Uzskatāmības labad konusa pamata attēlā elipses loku  $XLY$  uzskata par neredzamu. Parabola krusto pamata elipsi punktā  $P$ , kas ir redzams. Tāpēc parabolas loks  $TP$  ir redzams. Punktā  $T$  mainās parabolas redzamība, tāpēc tas loks  $TUR$  ir neredzams. Punktā  $C$  projicējas divi dažādi elipses un parabolas punkti. Elipses punkts ir redzams, bet parabolas punkts nav redzams. Parabolas ass  $UV$  ir paralēla konusa veidulei  $SK$ .



**33. zīm.**

Konusa paraboliskais šķēlums

Aplūkosim citu iespējāmo iepriekšējās figūras interpretāciju. Pieņemsim, ka punkts  $Z$  ir parabolas un eleses krustpunkta attēls. Parabolas loks  $ZT$  ir neredzams, bet tās loks  $TUR$  ir redzams.

## **7. Otrās kārtas līkņu, kas pieskaras divām dotajām taisnēm, centru ģeometriskā vieta**

Parametriskie vienādojumi (4.10), (5.10) un (6.10), ja parametrs  $\varphi$  mainās pieļaujamās robežās, nosaka interesantas algebriskas līknes.

Sīkāka šo līkņu izpētišana nav darba pamattēmas uzdevums.

Aplūkosim dažas to īpašības.

## 7.1. Elipses, kas pieskaras divām dotajām taisnēm, centru ģeometriskā vieta

Aplūkosim elipses  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  centru ģeometrisko vietu, ja tā pieskaras divām taisnēm  $y = kx$  un  $y = -kx$  pēc parametriskiem vienādojumiem (4.10).

Mainot pagrieziena leņķi  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ , elipses centra koordinātas aprakstīs līkni, kuras vienādojumu var iegūt, izmantojot formulas (4.8) un (4.9).

Risinot vienādojumu (4.8) un (4.9) sistēmu divejādi, t.i., saskaitot vienādojumus, iegūstam

$$y_0^2 + k^2 x_0^2 = \cos^2 \varphi (a^2 k^2 + b^2) + \sin^2 \varphi (a^2 + k^2 b^2), \quad (7.1)$$

un atņemot vienādojumus, iegūstam

$$x_0 y_0 = \frac{\sin 2\varphi (a^2 - b^2)}{2}. \quad (7.2)$$

Kāpinot vienādojuma (7.2) abas pusēs kvadrātā, iegūstam

$$x_0^2 y_0^2 = \frac{\sin^2 2\varphi (a^2 - b^2)^2}{4} = \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi (a^2 - b^2)^2. \quad (7.3)$$

Izmantojot substitūciju  $\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$  un ievietojot to vienādojumā (7.1), t.i.,

$$y_0^2 + k^2 x_0^2 = \cos^2 \varphi (a^2 k^2 + b^2) + (1 - \cos^2 \varphi) (a^2 + k^2 b^2),$$

iegūstam

$$\cos^2 \varphi = \frac{(y_0^2 + k^2 x_0^2) - (a^2 + k^2 b^2)}{(a^2 - b^2)(k^2 - 1)}. \quad (7.4)$$

Izmantojot substitūciju  $\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi$  un ievietojot to vienādojumā (7.1), t.i.,

$$y_0^2 + k^2 x_0^2 = (1 - \sin^2 \varphi) (a^2 k^2 + b^2) + \sin^2 \varphi (a^2 + k^2 b^2),$$

