DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE

Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte

Matemātikas katedra

**Nadežda Sveikate**

# Diferenciālvienādojumu risināšana ar rindu palīdzību

Daugavpils, 2013

# SATURS

# IEVADS

Lineāru parastu diferenciālvienādojumu ar mainīgajiem koeficientiem atrisinājumus reti kad var izteikt analītiskajā veidā. Tāpēc tika izveidotas vairākas tuvinātas risināšanas metodes. Viena no tādām metodēm ir vienādojumu integrēšana ar pakāpju rindu palīdzību. Diferenciālvienādojumu integrēšana ar pakāpju rindu palīdzību ir tuvināta analītiska metode, kas tiek pielietota, risinot lineārus diferenciālvienādojumus, kuru kārta ir augstāka par pirmo.

Runājot par diferenciālvienādojumu risināšanu ar rindu palīdzību, ir svarīgi apskatīt arī diferenciālvienādojumu integrēšanu ar Furjē rindu palīdzību. Integrējot diferenciālvienādojumus ar Furjē rindu palīdzību, iegūsim periodiskos diferenciālvienādojuma atrisinājumus.

# 1. Diferenciālvienādojumu integrēšana ar pakāpju rindu palīdzību

Lineāru parastu diferenciālvienādojumu ar mainīgajiem koeficientiem atrisinājumus reti kad var izteikt analītiskajā veidā. Tāpēc tika izveidotas vairākas tuvinātās diferenciālvienādojumu risināšanas metodes. Starp tuvinātām metodēm var izdalīt trīs grupas: analītiskas, grafiskas un skaitliskas metodes. Protams, dotā klasifikācija zināmā mērā ir nosacīta.

Diferenciālvienādojumu integrēšana ar pakāpju rindu palīdzību ir tuvināta analītiska metode, kas tiek pielietota, risinot lineārus diferenciālvienādojumus, kuru kārta ir augstāka par pirmo:

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0, \quad n \geq 2,$$

kur funkcijas $p_0(x),\ p_1(x),\ \ldots,\ p_n(x)$ ir nepārtrauktas.

Apskatīsim otrās kārtas lineāru homogēnu diferenciālvienādojumu

$$S(x)y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{1.1}$$

kur $S(x)$, $P(x)$ un $Q(x)$ ir nepārtauktas un analītiskas funkcijas punktā $x = x_0$, t.i., tās var izteikt kā pakāpju rindas:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S_n(x - x_0)^n,$$

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x - x_0)^n,$$

$$Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x - x_0)^n$$

kādā intervālā $I := (x_0 - R, x_0 + R)$, pie tam šajā intervālā minētās rindas konverģē.

Šajā gadījumā diferenciālvienādojuma (1.1) atrisinājumu var pierakstīt kā kādas pakāpju rindas summu.

Atkarība no tā, kāds ir punkts $x_0$ - parastais vai singulārais (skat. 1.5. un 1.6. definīcijas 1.2. paragrāfā), diferenciālvienādojuma (1.1) atrisinājumu var izteikt kā pakāpju rindu

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

vai kā vispārinātu pakāpju rindu

$$y(x) = |x - x_0|^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Apskatīsim dažus pamatfaktus diferenciālvienādojumu risināšanai ar pakāpju rindu palīdzību.

## 1.1. Pakāpju rindas

Pirms sākam apskatīt, kā ar pakāpju rindu palīdzību var atrisināt diferenciālvienādojumus, atgādināsim pakāpju rindu teorijas pamatus. [4]

### 1.1.1. Pakāpju rindas jēdziens. Ābela teorēma

**1.1. definīcija.** Par ***pakāpju rindu*** sauc funkciju rindu, kuras locekļi ir pakāpju funkcijas ar veseliem nenegatīviem kāpinātājiem, t.i., rindu

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n, \quad (1.2)$$

kur pakāpju rindas koeficienti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ir reāli skaitļi.

**1.2. definīcija.** Saka, ka ***pakāpju rinda*** (1.2) ***konverģē punktā*** $\boldsymbol{x = x^*}$, ja atbilstošā skaitļu rinda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x^* - x_0)^n$ konverģē, t.i., ja eksistē robeža $\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{n=0}^{m} a_n(x^* - x)^n$. Ja minētā skaitļu rinda absolūti konverģē, tad saka, ka ***pakāpju rinda*** (1.2) ***absolūti konverģē punktā*** $\boldsymbol{x = x^*}$.

Nils Ābels (`Niels Henrik Abel`, 1802 - 1829) - norvēğu matemātiķis.

**1.1. teorēma. [Ābela teorēma]**

*Ja pakāpju rinda* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *konverģē punktā* $x = x_1$*, tad tā absolūti konverģē visiem* $x$*, kuriem izpildās nevienādība* $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$.

*Ja pakāpju rinda* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *diverģē punktā* $x = x_2$*, tad tā diverģē visiem* $x$*, kuriem izpildās nevienādība* $|x - x_0| > |x_2 - x_0|$.

**Pakāpju rindas konverğences rādiuss un konverğences intervāls**

No Ābela teorēmas izriet šāds secinājums: pakāpju rindai eksistē tāds nenegatīvs skaitlis $R$, ka visiem $x$, kuriem $|x - x_0| < R$, pakāpju rinda konverğē, bet visiem $x$, kuriem $|x - x_0| > R$, rinda diverğē. Tas nozīmē, ka pakāpju rinda absolūti konverğē visos intervāla $(x_0 - R, x_0 + R)$ punktos, bet diverğē intervālos $(-\infty, x_0 - R)$ un $(x_0 + R, +\infty)$.

**1.3. definīcija.** Intervālu $(x_0 - R, x_0 + R)$ sauc par pakāpju rindas $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ ***konverğences intervālu***, bet $R$ sauc par ***konverğences rādiusu***.

Tātad pakāpju rindas konverğences apgabala noteikšanai ir jānosaka šīs rindas konverğences rādiuss.

Tā kā pakāpju rinda (1.2) intervālā $(x_0 - R, x_0 + R)$ absolūti konverğē, tad apskatīsim šīs rindas locekļu absolūto vērtību rindu

$$\left|a_0\right| + \left|a_1(x - x_0)\right| + \left|a_2(x - x_0)^2\right| + \ldots + \left|a_n(x - x_0)^n\right| + \ldots .$$

Pieņemot, ka visi $a_n \neq 0$, šai rindai var lietot Dalambēra vai Košī konverğences pazīmes.

J. R. Dalambērs (`Jean Le Rond d'Alembert`, 1717 - 1783) - franču matemātiķis.

Pēc Dalambēra pazīmes rinda (1.2) absolūti konverğē, ja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|a_{n+1}(x - x_0)^{n+1}\right|}{\left|a_n(x - x_0)^n\right|} = |x - x_0| \cdot \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1,$$

un diverğē, ja

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}\right|}{\left|a_n(x-x_0)^n\right|}=|x-x_0|\cdot\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|>1.$$

No pirmās nevienādības atrodam, ka rinda konverğē, ja

$$|x-x_0|<\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

No otrās nevienādības iegūstam, ka rinda diverğē, ja

$$|x-x_0|>\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Tātad pakāpju rindas konverğences rādiusu var aprēķināt pēc formulas

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,$$

protams, ja vien šī robeža eksistē.

A. L. Cauchy (Augustin Louis Cauchy, 1789 - 1857) - franču matemātiķis.

Lietojot Košī konverğences pazīmi, analogi iegūstam formulu

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Lai noskaidrotu, vai pakāpju rinda konverğē intervāla $(x_0-R, x_0+R)$ galapunktos, rindā ievieto $x=x_0-R,\quad x=x_0+R$ un pēta iegūto skaitļu rindu konverğenci.

**1.1. piezīme.** Ja $R=+\infty,$ tad rindas konverğences intervāls ir $(-\infty,+\infty)$, bet, ja $R=0$, tad rinda konverğē punktā $x=x_0$.

### 1.1.2. Pakāpju rindas vienmērīgā konverģence

**1.4. definīcija.** Pakāpju rinda intervālā $[a, b]$ ***vienmērīgi konverģē*** uz summu $S(x)$, ja katram $\varepsilon > 0$ eksistē skaitlis $N \in \mathbb{N}$, ka visām rindas parciālsummām, kuru locekļu skaits $n + 1 \geq N$, visos intervāla $[a, b]$ punktos $x$ ir spēkā nevienādība

$$\left|S_n(x) - S(x)\right| < \varepsilon.$$

**1.2. teorēma.** *Pakāpju rinda* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *konverģē absolūti un vienmērīgi jebkurā intervālā* $[a, b]$, *kurš iekļaujas tās konverģences intervālā* $(x_0 - R, x_0 + R)$.

**Secinājumi.** Tā kā pakāpju rindas locekļi ir nepārtrauktas un diferencējamas funkcijas, tad ir spēkā šādi apgalvojumi.

1. Pakāpju rindas summa ir nepārtraukta funkcija konverģences intervālā $(x_0 - R, x_0 + R)$.
2. Konverģences intervālā pakāpju rindu var integrēt pa locekļiem, t.i.,

   $$\int\limits_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int\limits_a^b (x - x_0)^n dx,$$

   ja $[a, b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$.
3. Konverģences intervālā pakāpju rindu var atvasināt pa locekļiem, t.i.,

   $$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n(x - x_0)^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n(x - x_0)^{n-1},$$

   ja $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.
4. Pakāpju rindā var pāriet uz robežu aiz summas zīmes: ja

   $$x_1 \in (x_0 - R, x_0 + R),$$

   tad

   $$\lim_{(x-x_0)\to x_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{(x-x_0)\to x_1} \left(a_n(x - x_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n.$$

**1.2. piezīme.** Atvasinot vai integrējot pakāpju rindu, iegūst citu pakāpju rindu, kurai ir tāds pats konverģences rādiuss kā dotajai rindai.

### 1.1.3. Funkcijas izvirzījums pakāpju rindā

Apskatīsim intervālā $(x_0 - R, x_0 + R)$ uzdotu funkciju $f(x)$. Šo funkciju minētā intervālā var izvirzīt pakāpju rindā, ja eksistē tāda pakāpju rinda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, kura šajā intervālā konverģē uz funkciju $f(x)$. Tātad visiem $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ izpildās vienādība

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n.$$

Šajā gadījumā funkciju $f(x)$ sauc par ***reālu analītisku funkciju***.

**1.3. teorēma.** *Ja kāda pakāpju rinda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ intervālā $(x_0 - R, x_0 + R)$ konverģē uz funkciju $f(x)$, tad šīs rindas koeficienti ir funkcijas $f(x)$ Teilora koeficienti, t.i.,*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \qquad n = 0, 1, 2, \ \ldots \ .$$

B.Teilors (`Brook Taylor`, 1685 - 1731) - angļu matemātiķis.