rezultātā iegūstam vienādojumu

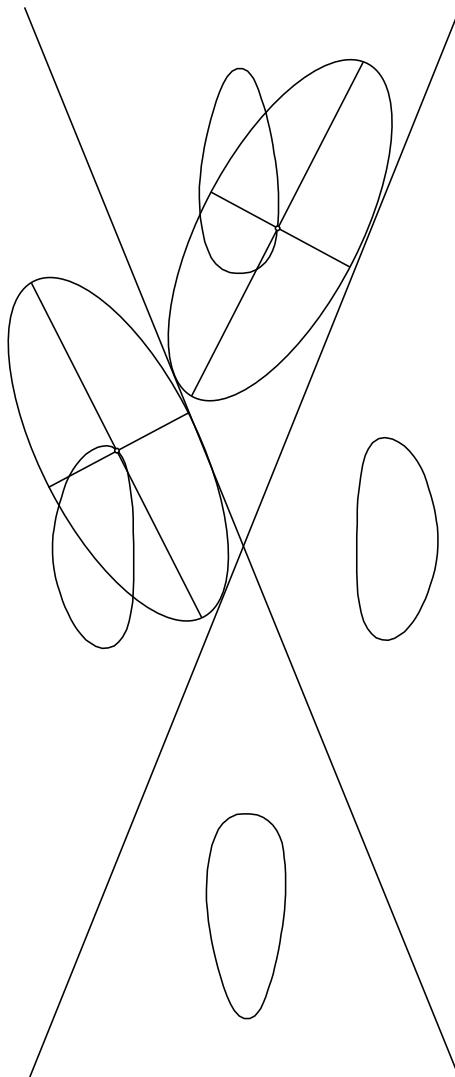
$$\sin^2 \varphi = \frac{(y_0^2 + k^2 x_0^2) - (b^2 + a^2 k^2)}{(a^2 - b^2)(1 - k^2)}. \quad (7.5)$$

Ievietojot (7.4) un (7.5) vienādojumā (7.3), pēc pārveidojumiem iegūstam ceturtās kārtas līknes vienādojumu, t.i.,

$$y^4 + k^4 x^4 + x^2 y^2 (k^4 + 1) - (y^2 + k^2 x^2)(a^2 + b^2)(k^2 + 1) + (a^2 k^2 + b^2)(a^2 + k^2 b^2) = 0. \quad (7.6)$$

Tas ir vienādojums elipses centru līknei, kas pieskaras divām dotajām taisnēm.

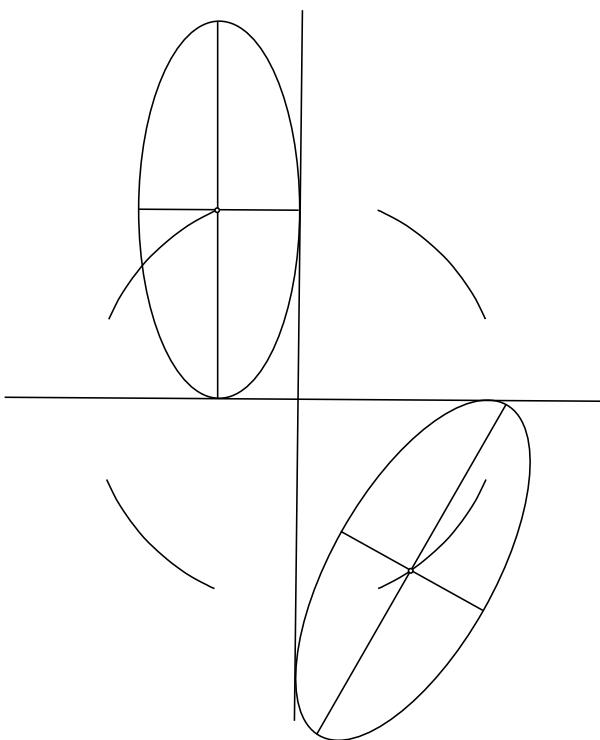
Dotā līkne gadījumā, ja leņķis starp konusa veidulēm nav taisns attēloota (34. zīm.).



**34. zīm.**

Gadījumā, kad dotās taisnes ir perpendikulāras, t.i.,  $k = 1$ , līkne sastāv no četriem riņķa līnijas lokiem, kurus elipses centrs apraksta divreiz (35. zīm.). Šie loki pieder riņķa līnijai

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2. \quad (7.7)$$



35. zīm.

Elipses, kas pieskaras divām perpendikulāram taisnēm, centru ģeometriskā vieta

## 7.2. Hiperbolas, kas pieskaras divām dotajām taisnēm, centru ģeometriskā vieta

Aplūkosim hiperbolas  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  centru ģeometrisko vietu, ja tā pieskaras divām taisnēm  $y = kx$  un  $y = -kx$  pēc parametriskiem vienādojumiem (5.10).

Mainot pagrieziena leņķi  $\varphi$ , hiperbolas centra koordinātas aprakstīs līkni, kuras vienādojumu var iegūst, izmantojot formulas (5.8) un (5.9), vai ievietojot vienādojumā (7.6)  $b$  vietā  $bi$ , kur  $i^2 = -1$ .

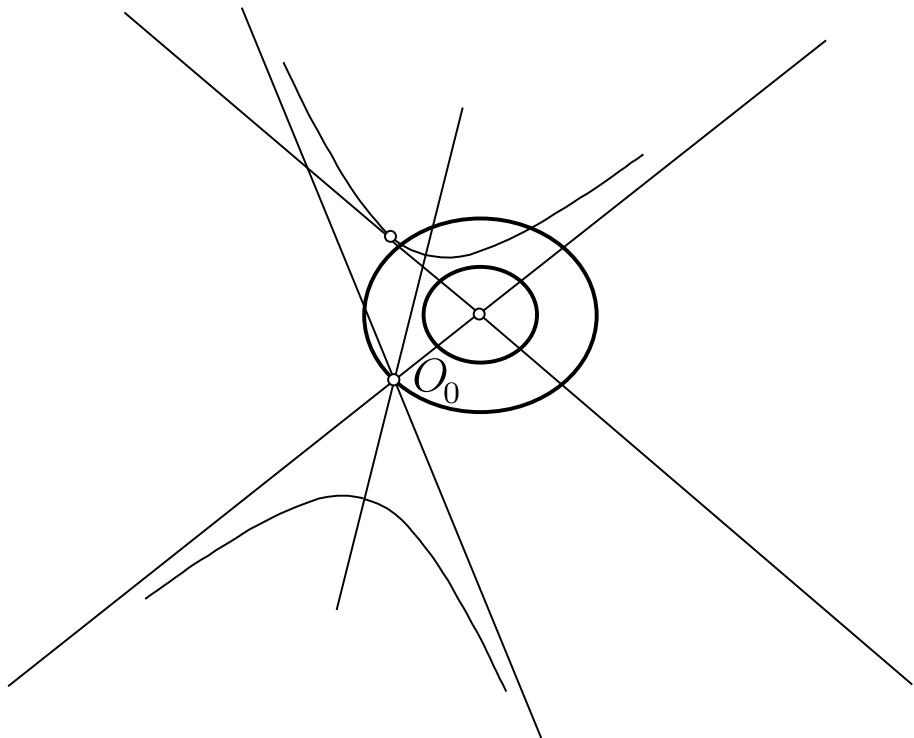
Rezultatā iegūstam ceturtās kārtas līknes vienādojumu, t.i.,

$$y^4 + k^4 x^4 + x^2 y^2 (k^4 + 1) - (y^2 + k^2 x^2)(a^2 - b^2)(k^2 + 1) + (a^2 k^2 - b^2)(a^2 - k^2 b^2) = 0. \quad (7.8)$$

Tas ir vienādojums hiperbolas centru līknei, kas pieskaras divām dotajām taisnēm. **Līkne sastāv no divām komponentēm, kas nav elipses.**

Dotā līkne attēlota 36. zīm.

Zīmējumā redzama viena no hiperbolām, kuras asymptote sakrīt ar vienu no taisnēm,



36. zīm.

Aplūkosim gadījumus, kad hiperbolas asymptotes ir dotās taisnes:

a) *leņķis starp dotajām taisnēm ir  $90^\circ$  un hiperbola ir vienādsānu, t.i.,*

$$k = 1, \quad a = b.$$

Šajā gadījumā līknes vienādojums ir

$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = 0 \quad (7.9)$$

vai

$$(x^2 + y^2)^2 = 0. \quad (7.10)$$

Punkts  $O(0, 0)$  ir izirusi riņķa līnija ar rādiusu  $R = 0$ , kuru skaita divas reizes.

b) *leņķis starp taisnēm ir  $90^\circ$ , bet hiperbola nav vienādsānu, t.i.,*

$$k = 1, \quad a \neq b, \quad a > b.$$

Līknes vienādojums ir

$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 2(x^2 + y^2)(a^2 - b^2) + (a^2 - b^2)^2 = 0,$$