K. Maklorens (`Colin Maclaurin`, 1698 - 1746) - angļu matemātiķis.

**1.4. teorēma.** *Funkciju $f(x)$ intervālā $(x_0 - R, x_0 + R)$ var izvirzīt pakāpju rindā tad un tikai tad, ja*

1. *funkcija ir bezgalīgi daudz reižu diferencējama šajā intervālā,*
2. *funkcijas $f(x)$ Teilora formulas atlikuma loceklis $R_n(x)$ tiecas uz nulli, kad $n \to \infty$ visiem $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$.*

Funkcijas $f(x)$ izvirzījums ***Teilora rindā*** punkta $x_0$ apkārtnē:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ \ldots \ + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ \ldots \ .$$

Teilora rindas speciāls gadījums ir rinda ar $x$ pakāpēm (***Maklorena rinda*** ):

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ \dots \ + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ \dots \ .$$

Dažu elementāro funkciju izvirzījumi pakāpju rindā:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ \dots \ + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ \dots \ + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

## 1.2. Parastie un singulārie punkti

Apskatīsim diferenciālvienādojumu

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0, \tag{1.3}$$

kur $p_1(x) = P(x)/S(x)$ un $p_2(x) = Q(x)/S(x)$.

**1.5. definīcija.** Ja punktā $x = x_0$ funkcijas $p_1(x)$ un $p_2(x)$ ir analītiskas, tad punktu $x = x_0$ sauc par diferenciālvienādojuma (1.3) ***parasto punktu***.

**1.6. definīcija.** Punktu $x = x_0$ sauc par diferenciālvienādojuma (1.3) ***singulāro punktu***, ja funkcija $p_1(x)$ vai $p_2(x)$ nav analītiska punktā $x = x_0$.

**1.3. piezīme.** Ja diferenciālvienādojuma (1.3) funkcijas $p_1(x)$ un $p_2(x)$ ir konstantas, tad jebkurš reāls punkts ir šī diferenciālvienādojuma parastais punkts.

**1.1. piemērs.** Noteikt diferenciālvienādojuma $y'' + xy = 0$ parastos punktus.

**Atrisinājums.** Jebkurš punkts ir šī diferenciālvienādojuma parastais punkts, jo funkcija $p_2(x) = x$ ir analītiska jebkurā punktā.

**1.2. piemērs.** Noteikt Eilera vienādojuma

$$x^2y'' + a_1xy' + a_2y = 0$$

parastos un singulāros punktus.

**Atrisinājums.** Pārrakstīsim doto diferenciālvienādojumu formā

$$y'' + \frac{a_1}{x}y' + \frac{a_2}{x^2}y = 0.$$

Funkcijas $p_1(x) = \dfrac{a_1}{x}$ un $p_2(x) = \dfrac{a_2}{x^2}$ nav analītiskas punktā $x = 0$, tāpēc punkts $x = 0$ ir Eilera vienādojuma singulārais punkts, bet visi pārējie punkti ir šī diferenciālvienādojuma parastie punkti.

L. Eilers (`Leonhard Euler`,
1707 - 1783) - šveiciešu matemātiķis.

**1.7. definīcija.** Punktu $x = x_0$ sauc par diferenciālvienādojuma (1.3) ***regulāru singulāro punktu***, ja funkcijas $p_1(x)$ un $p_2(x)$ var attiecīgi izteikt $p(x)/(x - x_0)$ un $q(x)/(x - x_0)^2$, kur funkcijas $p(x)$ un $q(x)$ ir analītiskas punktā $x = x_0$.

Šajā gadījumā diferenciālvienādojumu (1.3) var uzrakstīt formā

$$y' + \frac{p(x)}{(x - x_0)}y' + \frac{q(x)}{(x - x_0)^2}y = 0.$$

**1.8. definīcija.** Ja singulārais punkts $x = x_0$ nav regulārs singulārais punkts, tad to sauc par ***iregulāru singulāro punktu***.

**1.3. piemērs.** Noteikt diferenciālvienādojuma

$$y'' + \frac{1}{(x-1)^2}y' + \frac{8}{x(x-1)}y = 0$$

singulāros punktus.

**Atrisinājums.** Dotajam diferenciālvienādojumam ir divi singulārie punkti $x = 0$ un $x = 1$.

Apskatīsim punktu $x = 0$, iegūsim

$$p_1(x) = \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x}{x(x-1)^2} = \frac{p(x)}{x},$$

kur $p(x) = \dfrac{x}{(x-1)^2}$ un

$$p_2(x) = \frac{8}{x(x-1)} = \frac{8x}{x^2(x-1)} = \frac{q(x)}{x^2},$$

kur $q(x) = \dfrac{8x}{(x-1)}$. Redzam, ka funkcijas $p(x)$ un $q(x)$ ir analītiskas punktā $x = 0$, tāpēc punkts $x = 0$ ir apskatāmā diferenciālvienādojuma regulārs singulārais punkts.

Apskatīsim punktu $x = 1$, iegūsim

$$p_1(x) = \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{\bar{p}(x)}{x-1},$$

kur $\bar{p}(x) = \dfrac{1}{x-1}$. Redzam, ka jau funkcija $p(x)$ nav analītiska punktā $x = 1$, tāpēc punkts $x = 1$ ir apskatāmā diferenciālvienādojuma iregulārs singulārais punkts.

**1.4. piemērs.** Noteikt diferenciālvienādojuma

$$(x-1)^2(x+3)y'' + (2x+1)y' - y = 0$$

singulāros punktus.

**Atrisinājums.** Pārveidosim doto diferenciālvienādojumu formā

$$y'' + \frac{(2x+1)}{(x-1)^2(x+3)} - \frac{1}{(x-1)^2(x+3)}y = 0.$$

Dotajam diferenciālvienādojumam ir divi singulārie punkti $x = -3$ un $x = 1$. Apskatīsim punktu $x = -3$, iegūsim

$$p_1(x) = \frac{(2x+1)}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{p(x)}{(x+3)},$$

kur
$$p(x) = \frac{(2x+1)}{(x-1)^2}$$
un
$$q_1(x) = -\frac{1}{(x-1)^2(x+3)} = -\frac{(x+3)}{(x-1)^2(x+3)^2} = \frac{q(x)}{(x+3)^2},$$
kur
$$q(x) = -\frac{(x+3)}{(x-1)^2}.$$
Redzam, ka funkcijas $p(x)$ un $q(x)$ ir analītiskas punktā $x = -3$, tāpēc punkts $x = -3$ ir apskatāmā diferenciālvienādojuma regulārs singulārais punkts.

Apskatīsim punktu $x = 1$, iegūsim
$$p_1(x) = \frac{(2x+1)}{(x-1)^2(x+3)} = \frac{\bar{p}(x)}{(x-1)},$$
kur
$$\bar{p}(x) = \frac{(2x+1)}{(x-1)(x+3)}.$$
Redzam, ka jau funkcija $p(x)$ nav analītiska punktā $x = 1$, tāpēc punkts $x = 1$ ir apskatāmā diferenciālvienādojuma iregulārs singulārais punkts.

## 1.3. Atrisinājumi parastajā punktā

Apskatīsim otrās kārtas lineāru homogēnu diferenciālvienādojumu

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{1.4}$$

kur $p(x)$ un $q(x)$ ir analītiskas funkcijas punktā $x = x_0$, t.i., tās var izteikt kā pakāpju rindas

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x - x_0)^n,$$

$$q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x - x_0)^n$$

kādā intervālā $I := (x_0 - R, x_0 + R)$, pie tam šajā intervālā minētās rindas konverģē.

**1.5. teorēma. [2]** *Ja punkts $x = x_0$ ir diferenciālvienādojuma* (1.4) *parastais punkts, tad jebkurš diferenciālvienādojuma* (1.4) *atrisinājums $y = y(x)$ ir analītisks punktā $x = x_0$, t.i., to var izteikt kā pakāpju rindu*

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Tātad 1.5. teorēma dod iespēju meklēt vienādojuma (1.4) atrisinājumu kā pakāpju rindas summu. Atrisināšanas algoritms ir šāds. Vienkāršības labad pieņemsim, ka $x_0 = 0$. Meklēsim vienādojuma (1.4) atrisinājumu Maklorena rindas veidā ar nenoteiktiem koeficientiem:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{1.5}$$

Atvasinot rindu (1.5), iegūsim

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$

un, otrreiz atvasinot, iegūsim

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Ņemot vērā (1.4), iegūsim

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0. \tag{1.6}$$

Lai atrastu nezināmos koeficientus $a_0$, $a_1$, $a_2, \ldots$, koeficientu summas pie pakāpēm $x^0, x^1, \ldots$ pielīdzināsim nullei un iegūsim rekurentu vienādojumu sistēmu:

$$\begin{array}{l}
x^0 \\
x^1 \\
x^2 \\
\\
\ldots \\
x^n \\
\\
\\
\\
\ldots
\end{array}
\begin{cases}
2 \cdot 1 \cdot a_2 + p_0 a_1 + q_0 a_0 = q_0 a_0 + p_0 a_1 + 2a_2 = 0, \\
3 \cdot 2 \cdot a_3 + p_0 \cdot 2a_2 + p_1 a_1 + q_0 a_1 + q_1 a_0 = q_1 a_0 + (p_1 + q_0) a_1 + 2p_0 a_2 + 6a_3 = 0, \\
4 \cdot 3 \cdot a_4 + p_0 \cdot 3a_3 + p_1 \cdot 2a_2 + p_2 a_1 + q_0 a_2 + q_1 a_1 + q_2 a_0 = \\
= q_2 a_0 + (p_2 + q_1) a_1 + (2p_1 + q_0) a_2 + 3p_0 a_3 + 12a_4 = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
(n+2)(n+1)a_{n+2} + p_0 \cdot (n+1)a_{n+1} + p_1 \cdot n a_n + p_2 (n-1) a_{n-1} + \cdots + \\
+ p_{n-1} \cdot 2a_2 + p_n a_1 + q_0 a_n + q_1 a_{n-1} + \cdots + q_n a_0 = \\
= q_n a_0 + (p_n + q_{n-1}) a_1 + (2p_{n-1} + q_{n-2}) a_2 + \cdots + (n+1)(n+2) a_{n+2} = \\
\sum_{i=0}^{n} \left[ q_{n-1} a_i + (i+1) p_{n-i} a_{i+1} \right] + (n+1)(n+2) a_{n+2} = 0, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{cases} \tag{1.7}$$

Koeficientus $a_0$ un $a_1$ var uzdot patvaļīgi (vismaz vienam no tiem ir jābūt atšķirīgam no nulles, pretējā gadījumā iegūsim triviālo atrisinājumu $y \equiv 0$). Nofiksējot $a_0$ un $a_1$, meklēsim vienādojuma (1.4) atrisinājumu, ņēmot vērā sākuma nosacījumus $y(0) = a_0$, $y'(0) = a_1$, jo

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

un tātad $y(0) = a_0$;

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2 \cdot a_2 x + 3 \cdot a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots$$

un $y'(0) = a_1$.

Pieņemot, ka $a_1 = 0$, iegūsim diferenciālvienādojuma (1.4) atrisinājumu

$$y_1(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n,$$

kur $b_0 = 1$ un $b_1 = 0$.

Pieņemot, ka $a_0 = 0$, iegūsim

$$y_2(x) = a_1 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

kur koeficienti $c_0 = 0$ un $c_1 = 1$.

Iegūtās pakāpju rindas, kas nosaka $y_1(x)$ un $y_2(x)$, konverģē visām reālajām $x$ vērtībām pēc Dalambēra pazīmes. Pie tam atrisinājumi $y_1$ un $y_2$ ir lineāri neatkarīgi. Tādējādi vispārīgo vienādojuma (1.4) atrisinājumu var pierakstīt veidā

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

kur $a_0$ un $a_1$ ir patvaļīgas konstantes.

Apskatīsim dažus piemērus.

**1.5. piemērs.** Atrisināt vienādojumu

$$y'' + y = 0 \tag{1.8}$$

punktā $x_0 = 0$.

**Atrisinājums.** Tā kā punkts $x_0 = 0$ ir diferenciālvienādojuma (1.8) parastais punkts, tad meklēsim dotā vienādojuma atrisinājumu pakāpju rindas veidā

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Divreiz atvasinot šo rindu, iegūsim

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1},$$
$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2},$$

un ievietojot vienādojumā (1.8), iegūsim

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Pielīdzinot koeficientu summas pie katras $x$ pakāpes nullei, iegūsim vienādojumu sistēmu:

$$\begin{array}{c} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ \cdots \\ x^n \\ \cdots \end{array} \begin{cases} 2 \cdot 1 \cdot a_2 + a_0 = a_0 + 2a_2 = 0, \\ 3 \cdot 2 \cdot a_3 + a_1 = a_1 + 6a_3 = 0, \\ 4 \cdot 3 \cdot a_4 + a_2 = a_2 + 12a_4 = 0, \\ 5 \cdot 4 \cdot a_5 + a_3 = a_3 + 20a_5 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots , \\ a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{1.9}$$

No šiem vienādojumiem iegūsim

$$\begin{cases} a_2 = -\dfrac{a_0}{2} = -\dfrac{a_0}{2!}, \\[2ex] a_3 = -\dfrac{a_1}{6} = -\dfrac{a_1}{3!}, \\[2ex] a_4 = -\dfrac{a_2}{12} = \dfrac{a_0}{24} = \dfrac{a_0}{4!}, \\[2ex] a_5 = -\dfrac{a_3}{20} = \dfrac{a_1}{120} = \dfrac{a_1}{5!}, \\[2ex] \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{1.10}$$

Vienādojuma (1.8) vispārīgais atrisinājums ir

$$\begin{aligned} y(x) = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2!}x^2 - \frac{a_1}{3!}x^3 + \frac{a_0}{4!}x^4 + \frac{a_1}{5!}x^5 - \cdots = \\ = a_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots\right) + \\ + a_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right) \end{aligned}$$

jeb

$$y(x) = a_0\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) + a_1\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x),$$

kur

$$u_n(x) = (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad v_n(x) = (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Pielietojot Dalambēra pazīmi, viegli pierādīt, ka šīs pakāpju rindas konverğē visām reālajām $x$ vērtībām. Tiešām, katrai fiksētai $x$ vērtībai

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\right|}{\left|(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n+2)(2n+1)} = 0 < 1$$

un

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{v_{n+1}(x)}{v_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\right|}{\left|(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right|} = \lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n+3)(2n+2)} = 0 < 1.$$

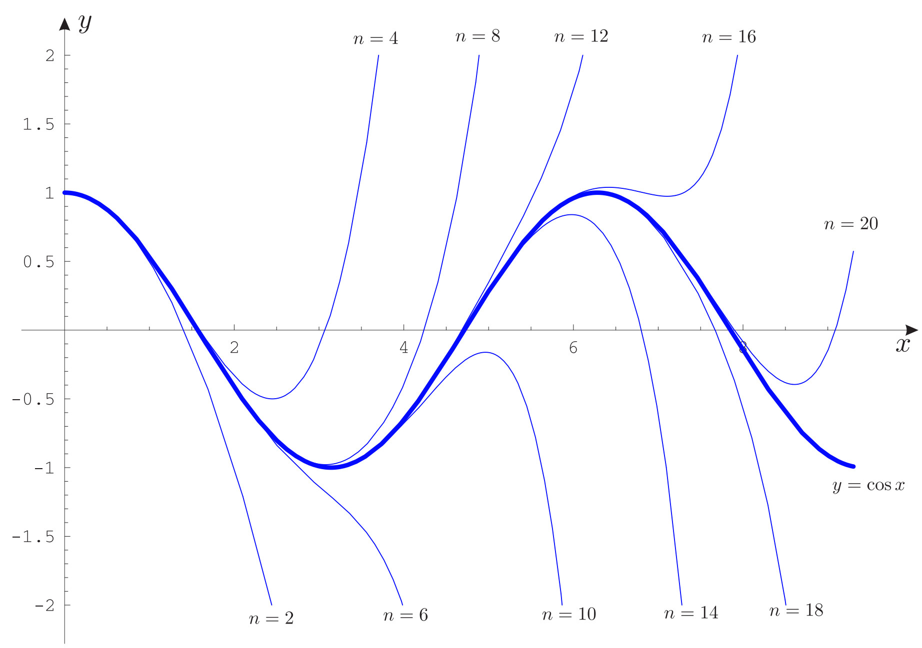
Tā kā jebkuram $x \in \mathbb{R}$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \tag{1.11}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \tag{1.12}$$

tad vienādojuma (1.8) vispārīgais atrisinājums ir

$$y(x) = a_0 \cdot \cos x + a_1 \cdot \sin x.$$




**1.1. zīm.** Polinoma (1.11) un $\cos x$ grafiki; $n$ ir aproksimējošā polinoma pakāpe.

**1.4. piezīme.** Šo diferenciālvienādojumu var arī atrisināt ar citu paņēmienu, jo tas ir homogēns diferenciālvienādojums ar konstantiem koeficientiem. Tā kā atbilstošajam raksturvienādojumam $r^2 + 1 = 0$ ir kompleksās saknes $r_{1,2} = \pm i$, tad diferenciālvienādojumam (1.8) ir partikulārie atrisinājumi

$$y_1(x) = \cos x \quad \text{un} \quad y_2(x) = \sin x.$$

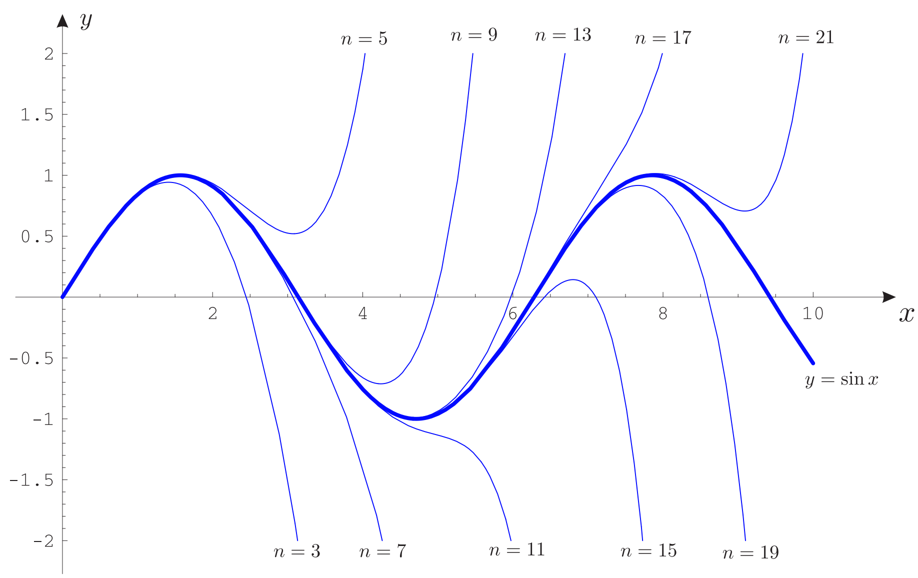
Funkcijas $y_1(x)$ un $y_2(x)$ ir lineāri neatkarīgas, jo Vronska determinants nav vienāds ar nulli:

$$\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0.$$

Tātad funkcijas $y_1(x)$ un $y_2(x)$ veido diferenciālvienādojuma (1.8) fundamentālo atrisinājumu sistēmu un tādējādi tā vispārīgais atrisinājums ir

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x,$$

kur $C_1$ un $C_2$ ir patvaļīgas konstantes.




**1.2. zīm.** Polinoma (1.12) un $\sin x$ grafiki; $n$ ir aproksimējošā polinoma pakāpe.

### 1.3.1. Eiri vienādojums

Daži autori vispārīgo Eiri diferenciālvienādojumu definē kā

$$y'' \pm k^2 xy = 0,$$

tomēr par vispār pieņemto Eiri diferenciālvienādojumu uzskata

$$y'' - xy = 0.$$

Eiri diferenciālvienādojuma atrisinājumus sauc par Eiri funkcijām, kuras pielieto difrakcijas teorijā.

Eiri diferenciālvienādojumu var atrisināt tikai ar skaitliskām metodēm, piemēram, ar pakāpju rindu palīdzību.

Georgs Eiri (`George Biddell Airy`,
1801 - 1892) - angļu matemātiķis un astronoms.

**1.6. piemērs.** Atrisināt Eiri diferenciālvienādojumu

$$y'' - xy = 0 \tag{1.13}$$

punktā $x = 0$.

**Atrisinājums.** Tā kā $x = 0$ ir diferenciālvienādojuma (1.13) parastais punkts, tad meklēsim dotā vienādojuma atrisinājumu pakāpju rindas veidā

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Atvasinot, iegūstam

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

un, otrreiz atvasinot, iegūstam

$$y''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Ievietojot dotajā vienādojumā, iegūsim

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} - x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0. \tag{1.14}$$

Vienādojuma (1.14) kreisajā pusē pielīdzinot koeficientus pie katras $x$ pakāpes nullei, iegūstam vienādojumu sistēmu:

$$\begin{array}{l} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ \dots \\ x^n \\ \dots \end{array} \begin{cases} 2 \cdot 1 \cdot a_2 = 0, \\ 3 \cdot 2 \cdot a_3 - a_0 = 0, \\ 4 \cdot 3 \cdot a_4 - a_1 = 0, \\ 5 \cdot 4 \cdot a_5 - a_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ , \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{1.15}$$

No šiem vienādojumiem atrodam $a_{n+2} = \dfrac{a_{n-1}}{(n+1)(n+2)}$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

Tātad $a_2 = a_5 = a_8 = \dots = a_{3m-1} = 0,\ m = 1, 2, \dots$ ;

$$a_3 = \frac{a_0}{2 \cdot 3}, \quad a_6 = \frac{a_3}{5 \cdot 6} = \frac{a_0}{(2 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 6)}, \dots, \quad a_{3m} = \frac{a_0}{(2 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 6) \cdot \dots \cdot \big((3m-1) \cdot 3m\big)};$$

$$a_4 = \frac{a_1}{3 \cdot 4}, \quad a_7 = \frac{a_4}{6 \cdot 7} = \frac{a_1}{(3 \cdot 4) \cdot (6 \cdot 7)}, \dots, \quad a_{3m+1} = \frac{a_1}{(3 \cdot 4) \cdot (6 \cdot 7) \cdot \dots \cdot \big(3m \cdot (3m+1)\big)}.$$

Patvaļīgi izvēlamies $a_0$ un $a_1$. Piemēram, ja $a_0 = 1$ un $a_1 = 0$, tad atšķirīgi no nulles būs tikai koeficienti $a_{3m},\ m = 1, 2, \dots$ .