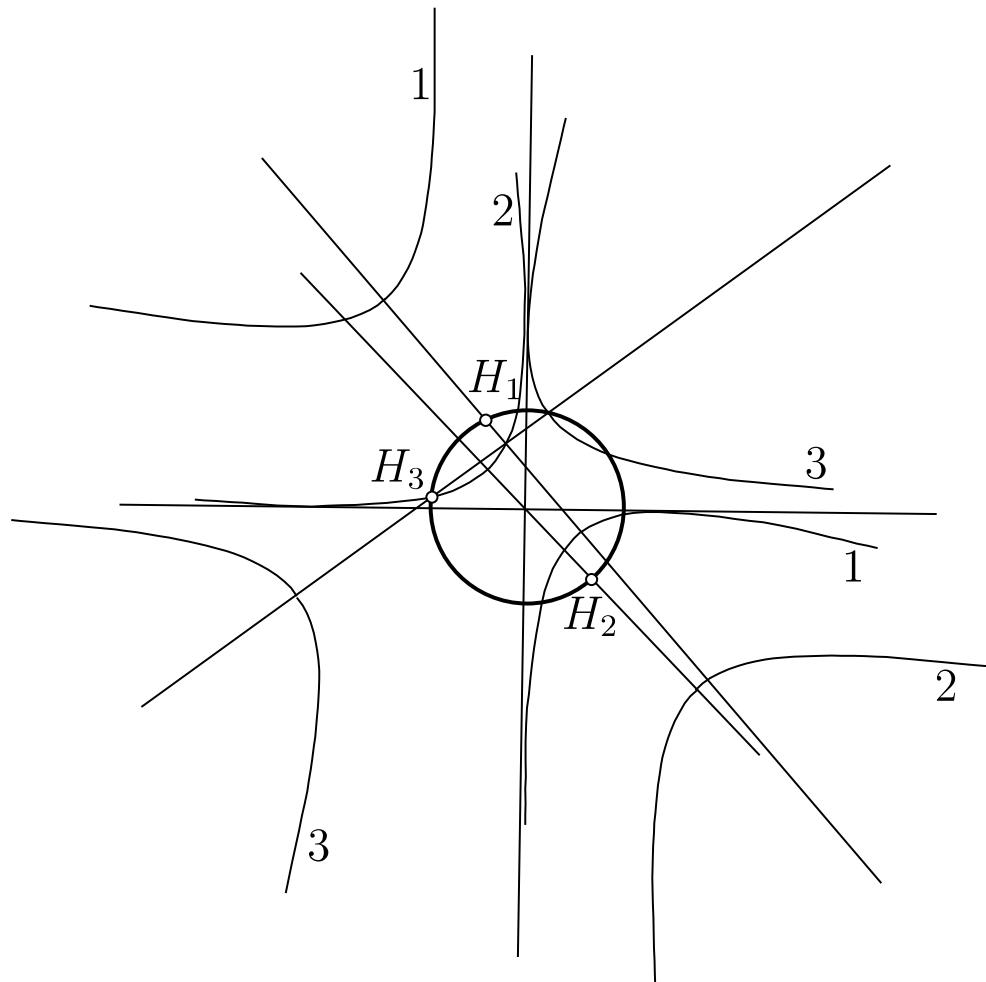
$$(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2)(a^2 - b^2) + (a^2 - b^2)^2 = 0,$$

$$(x^2 + y^2 - (a^2 - b^2))^2 = 0,$$

$$x^2 + y^2 = a^2 - b^2. \quad (7.11)$$

Ieguvām riņķa līniju, kuru skaita divas reizes.

Ja  $a > b$ , t.i., leņķis starp asymptotēm šaurs, hiperbolas centrs apraksta riņķa līniju.