Iegūstam vienu vienādojuma (1.13) partikulāro atrisinājumu

$$A_1(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{3m}}{(2 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 6) \cdot \dots \cdot \big((3m-1) \cdot 3m\big)}. \tag{1.16}$$

Ja $a_0 = 0$ un $a_1 = 1$, tad atšķirīgi no nulles būs koeficienti $a_{3m+1},\ m = 1, 2, \cdots$, un tad iegūstam otro vienādojuma (1.13) partikulāro atrisinājumu

$$A_2(x) = x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{3m+1}}{(3 \cdot 4) \cdot (6 \cdot 7) \cdot \dots \cdot \big(3m \cdot (3m+1)\big)}. \tag{1.17}$$

Iegūtās pakāpju rindas, kas nosaka $A_1(x)$ un $A_2(x)$, konverģē visām reālām $x$ vērtībām pēc Dalambēra pazīmes, jo katrai fiksētai $x$ vērtībai

$$\lim_{m \to \infty} \left| \frac{u_{m+1}(x)}{u_m(x)} \right| = \lim_{m \to \infty} \frac{|x^3|}{(3m+2)(3m+3)} = 0 < 1$$

un

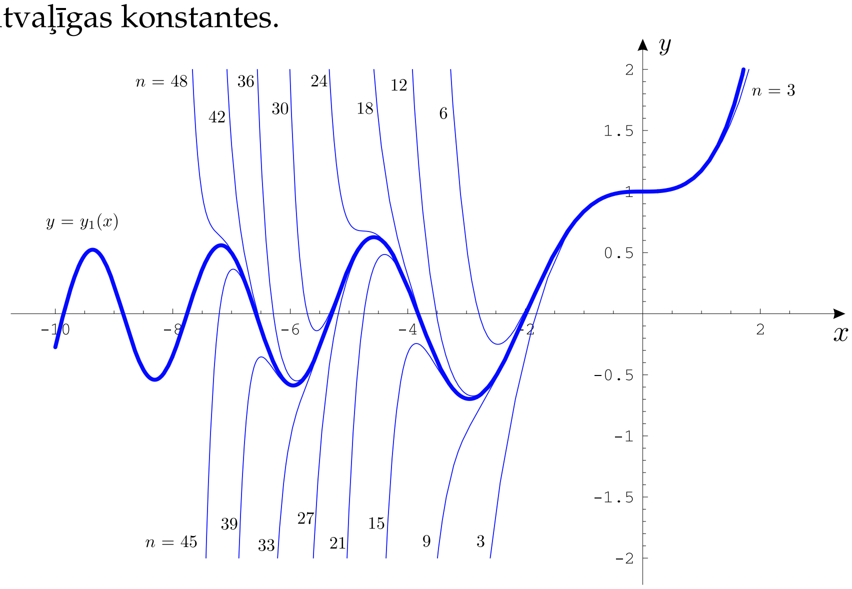
$$\lim_{m \to \infty} \left| \frac{v_{m+1}(x)}{v_m(x)} \right| = \lim_{m \to \infty} \frac{|x^3|}{(3m+3)(3m+4)} = 0 < 1.$$

Pie tam atrisinājumi $A_1(x)$ un $A_2(x)$ ir lineāri neatkarīgi, jo pakāpju rindas, kas nosaka $A_1(x)$ un $A_2(x)$, sastāv no dažādām $x$ pakāpēm un tātad nevar vienu atrisinājumu izteikt ar otro (t.i., neeksistē tāds reāls skaitlis $C$, lai $A_1(x) = CA_2(x)$).

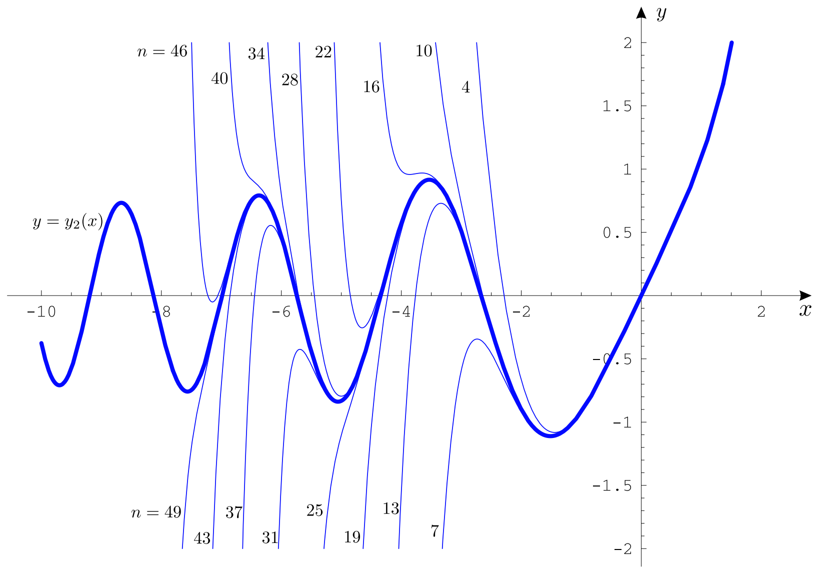
Tādējādi $A_1(x)$ un $A_2(x)$ veido fundamentālo Eiri vienādojuma (1.13) atrisinājumu sistēmu un tā vispārīgo atrisinājumu var pierakstīt veidā

$$y(x) = C_1\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{3m}}{(2\cdot 3)\cdot(5\cdot 6)\cdot\ldots\cdot\big((3m-1)\cdot 3m\big)}\right) + \\ + C_2\left(x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^{3m+1}}{(3\cdot 4)\cdot(6\cdot 7)\cdot\ldots\cdot\big(3m\cdot(3m+1)\big)}\right),$$

kur $C_1$ un $C_2$ ir patvaļīgas konstantes.




**1.3. zīm.** Polinoma (1.16) un Eiri diferenciālvienādojuma $y'' - xy = 0$ atrisinājuma $A_1(x)$ grafiki; $n$ ir aproksimējošā polinoma pakāpe.




**1.4. zīm.** Polinoma (1.17) un Eiri diferenciālvienādojuma $y'' - xy = 0$ atrisinājuma $A_2(x)$ grafiki; $n$ ir aproksimējošā polinoma pakāpe.

**1.7. piemērs.** Atrisināt Eiri vienādojumu

$$y'' + xy = 0 \tag{1.18}$$

punktā $x = 0$.

**Atrisinājums.** Tā kā $x = 0$ ir dota diferenciālvienādojuma parastais punkts, tad meklēsim dotā vienādojuma atrisinājumu pakāpju rindas veidā

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Divreiz atvasinot šo rindu un ievietojot dotajā vienādojumā, iegūsim

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

jeb

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = 0. \tag{1.19}$$

Vienādojuma (1.19) kreisajā pusē pielīdzinot koeficientus pie katras $x$ pakāpes nullei, iegūstam vienādojumu sistēmu, kas līdzīga sistēmai (1.15) (skat. 1.6. piemēru)

$$\begin{array}{c} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ \ldots \\ x^n \\ \ldots \end{array} \begin{cases} 2 \cdot 1 \cdot a_2 = 0, \\ 3 \cdot 2 \cdot a_3 + a_0 = 0, \\ 4 \cdot 3 \cdot a_4 + a_1 = 0, \\ 5 \cdot 4 \cdot a_5 + a_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\ (n+2)(n+1)a_{n+2} + a_{n-1} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \end{cases}$$

no kurienes

1. $a_2 = a_5 = a_8 = \ldots = a_{3m-1} = \ldots = 0, \quad m = 1, 2, \ldots;$

2. $a_3 = -\dfrac{a_0}{2 \cdot 3}, \qquad a_6 = -\dfrac{a_3}{5 \cdot 6} = \dfrac{a_0}{(2 \cdot 3)(5 \cdot 6)},$
   $a_9 = -\dfrac{a_6}{8 \cdot 9} = -\dfrac{a_0}{(2 \cdot 3)(5 \cdot 6)(8 \cdot 9)}, \ \ldots \ ,$
   $a_{3m} = \dfrac{(-1)^m a_0}{(2 \cdot 3)(5 \cdot 6)(8 \cdot 9) \ldots \big((3m-1) \cdot 3m\big)}, \quad m = 1, 2, \ldots;$

3. $a_4 = -\dfrac{a_1}{3 \cdot 4}, \qquad a_7 = -\dfrac{a_4}{6 \cdot 7} = \dfrac{a_1}{(3 \cdot 4)(6 \cdot 7)},$
   $a_{10} = -\dfrac{a_7}{9 \cdot 10} = -\dfrac{a_0}{(3 \cdot 4)(6 \cdot 7)(9 \cdot 10)}, \ \ldots \ ,$
   $a_{3m+1} = \dfrac{(-1)^m a_1}{(3 \cdot 4)(6 \cdot 7) \cdots \big(3m \cdot (3m+1)\big)}, \quad m = 1, 2, \ldots .$

Dotā vienādojuma (1.18) atrisinājums ir

$$y(x) = a_0 \left[ 1 - \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{(2 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 6)} - \cdots + \frac{(-1)^m x^{3m}}{(2 \cdot 3) \cdot \cdots \cdot \big((3m-1) \cdot 3m\big)} + \cdots \right] +$$
$$+ a_1 \left[ x - \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^7}{(3 \cdot 4) \cdot (6 \cdot 7)} - \cdots + \frac{(-1)^m x^{3m+1}}{(3 \cdot 4) \cdot \cdots \cdot \big(3m \cdot (3m+1)\big)} + \cdots \right].$$