**37. zīm.**

Hiperbolas, kas pieskaras divām perpendikulāram taisnēm, centru ģeometriskā vieta

c) leņķis starp taisnēm ir vienāds ar leņķi starp hiperbolas asimptotēm, t.i.,

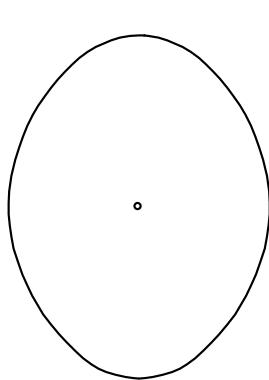
$$k = \frac{a}{b} \neq 1.$$

Līknes vienādojums ir

$$x^4a^4 + y^4b^4 + x^2y^2(a^4 + b^4) - a^2(a^4 - b^4)x^2 - b^2(a^4 - b^4)y^2 = 0. \quad (7.12)$$

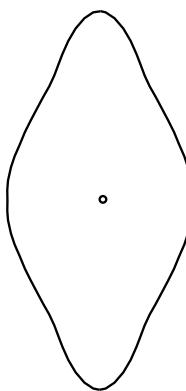
Ja leņķis starp taisnēm vienāds ar leņķi starp asimptotēm, tad viena no komponentēm (iekšejā) klūst par līknes izolētu punktu (skat. 25. zīm.).

Otras komponentes veids ir atkarīgs no izvēlētām  $a$  un  $b$  vērtībām, (skat. 38., 39., 40. un 41. zīm.).



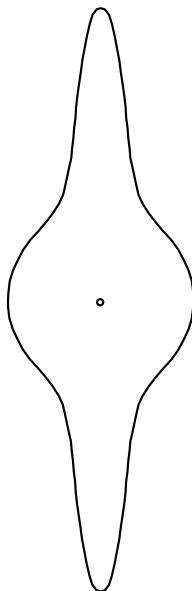
38. zīm.

$$k = \frac{4}{3}$$



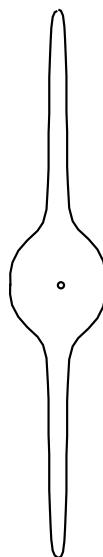
39. zīm.

$$k = \frac{2}{1}$$



40. zīm.

$$k = \frac{7}{2}$$



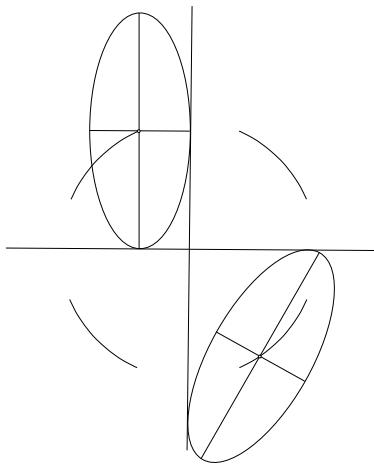
41. zīm.

$$k = \frac{9}{1.5}$$

## 8. Elipšu (hiperbolu), kas pieskaras perpendikulāram taisnēm, centru ģeometriskā vieta

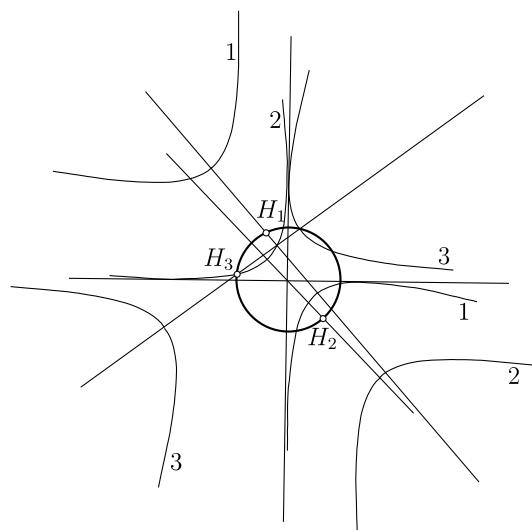
Varam formulēt skaistu analitiskās ģeometrijas uzdevumu.

*Atrast punktu ģeometrisko vietu, kurai pieder elipses (hiperbolas) centri, ja tā pieskaras divām perpendikulārām taisnēm.*



42. zīm.

Elipses, kas pieskaras divām perpendikulārām taisnēm, centru ģeometriskā vieta



43. zīm.

Hiperbolas, kas pieskaras divām perpendikulārām taisnēm, centru ģeometriskā vieta

## Nobeigums

Skaitlošanas tehnikas attīstība ļauj racionālizēt telpisko ķermeņu attēlošanu paralēlprojekcijā.

Šķēluma projekcijas novilkšana kļūst iespējama ar šablona palīdzību. Ar vārdu ”šablons” saprotam gan rasēšanas instrumentu, gan datora izveidotu līkni.