Esam ieguvuši vienādojuma atrisinājumu formā

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

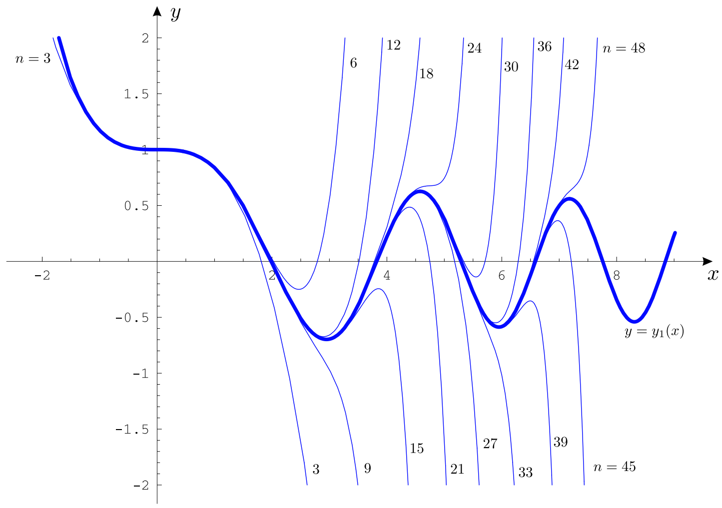
kur pakāpju rindas

$$y_1(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{3m}}{(2 \cdot 3) \cdot \cdots \cdot \big((3m-1) \cdot 3m\big)} \tag{1.20}$$

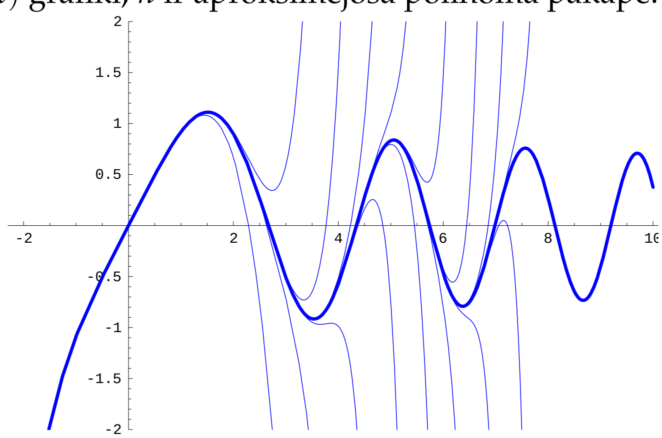
un

$$y_2(x) = x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{3m+1}}{(3 \cdot 4) \cdot \dots \cdot \big(3m \cdot (3m+1)\big)} \tag{1.21}$$

konverğē visām reālām $x$ vērtībām, pie tam funkcijas $y_1(x)$ un $y_2(x)$ ir lineāri neatkarīgas (skat. 1.6. piem.).




**1.5. zīm.** Polinoma (1.20) un Eiri diferenciālvienādojuma $y'' + xy = 0$ atrisinājuma $y_1(x)$ grafiki; $n$ ir aproksimējošā polinoma pakāpe.



**1.6. zīm.** Polinoma (1.21) un Eiri diferenciālvienādojuma $y'' + xy = 0$ atrisinājuma $y_2(x)$ grafiki; $n$ ir aproksimējošā polinoma pakāpe.

**1.8. piemērs.** Izteikt Eiri vienādojuma (1.13) vispārīgo atrisinājumu ar pakāpēm $(x-1)$.

**Atrisinājums.** Tā kā $x = 1$ ir dotā diferenciālvienādojuma parastais punkts, tad meklēsim dotā vienādojuma atrisinājumu pakāpju rindas veidā

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n. \tag{1.22}$$

Atvasinot (1.22), iegūstam

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x-1)^n,$$

un, otreiz atvasinot, iegūstam

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x-1)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n.$$

Ievietojot $y$ un $y''$ vienādojumā (1.13), iegūstam

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n - x \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n = 0. \tag{1.23}$$

Vienādojumu (1.23) pārrakstīsim veidā

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n = \big(1 + (x-1)\big) \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$$

jeb

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{n+1}.$$

Vienādojot koeficientus pie vienādām $(x-1)$ pakāpēm vienādojuma kreisajā un labajā pusē, iegūsim vienādojumu sistēmu

$$\begin{array}{c} (x-1)^0 \\ (x-1)^1 \\ (x-1)^2 \\ \cdots \\ (x-1)^n \\ \cdots \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot 1 a_2 = a_0, \\ 3 \cdot 2 a_3 = a_1 + a_0, \\ 4 \cdot 3 a_4 = a_2 + a_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (n+2)(n+1) a_{n+2} = a_n + a_{n-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$$

Izsakot dažus pirmos koeficientus ar $a_0$ un $a_1$, atrodam, ka

$$\begin{cases} a_2 = \dfrac{a_0}{2}, \\[2ex] a_3 = \dfrac{a_1}{6} + \dfrac{a_0}{6}, \\[2ex] a_4 = \dfrac{a_2}{12} + \dfrac{a_1}{12} = \dfrac{a_0}{24} + \dfrac{a_1}{12}, \\[2ex] a_5 = \dfrac{a_3}{20} + \dfrac{a_2}{20} = \dfrac{a_0}{30} + \dfrac{a_1}{120}, \\[2ex] \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

No šejienes izriet, ka

$$y(x) = a_0\left[1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{24} + \frac{(x-1)^5}{30} + \cdots\right] + \\ + a_1\left[(x-1) + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{12} + \frac{(x-1)^5}{120} + \cdots\right].$$

Esam ieguvuši Eiri vienādojuma (1.13) atrisinājumu formā

$$y(x) = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x),$$

kur $y_1(x)$ un $y_2(x)$ konverğē visām $x$ vērtībām un ir lineāri neatkarīgas. Tiešām, Vronska determinants punktā $x = 1$ ir atšķirīgs no nulles

$$W(1) = \begin{vmatrix} y_1(1) & y_2(1) \\ y_1'(1) & y_2'(1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

tātad jebkurā intervālā, kurš satur punktu $x = 1$, Vronska determinants arī ir atšķirīgs no nulles.

### 1.3.2. Čebiševa vienādojums

Čebiševa diferenciālvienādojums, kur $a$ ir konstante (parametrs), tiek izmantots aproksimēšanas teorijā.

**1.9. piemērs.** Atrisināt Čebiševa vienādojumu

$$(1 - x^2)y'' - xy' + a^2 y = 0 \tag{1.24}$$

punktā $x = 0$.

P. L. Čebiševs (`Pafnuty Lvovich Chebyshev`, 1821 - 1894) - krievu matemātiķis.

**Atrisinājums.** Pārveidosim doto diferenciālvienādojumu formā

$$y'' - \frac{x}{1-x^2}y' + \frac{a^2}{1-x^2}y = 0.$$

Tā kā punkts $x = 0$ ir diferenciālvienādojuma (1.24) parastais punkts, tad meklēsim dotā vienādojuma atrisinājumu pakāpju rindas veidā

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Divreiz atvasinot šo rindu un ievietojot dotajā vienādojumā (1.24), iegūsim

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (n+1)(n+2)a_{n+2} + (a^2 - n^2)a_n \right\} x^n = 0. \tag{1.25}$$

Vienādojuma (1.25) kreisajā pusē pielīdzinot koeficientus pie katras $x$ pakāpes nullei, iegūstam vienādojumu sistēmu

$$\begin{array}{c} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ \cdots \\ x^n \\ \cdots \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 1 \cdot 2 \cdot a_2 + a^2 a_0 = 0, \\ 2 \cdot 3 \cdot a_3 + (a^2 - 1)a_1 = 0, \\ 3 \cdot 4 \cdot a_4 + (a^2 - 2^2)a_2 = 0, \\ 4 \cdot 5 \cdot a_5 + (a^2 - 3^2)a_3 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots , \\ (n+1)(n+2)a_{n+2} + [(a^2 - n^2)]a_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots , \end{array} \right.$$

no kurienes atrodam

1. $a_2 = -\frac{a^2}{2}a_0, \qquad a_4 = \frac{2^2 - a^2}{3 \cdot 4}a_2 = \frac{(-a^2)(2^2 - a^2)}{2 \cdot 3 \cdot 4}a_0,$

$$a_6 = \frac{4^2 - a^2}{5 \cdot 6}a_4 = \frac{(-a^2)(2^2 - a^2)(4^2 - a^2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}a_0, \dots,$$

$$a_{2m} = \frac{(-a^2)(2^2 - a^2)(4^2 - a^2) \cdot \dots \cdot \left((2m-2)^2 - a^2\right)}{(2m)!}a_0;$$

2. $a_3 = \frac{1 - a^2}{2 \cdot 3}a_1, \qquad a_5 = \frac{3^2 - a^2}{4 \cdot 5}a_3 = \frac{(1 - a^2)(3^2 - a^2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}a_1,$

$$a_7 = \frac{5^2 - a^2}{6 \cdot 7}a_5 = \frac{(1 - a^2)(3^2 - a^2)(5^2 - a^2)}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}a_1, \dots,$$

$$a_{2m+1} = \frac{(1 - a^2)(3^2 - a^2)(5^2 - a^2) \cdot \dots \cdot \left((2m-1)^2 - a^2\right)}{(2m+1)!}a_1;$$

Patvaļīgi izvēloties $a_0$ un $a_1$, iegūsim divus lineāri neatkarīgus diferenciālvienādojuma (1.24) partikulārus atrisinājumus. Pieņemot $a_0 = 1$ un $a_1 = 0$, iegūsim

$$y_1(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-a^2)(2^2 - a^2)(4^2 - a^2) \cdot \dots \cdot \left((2m-2)^2 - a^2\right)}{(2m)!}x^{2m}$$

un, pieņemot $a_0 = 0$ un $a_1 = 1$, iegūsim

$$y_2(x) = x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1 - a^2)(3^2 - a^2)(5^2 - a^2) \cdot \dots \cdot \left((2m-1)^2 - a^2\right)}{(2m+1)!}x^{2m+1}.$$

Iegūtās pakāpju rindas, kas nosaka $y_1(x)$ un $y_2(x)$, konverģē visām reālajām $x$ vērtībām. Pie tam šie atrisinājumi ir lineāri neatkarīgi.

Tādējādi $y_1(x)$ un $y_2(x)$ veido diferenciālvienādojuma (1.24) fundamentālo atrisinājumu sistēmu un tā vispārīgo atrisinājumu var pierakstīt veidā

$$y(x) = C_1\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-a^2)(2^2 - a^2)(4^2 - a^2) \cdot \dots \cdot \left((2m-2) - a^2\right)}{(2m)!}x^{2m}\right) + $$
$$+ C_2\left(x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1 - a^2)(3^2 - a^2)(5^2 - a^2) \cdot \dots \cdot \left((2m-1) - a^2\right)}{(2m+1)!}x^{2m+1}\right),$$

kur $C_1$ un $C_2$ ir patvaļīgas konstantes.

### 1.3.3. Ležandra vienādojums

**1.10. piemērs.** Atrisināt Ležandra vienādojumu

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0, \quad \alpha > -1, \tag{1.26}$$

punktā $x = 0$. [1]

A. M. Ležandrs (`Adrien-Marie Legendre`,
1752 - 1833) - franču matemātiķis.

**Atrisinājums.** Tā kā $x = 0$ ir diferenciālvienādojuma (1.26) parastais punkts, tad atrisinājumu meklēsim Maklorena rindas veidā

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Divreiz atvasinot šo rindu un ievietojot dotajā vienādojumā, iegūsim

$$(1 - x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 2x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \alpha(\alpha+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

jeb

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Big[(n+2)(n+1)a_{n+2} - \big(n(n-1) + 2n - \alpha(\alpha+1)\big)a_n\Big] x^n = 0. \qquad (1.27)$$

Vienādojuma (1.27) kreisajā pusē pielīdzinot koeficientus pie katras $x$ pakāpes nullei, iegūsim vienādojumu sistēmu:

$$\begin{array}{c} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ \ldots \\ x^n \\ \ldots \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2 \cdot 1 \cdot a_2 + \alpha(\alpha+1)a_0 = 0, \\ 3 \cdot 2 \cdot a_3 - \big(2 \cdot 1 - \alpha(\alpha+1)\big)a_1 = 0, \\ 4 \cdot 3 \cdot a_4 - \big(2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 - \alpha(\alpha+1)\big)a_2 = 0, \\ 5 \cdot 4 \cdot a_5 - \big(3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - \alpha(\alpha+1)\big)a_3 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (n+2)(n+1) \cdot a_{n+2} - \big(n(n-1) + 2n - \alpha(\alpha+1)\big)a_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

[1] Nosacījums $\alpha > -1$ ir būtisks, jo pretējā gadījumā, ja $\alpha \leq -1$, tad apzīmējot $\alpha = -(1+\gamma)$, kur $\gamma \geq 0$, iegūst citu Ležandra vienādojumu $(1-x^2)y'' - 2xy' + \gamma(\gamma+1)y = 0$.

No šiem vienādojumiem atradīsim, ka

$$a_n = \frac{\big((n-2)(n-3) + 2(n-2) - \alpha(\alpha+1)\big)a_{n-2}}{n(n-1)}, \text{ kur } n = 2,\ 3,\ \dots\ .$$

Tātad

1.

$$a_2 = -\frac{\alpha(\alpha+1)a_0}{1\cdot 2} = -\frac{\alpha(\alpha+1)a_0}{2!},$$

$$a_4 = \frac{\big(6 - \alpha(\alpha+1)\big)a_2}{4\cdot 3} = \frac{(\alpha-2)\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)a_0}{4!},$$

$\dots,$

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m(\alpha-2m+2)\dots(\alpha-2)\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)\dots(\alpha+2m-1)a_0}{(2m)!},\ m \geq 1,$$

$\dots;$

2.

$$a_3 = \frac{\big(2 - \alpha(\alpha+1)\big)a_1}{3\cdot 2} = -\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)a_1}{3!},$$

$$a_5 = -\frac{\big(12 - \alpha(\alpha+1)\big)a_3}{5\cdot 4} = \frac{(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+2)(\alpha+4)a_1}{5!},$$

$\dots,$

$$a_{2m+1} = \frac{(-1)^m(\alpha-2m+1)\dots(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+2)(\alpha+4)\dots(\alpha+2m)a_1}{(2m+1)!},\ m \geq 1,$$

$\dots\ .$

Patvaļīgi izvēlamies $a_0$ un $a_1$. Piemēram, ja $a_0 = 1$ un $a_1 = 0$, tad atšķirīgi no nulles būs tikai koeficienti $a_{2m},\ m = 1, 2, 3,\ \dots$ . Iegūsim vienu vienādojuma (1.26) partikulāro atrisinājumu

$$y_1(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m(\alpha-2m+2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-2)\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)\cdot\ldots\cdot(\alpha+2m-1)}{(2m)!}x^{2m}.$$

Ja $a_0 = 0$ un $a_1 = 1$, tad atšķirīgi no nulles būs koeficienti $a_{2m+1}$, $m = 1, 2, 3, \dots$ un iegūsim otro vienādojuma (1.26) partikulāro atrisinājumu

$$y_2(x) = x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m(\alpha-2m+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+2)(\alpha+4)\cdot\ldots\cdot(\alpha+2m)}{(2m+1)!}x^{2m+1}.$$

Iegūtās pakāpju rindas, kas nosaka $y_1(x)$ un $y_2(x)$, konverģē visām reālām $x$ vērtībām pēc Dalambēra pazīmes, jo katrai fiksētai $x$ vērtībai

$$\lim_{m\to\infty}\left|\frac{u_{m+1}(x)}{u_m(x)}\right| = \lim_{m\to\infty}\frac{(\alpha+2m+1)x^2}{(\alpha-2m+2)(2m+2)} = 0 < 1$$

un

$$\lim_{m\to\infty}\left|\frac{v_{m+1}(x)}{v_m(x)}\right| = \lim_{\to\infty}\frac{(\alpha+2m+2)x^2}{(\alpha-2m+1)(2m+1)} = 0 < 1.$$

Pie tam atrisinājumi $y_1(x)$ un $y_2(x)$ ir lineāri neatkarīgi, jo pakāpju rindas, kas nosaka $y_1(x)$ un $y_2(x)$, sastāv no dažādām $x$ pakāpēm un tātad nevar vienu atrisinājumu izteikt ar otro (t.i., neeksistē tāds reāls skaitlis $C$, lai $y_1(x) = Cy_2(x)$). Tādējādi $y_1(x)$ un $y_2(x)$ veido vienādojuma (1.26) fundamentālo atrisinājumu sistēmu un tā vispārīgo atrisinājumu var pierakstīt

$$y(x) = C_1\left(1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(\alpha-2m+2)\cdot\ldots\cdot(\alpha-2)\alpha(\alpha+1)(\alpha+3)\cdot\ldots\cdot(\alpha+2m-1)}{(2m)!}x^{2m}\right)+$$
$$+C_2\left(x+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(\alpha-2m+1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+2)(\alpha+4)\cdot\ldots\cdot(\alpha+2m)}{(2m+1)!}x^{2m+1}\right),$$

kur $C_1$ un $C_2$ ir patvaļīgas konstantes.

### 1.3.4. Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

**1.11. piemērs.** Atrisināt diferenciālvienādojumu $y'' + xy' + y = 0$ punktā $x = 0$.

**Atbilde.** $y = C_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + C_2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$

**1.12. piemērs.** Atrisināt diferenciālvienādojumu $y'' + x^2y' + xy = 0$ punktā $x = 0$.

**Atbilde.** $y = C_1\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1^2\cdot 4^2\cdot 7^2\cdot\ldots\cdot(3n-2)^2}{(3n)!}x^{3n}\right)+$
$+C_2\left(x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^2\cdot 5^2\cdot 8^2\cdot\ldots\cdot(3n-1)^2}{(3n+1)!}x^{3n+1}\right).$

**1.13. piemērs.** Atrisināt diferenciālvienādojumu $y'' + x^2y = 0$ punktā $x = 0$.

**Atbilde.** $y = C_1\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(3\cdot 4)(7\cdot 8)\cdot\ldots\cdot\big((4n-1)\cdot 4n\big)}x^{4n}\right)+$
$+C_2\left(x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(4\cdot 5)(8\cdot 9)\cdot\ldots\cdot\big(4n\cdot(4n+1)\big)}x^{4n+1}\right).$

**1.14. piemērs.** Atrisināt diferenciālvienādojumu $(x^2-1)y''-6xy'+12y=0$ punktā $x=0$.

**Atbilde.** $y=C_1\left(1+6x^2+x^4\right)+C_2\left(x+x^3\right).$

**1.15. piemērs.** Atrisināt diferenciālvienādojumu $(x^2-1)y''+8xy'+12y=0$ punktā $x=0$.

**Atbilde.** $y=C_1\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)(2n+1)x^{2n}+C_2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(2n+3)}{3}x^{2n+1}.$

**1.16. piemērs.** Atrisināt diferenciālvienādojumu $y''-2(x+3)y'-3y=0$ punktā $x=-3$.

**Atbilde.** $y=C_1\left(1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 7\cdot 11\cdot\ldots\cdot(4n-1)}{(2n)!}(x+3)^{2n}\right)+$
$+C_2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13\cdot\ldots\cdot(4n+1)}{(2n+1)}(x+3)^{2n+1}.$

**1.17. piemērs.** Atrisināt diferenciālvienādojumu $y''+(x-2)^2y'-7(x-2)y=0$ punktā $x=2$.

**Atbilde.** $y=C_1\left(1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{28}{3^n n!(3n-1)(3n-4)(3n-7)}(x-2)^{3n}\right)+$
$+C_2\left((x-2)+\frac{1}{2}(x-2)^4+\frac{1}{28}(x-2)^7\right).$

**1.18. piemērs.** Atrisināt diferenciālvienādojumu $(x^2-2x)y''+5(x-1)y'+3y=0$ punktā $x=1$.

**Atbilde.** $y=C_1\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2^n n!}(x-1)^{2n}+$
$+C_2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n(n+1)!}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}(x-2)^{2n+1}.$ [2]

[2] Visos uzdevumos $C_1$ un $C_2$ ir patvaļīgas konstantes, bet rindas konverğentas un lineāri neatkarīgas.

## 1.4. Atrisinājumi singulārajā punktā

Apskatīsim vienādojumu

$$S(x)y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{1.28}$$

kur $S(x)$, $P(x)$ un $Q(x)$ ir nepārtrauktas funkcijas intervālā $I$, pie tam $x_0$ ($x_0 \in I$) ir funkcijas $S(x)$ divkārša nulle un funkcijas $P(x)$ vienkārša nulle, $Q(x_0) \neq 0$. Tāpēc vienādojumu (1.28) pārrakstīsim veidā

$$(x-x_0)^2 s(x)y'' + (x-x_0)p_1(x)y' + Q(x)y = 0,$$

kur $s(x_0) \neq 0$ un $p_1(x_0) \neq 0$. Izdalīsim iegūto vienādojumu ar $s(x)(x-x_0)^2$ un iegūsim

$$y'' + \frac{p(x)}{(x-x_0)}y' + \frac{q(x)}{(x-x_0)^2}y = 0, \tag{1.29}$$

kur $p(x) = p_1(x)/s(x)$ un $q(x) = Q(x)/s(x)$.

Tā kā meklējam diferenciālvienādojuma atrisinājumu regulārā singulārajā punktā, pieņemsim, ka funkcijas $p(x)$ un $q(x)$ ir analītiskas funkcijas, ja $|x-x_0| < R$, tāpēc tās var izteikt kā pakāpju rindu summas

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x-x_0)^n \quad \text{un} \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x-x_0)^n.$$

**1.6. teorēma. [2]** *Ja punkts $x = x_0$ ir diferenciālvienādojuma* (1.29) *regulārs singulārais punkts, tad diferenciālvienādojumam* (1.29) *eksistē vismaz viens netriviāls atrisinājums, kuru var izteikt vispārinātās pakāpju rindas veidā*

$$y(x) = |x-x_0|^k \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \quad a_0 \neq 0, \tag{1.30}$$

*kur $k$ ir kāds reāls skaitlis.*

Apskatīsim intervālu $(x_0; +\infty)$.