Šķēluma stāvoklis jāaprēķina atbilstoši vēlamajam rasējumam.

Darbā atrastās formulas ļauj noteikt šablona pagrieziena leņķi un centra (virsotnes) koordinātas.

Iegūto rasējumu nepretrunības pierādījumi ir atrasti, bet tie nav iekļauti darba tekstā, jo to apraksts aizņemtu pārāk daudz vietas.

Darba rezultātus var izmantot kvalitatīvu rotācijas ķermeņu - cilindra un konusa šķēlumu projekciju konstruēšanai.

Darba gaitā konstatēti interesanti fakti algebrisku līkņu teorijā, kuriem gan nav tieša sakara ar darba tēmu.

Atrasta visai interesanta teorēma par elipses (hiperbolas), kas pieskaras divām perpendikulārām taisnēm, centru ģeometrisko vietu.

## LITERATŪRA

- [1] B. Āboltiņa, P. Čepuls. Geometrija vidusskolai. - R.: Zvaigzne ABC, 2000.
- [2] A. Grava. Zīmējumi un uzdevumi stereometrijā. - R.: Zvaigzne, 1972.
- [3] E. Ģingulis. Paralēlprojicēšana. - Daugavpils, 1989.
- [4] K. Murāns. Attēlošanas metodes. - R.: Saule, 2003.
- [5] A. Posvjanskis. Tēlotāja ģeometrija. - R.: Zvaigzne, 2003.
- [6] A. Pogorelovs. Geometrija 9.-11. klasei. - R.: Zvaigzne, 1987.
- [7] J. Rāts. Tēlotāja ģeometrija. 2. -izd. - R.: LVJ, 1959.
- [8] E. Redlihs. Rasēšana. - R.: Zvaigzne, 1977.
- [9] A. Šļahova. Tēlotāja ģeometrijas pamati zīmēšanā. 4. daļa. - Daugavpils: Saule, 1998.
- [10] V. Ziobrovskis. Pārbaudes darbi ģeometrijā ar uzdevumu risinājumu paraugiem vidusskolas profilkursam. - R.: Zvaigzne ABC, 1998.
- [11] Бескин Н.М. Изображение пространственных фигур. - М.: Наука, 1971.
- [12] Бескин Н.М. Изображение пространственных фигур. - М.: Наука, 1971.
- [13] Бубенников А.В. Начертательная геометрия. - М.: "Высшая школа", 1985.
- [14] Глазунов Е.А., Четверухин Н.Ф. Аксонометрия. - Москва, 1982.
- [15] Козловский Ю.Г. Основы начертательной геометрии в кратком и популярном изложении. - Минск: Высшая школа, 1974.
- [16] Комиссарук А.М. Основы аффинной геометрии на плоскости. - Минск: Высшая школа, 1967.
- [17] Раушенбах Б. Системы перспективив изобразительном искусстве. Общая теория перспективы. - Москва, 1986.

- [18] Савелов А.А. Плоские кривые. Под ред. Нордена А.П. - Москва, 1960.
- [19] Стародетко Е.А. Элементы вычислительной геометрии. -Наука и техника, 1986
- [20] Четверушин Н.Ф. Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии. -М.: Учпедгиз,1946.
- [21] Четверушин Н.Ф. Изображения фигур в курсе геометрии. - М.: Учпедгиз, 1958.
- [22] Четверушин Н.Ф. Стереометрические задачи на проекционном чертеже. - М.: Учпедгиз, 1955.
- [23] Четверушин Н.Ф. Введение в высшую геометрию. - М.: Учпедгиз, 1935.
- [24] Четверушин Н.Ф. Проблема изображения пространственных фигур в условиях педагогического процесса. - Математика в школе, 4, 1998.
- [25] Израак Д.Ф. Об изображении пространственных фигур. - Математика в школе, 4, 1998.
- [26] Саакян С.М., Бутузов В.Ф. Изучение темы “Цилиндр, конус и шар” в классе. - Математика в школе, 5, 2002.
- [27] Аналитическая геометрия с теорией изображений под редакцией Маневича В.А. - М.: Высшая школа, 1969.
- [28] Черчение с основами начертательной геометрии под редакцией Борисова Д.М. - М.: Просвещение, 1978.