Atvasinot rindu (1.30), iegūsim

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(k+n)a_n(x-x_0)^{k+n-1}$$

un otrreiz atvasinot, iegūsim

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(k+n-1)(k+n)a_n(x-x_0)^{k+n-2}.$$

Ievietojot $y'$ un $y''$ izteiksmes vienādojumā (1.29), iegūsim

$$(x-x_0)^{k-2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)(n+k-1)a_n(x-x_0)^n+ \\ +\frac{1}{x-x_0}\left(\sum_{n=0}^{\infty}p_n(x-x_0)^n\right)\left((x-x_0)^{k-1}\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)a_n(x-x_0)^n\right)+ \\ +\frac{1}{(x-x_0)^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}q_n(x-x_0)^n\right)\left((x-x_0)^{k}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\right)$$

jeb

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left\{(n+k)(n+k-1)a_n+\sum_{m=0}^{n}\left[(m+k)p_{n-m}+q_{n-m}\right]a_m\right\}(x-x_0)^{n+k-2}=0. \quad (1.31)$$

Lai atrastu nezināmos koeficientus $a_0,\ a_1,\ a_2,\ \ldots$, koeficientu summas pie pakāpēm $(x-x_0)^{k-2},\ (x-x_0)^{k-1},\ (x-x_0)^{k},\ \ldots$ pielīdzināsim nullei un iegūsim rekurentu vienādojumu sistēmu:

$$\begin{array}{ll}
(x-x_0)^{k-2} & \left\{\begin{array}{l}
k\cdot(k-1)\cdot a_0+p_0\cdot k\cdot a_0+q_0\cdot a_0=0,\\
(k+1)\cdot k\cdot a_1+p_0\cdot(k+1)\cdot a_1+p_1\cdot k\cdot a_0+q_0\cdot a_1+q_1\cdot a_0=0,\\
(k+2)(k+1)a_2+p_0(k+2)a_2+p_1(k+1)a_1+p_2\cdot k\cdot a_0+q_0\cdot a_2+\\
+q_1\cdot a_1+q_2\cdot a_0=0,\\
\ldots\\
(k+n)(k+n-1)a_n+p_0(k+n)a_n+p_1(k+n-1)a_{n-1}+\ldots+p_{n-1}(k+1)a_1+\\
+p_n\cdot k\cdot a_0+q_0\cdot a_n+q_1\cdot a_{n-1}+\ldots+q_{n-1}\cdot a_1+q_n\cdot a_0=0,\\
\ldots
\end{array}\right.
\end{array}$$

Pakāpes pie attiecīgajām rindām: $(x-x_0)^{k-2}$; $(x-x_0)^{k-1}$; $(x-x_0)^{k}$; $\ldots$; $(x-x_0)^{n+k-2}$; $\ldots$

(1.32)

Pārveidojot, iegūsim

$$
\begin{array}{ll}
(x-x_0)^{k-2} & \left\{\begin{array}{l}
a_0(k(k-1)+kp_0+q_0)=0, \quad ; a_0 \neq 0, \\[2ex]
(x-x_0)^{k-1} & a_1\big((k+1)k+(k+1)p_0+q_0\big)+a_0(kp_1+q_1)=0, \\[2ex]
(x-x_0)^{k} & a_2\big((k+2)(k+1)+(k+2)p_0+q_0\big)+a_1\big((k+1)p_1+q_1\big)+a_0(kp_2+q_2)=0, \\[2ex]
\ldots & \ldots \\[2ex]
(x-x_0)x^{n+k-2} & a_n\big((k+n)(k+n-1)+(k+n)p_0+q_0\big)+a_{n-1}\big((k+n-1)p_1+q_1\big)+\ldots+ \\[2ex]
 & +a_1\big((k+1)p_{n-1}+q_{n-1}\big)+a_0(kp_n+q_n)=0, \\[2ex]
\ldots & \ldots
\end{array}\right.
\end{array}
\tag{1.33}
$$

No kurienes izriet, ka koeficients pie $(x-x_0)^{k-2}$ ir

$$a_0F(k)=a_0[k(k-1)+p_0k+q_0]=0$$

un koeficienti pie citām $(x-x_0)$ pakāpēm veido rekurentu attiecību

$$(n+k)(n+k-1)a_n+\sum_{m=0}^{n}\big[(m+k)p_{n-m}+q_{n-m}\big]a_m=0, \quad n=1,2,\ldots,$$

ko var pārrakstīt veidā

$$
\begin{aligned}
F(k+n)a_n &= [(n+k)(n+k-1)+(n+k)p_0+q_0]a_n= \\
&= -\sum_{m=0}^{n-1}[(m+k)p_{n-m}+q_{n-m}]a_m, \quad n=1,2,\ldots
\end{aligned}
\tag{1.34}
$$

Tā kā $a_0 \neq 0$, tad $k$ ir jāapmierina vienādojums

$$F(k)=k(k-1)+p_0k+q_0=0. \tag{1.35}$$

Pieņemsim, ka $k_1,\ k_2$ ir vienādojuma (1.35) reālās saknes. Tās sauc par regulāra singulārā punkta $x=x_0$ rādītājiem.

Ja starpība $k_1-k_2$ nav vesels skaitlis, tad $F(k_1+n)\neq 0$, $F(k_2+n)\neq 0$ nevienam veselam skaitlim $n>0$. Pieņemot, ka $k=k_1$ un ievietojot to vienādojumos (1.34), var pakāpeniski atrast koeficientus $a_1,\ a_2,\ \ldots$. (Analoğiski koeficientus var atrast, ja $k = k_2$).

Ja $k_1 - k_2 = m$ ir vesels skaitlis (pieņemsim ka $m \geq 0$), tad $F(k_1 + n) \neq 0$ nevienam veselam skaitlim $n \geq 1$ un pie $k = k_1$ sistēmai (1.34) ir atrisinājums. Pieņemot, ka $k = k_2$, iegūstam $F(k_2 + m) = F(k_1) = 0$, tāpēc nevar atrast koeficientus $a_m,\ a_{m+1},\ \ldots$.

Rezultātā diferenciālvienādojumam (1.29) ir vismaz viens atrisinājums vispārinātās pakāpju rindas formā. Lai atrastu otro diferenciālvienādojuma (1.29) atrisinājumu izmantosim Frobeniusa metodi.

Frobeniusa metodi apraksta nākamā teorēma.

F. G. Frobeniuss (`Ferdinand Georg Frobenius`, 1849 - 1917) - vācu matemātiķis.

**1.7. teorēma. [2]** *Pieņemsim, ka funkcijas $p(x)$ un $q(x)$ ir analītiskas diferenciālvienādojuma* (1.29) *regulārā singulārajā punktā $x = x_0$ un $k_1$ un $k_2$ ir vienādojuma* (1.35) *saknes. Tad,*

1. *ja $Re(k_1) \geq Re(k_2)$ un $k_1 - k_2$ nav nenegatīvs vesels skaitlis, tad diferenciālvienādojumam* (1.29) *ir divi lineāri neatkarīgi atrisinājumi*

$$y_1(x) = |x|^{k_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{1.36}$$

*un*

$$y_2(x) = |x|^{k_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n; \tag{1.37}$$

2. *ja vienādojuma* (1.35) *saknes ir vienādas, t.i.,* $k_2 = k_1$*, tad diferenciālvienādojumam* (1.29) *ir divi lineāri neatkarīgi atrisinājumi* (1.36) *un*

$$y_2(x) = y_1(x)\ln|x| + |x|^{k_1}\sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-x_0)^n, \tag{1.38}$$

*kur* $d_n = \left(\dfrac{\partial a_n}{\partial k}\right)_{k=k_1}$*,* $n = 0, 1, \ldots;$

3. *ja* $k_1 - k_2 = r$ *(pozitīvs vesels skaitlis), tad diferenciālvienādojumam* (1.29) *ir divi lineāri neatkarīgi atrisinājumi* (1.36) *un*

$$y_2(x) = cy_1(x)\ln|x| + |x|^{k_2}\sum_{n=0}^{\infty} e_n(x-x_0)^n, \tag{1.39}$$

*kur* $c = \lim\limits_{k\to k_2}(k-k_2)a_r(k)$ *un* $e_n = \left(\dfrac{\partial a_n}{\partial k}\right)_{k=k_2}$*,* $n = 0, 1, \ldots.$

Apskatīsim dažus piemērus.

**1.19. piemērs.** Atrisināt diferenciālvienādojumu

$$4xy'' + 2y' + y = 0 \tag{1.40}$$

punktā $x = 0$.

**Atrisinājums.** Pārveidosim doto diferenciālvienādojumu formā (1.29)

$$y'' + \frac{1}{2x}y' + \frac{x}{4x^2}y = 0. \tag{1.41}$$

Redzam, ka funkcijas $p_1(x) = \dfrac{1}{2x}$ un $p_2(x) = \dfrac{x}{4x^2}$ nav analītiskas punktā $x = 0$, bet funkcijas $p(x) = \dfrac{1}{2}$ un $q(x) = \dfrac{x}{4}$ ir analītiskas punktā $x = 0$, tādēļ punkts $x = 0$ ir diferenciālvienādojuma (1.40) regulārs singulārais punkts un varam meklēt dotā diferenciālvienādojuma atrisinājumu vispārinātās pakāpju rindas veidā

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+k}, \quad a_0 \neq 0. \tag{1.42}$$

Atvasinot rindu (1.42), iegūsim

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+k)a_n x^{n+k-1} \tag{1.43}$$

un, otreiz atvasinot, iegūsim

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+k-1)(n+k)a_n x^{n+k-2}. \tag{1.44}$$

Ievietojot $y'$ un $y''$ vienādojumā (1.41), iegūsim

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+k-1)(n+k)a_n x^{n+k-2} + \frac{1}{2x}\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)a_n x^{n+k-1} + \frac{x}{4x^2}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+k} = 0$$

jeb

$$\left[k(k-1)+\frac{1}{2}k\right]a_0 x^{k-2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[(n+k-1)(n+k)+\frac{1}{2}(n+k)\right]a_n + \frac{1}{4}a_{n-1}\right\}x^{n+k-2} = 0.$$

Izrakstīsim koeficientus pie $x^{k-2}$, iegūsim

$$a_0 F(k) = a_0\left[k(k-1)+\frac{1}{2}k\right].$$

Aprēķinot kvadrātvienādojuma

$$k(k-1)+\frac{1}{2}k = 0$$

saknes, iegūsim $k_1 = \frac{1}{2}$ un $k_2 = 0$.

Redzam, ka $k_1 - k_2 = \frac{1}{2}$ nav vesels skaitlis, tāpēc saskaņā ar 1.7. teorēmas 1. gadījumu, meklēsim divus lineāri neatkarīgus atrisinājumus formās (1.36) un (1.37).

Izrakstot koeficientus pie citām $x$ pakāpēm, veidojas rekurenta attiecība

$$F(n+k)a_n = \left[(n+k-1)(n+k)+\frac{1}{2}(n+k)\right]a_n = -\frac{1}{4}a_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

ko var pārrakstīt

$$a_n = -\frac{1}{2(n+k)(2n+2k-1)}a_{n-1}.$$

Izteiksim $a_n$ ar $a_0$

$$a_n = \frac{(-1)^n}{4^n(k+1)(k+2)\cdots(k+m)\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(k+\frac{3}{2}\right)\cdots\left(k+n-\frac{1}{2}\right)}a_0.$$

Ja $k = k_1 = \frac{1}{2}$, tad

$$F\left(n+\frac{1}{2}\right)a_n = \left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]a_n = -\frac{1}{4}a_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

ko var pierakstīt

$$a_n = -\frac{1}{2n(2n+1)}a_{n-1} = \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}a_0,\ n = 1, 2, \ldots.$$

Ja $k = k_1 = 0$, tad

$$a_n F(n) = a_n \left[n(n-1) + \frac{1}{2}n\right] = -\frac{1}{4}a_{n-1},\ \ n = 1, 2, \ldots,$$

ko var pierakstīt

$$a_n = -\frac{1}{2n(2n-1)}a_{n-1} = \frac{(-1)^n}{(2n)!}a_0,\ n = 1, 2, \ldots.$$

Tāpēc diferenciālvienādojuma (1.40) lineāri neatkarīgi partikulāri atrisinājumi ir

$$y_1(x) = |x|^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^n$$

un

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^n.$$

Vispārīgo vienādojumuma (1.40) atrisinājumu var pierakstīt formā

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

kur $C_1$ un $C_2$ ir patvaļīgas konstantes.

**1.20. piemērs.** Atrisināt diferenciāvienādojumu

$$x^2 y'' - \frac{3}{2}x \cos x y' + \cos x y = 0 \tag{1.45}$$

punktā $x_0 = 0$.

**Atrisinājums.** Pārveidosim doto diferenciālvienādojumu formā (1.29)

$$y'' + \frac{1}{x} \cdot \frac{3}{2} \cos x y' + \frac{1}{x^2} \cos x y = 0. \tag{1.46}$$

Redzam, ka funkcijas $p_1(x) = \frac{1}{x} \cdot \frac{3}{2} \cos x$ un $p_2(x) = \frac{1}{x^2} \cos x$ nav analītiskas punktā $x = 0$, bet funkcijas $p(x) = \frac{3}{2} \cos x$ un $q(x) = \cos x$ ir analītiskas punktā $x = 0$, tādēļ punkts $x = 0$ ir diferenciālvienādojuma (1.45) regulārs singulārais punkts un varam meklēt dotā diferenciālvienādojuma atrisinājumu vispārīgās pakāpju rindas veidā

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+k}, \tag{1.47}$$

kur $a_0 \neq 0$.

Divreiz atvasinot rindu (1.47), ievietojot $y'(x)$ un $y''(x)$ izteiksmes vienādojumā (1.45) un ievērojot, ka

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

iegūsim

$$\sum_{n=0}^{\infty} (k+n-1)(k+n) a_n x^{k+n} - \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \sum_{n=0}^{\infty} (k+n) a_n x^{k+n} + \\ + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{k+n} = 0. \quad (1.48)$$

Pārveidojot, iegūsim

$$\sum_{n=0}^{\infty} (k+n-1)(k+n) a_n x^n - \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \sum_{n=0}^{\infty} (k+n) a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0. \quad (1.49)$$

Lai atrastu nezināmos koeficientus $a_0, \ a_1, \ a_2, \ \ldots$, koeficientu summas pie pakāpēm $x^0, \ x^1, \ x^2, \ \ldots$, pielīdzināsim nullei un iegūsim vienādojumu sistēmu:

$$\begin{array}{ll} x^0 & \left\{ \begin{array}{l} a_0 \left( k(k-1) - \frac{3}{2} k + 1 \right) = a_0 F(k) = 0, \\ \\ a_1 \left( (k+1)k - \frac{3}{2}(k+1) + 1 \right) + a_0 (0 \cdot k + 0) = a_1 F(k+1) + a_0 F_1(k) = 0, \\ \\ a_2 \left( (k+2)(k+1) - \frac{3}{2}(k+2) + 1 \right) + a_1 \big( (k+1) \cdot 0 + 0 \big) + a_0 \left( \frac{3}{4} k - \frac{1}{2} \right) = \\ \\ = a_2 F(k+2) + a_1 F_1(k+1) + a_0 F_2(k) = 0, \\ \\ \ldots \\ \\ a_n \left( (k+n)(k+n-1) \left( -\frac{3}{2} \right) (k+n) + 1 \right) + a_{n-1} \big( (k+n-1) \cdot 0 + 0 \big) + \ldots + \\ \\ + a_1 \big( (k+1) p_{n-1} + q_{n-1} \big) + a_0 (k p_n + q_n) = \\ \\ = a_n F(k+n) + a_{n-1} F_1(k+n-1) + \ldots + a_1 F_{n-1}(k+1) + a_0 F_n(k) = 0, \\ \\ \ldots \end{array} \right. \\ x^1 & \\ x^2 & \\ \ldots & \\ x^n & \\ \ldots & \end{array} \quad (1.50)$$

kur

$$F(k)=k(k-1)-\frac{3}{2}k+1,\quad F_i(k)=kp_i+q_i\quad (i\geq 1). \tag{1.51}$$

Tā kā $a_0 \neq 0$, tad $k$ ir jāapmierina vienādojums

$$F(k)=k(k-1)-\frac{3}{2}k+1=0.$$

Atrisinot kvadrātvienādojumu

$$2k^2-5k+2=0,$$

atradīsim, ka $k_1=2$ un $k_2=\frac{1}{2}$.

Redzam, ka $k_1-k_2=\frac{3}{2}$ nav vesels skaitlis, tāpēc saskaņā ar 1.7. teorēmas 1. gadījumu, meklēsim divus lineāri neatkarīgus atrisinājumus formās (1.36) un (1.37).

Pieņemsim, ka $k=k_1=2$ un, ievietojot to vienādojumos (1.51), iegūsim

$$\begin{cases} a_0F_0(2)=0,\\ a_1F_0(3)+a_0F_1(2)=0,\\ a_2F_0(4)+a_1F_1(3)+a_0F_2(2)=0,\\ a_3F_0(5)+a_2F_1(4)+a_1F_2(3)+a_0F_3(2)=0,\\ \dots\\ a_nF_0(2+n)+a_{n-1}F_1(2+n-1)+\ldots+a_1F_{n-1}(2+1)+a_0F_n(2)=0,\\ \dots \end{cases} \tag{1.52}$$

Pieņemot, ka $a_0$ ir patvaļīgs, izteiksim koeficientus $a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$:

$$\begin{cases} a_1=0,\\ a_2=-\frac{1}{7}a_0,\\ a_3=0,\\ a_4=\frac{37}{1848}a_0\\ a_5=0,\\ a_6=-\frac{223}{89100}a_0\\ \dots \end{cases} \tag{1.53}$$

Pieņemot, ka $a_0=1$, iegūsim pirmo vienādojuma (1.45) partikulāru atrisinājumu.

$$y_1(x)=|x|^2\left(1-\frac{1}{7}x^2+\frac{37}{1848}x^4-\frac{223}{89100}x^6+\cdots\right).$$

Pieņemsim, ka $k = k_2 = -\dfrac{3}{2}$ un, ievietojot to vienādojumos (1.51), iegūsim

$$\begin{cases} a_0 F_0\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0, \\ a_1 F_0\left(\dfrac{3}{2}\right) + a_0 F_1\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0, \\ a_2 F_0\left(\dfrac{5}{2}\right) + a_1 F_1\left(\dfrac{3}{2}\right) + a_0 F_2\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0, \\ a_3 F_0\left(\dfrac{7}{2}\right) + a_2 F_1\left(\dfrac{5}{2}\right) + a_1 F_2\left(\dfrac{3}{2}\right) + a_0 F_3\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0, \\ \dots \\ a_n F_0\left(\dfrac{1}{2}+n\right) + a_{n-1} F_1\left(\dfrac{1}{2}+n-1\right) + \ldots + a_1 F_{n-1}\left(\dfrac{1}{2}+1\right) + a_0 F_n\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0, \\ \dots \end{cases} \tag{1.54}$$

Pieņemot, ka $a_0$ ir patvaļīgs, izteiksim koeficientus $a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots$ :

$$\begin{cases} a_1 = 0, \\ a_2 = \dfrac{1}{8} a_0, \\ a_3 = 0, \\ a_4 = -\dfrac{7}{384} a_0 \\ a_5 = 0, \\ a_6 = \dfrac{1739}{23040} a_0 \\ \dots \end{cases} \tag{1.55}$$

Pieņemot, ka $a_0 = 1$, iegūsim otro vienādojuma (1.45) partikulāru atrisinājumu

$$y_2(x) = |x|^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{8}x^2 - \frac{7}{384}x^4 - \frac{1739}{23040}x^6 + \ldots\right).$$

Vienādojuma (1.45) atrisinājumi $y_1(x)$ un $y_2(x)$ ir lineāri neatkarīgi.

Vienādojuma (1.45) vispārīgais atrisinājums ir

$$y(x) = C_1|x|^2 \left(1 - \frac{1}{7}x^2 + \frac{37}{1848}x^4 - \frac{223}{89100}x^6 + \ldots\right) + \\ + C_2|x|^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{8}x^2 - \frac{7}{384}x^4 - \frac{1739}{23040}x^6 + \ldots\right),$$

kur $C_1$ un $C_2$ ir patvaļīgas konstantes.

**1.21. piemērs.** Atrisināt diferenciālvienādojumu

$$x^2y'' + (x^2 - x)y' + y = 0 \tag{1.56}$$

punktā $x = 0$.

**Atrisinājums.** Pārveidosim doto diferenciālvienādojumu formā (1.29)

$$y'' + \frac{x-1}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0. \tag{1.57}$$

Redzam, ka funkcijas $p_1(x) = \dfrac{x-1}{x}$ un $p_2(x) = \dfrac{1}{x^2}$ nav analītiskas punktā $x = 0$, bet funkcijas $p(x) = x - 1$ un $q(x) = 1$ ir analītiskas punktā $x = 0$, tādēļ punkts $x = 0$ ir diferenciālvienādojuma (1.56) regulārs singulārais punkts un varam meklēt dotā diferenciālvienādojuma atrisinājumu vispārīgās pakāpju rindas veidā (1.30).

Divreiz atvasinot rindu (1.30) un ievietojot vienādojumā (1.57), iegūsim

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+k-1)(n+k)a_nx^{n+k-2} + \frac{x-1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)a_nx^{n+k-1} + \frac{1}{x^2}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+k} = 0$$

jeb

$$\begin{aligned}&\big[k(k-1) - k + 1\big]a_0x^{k-2} + \\ &\qquad + \sum_{n=1}^{\infty}\Big\{\big[(n+k-1)(n+k) - (n+k) + 1\big]a_n + (n+k-1)a_{n-1}\Big\}\,x^{n+k-2} = 0.\end{aligned}$$

Izrakstīsim koeficientus pie $x^{k-2}$, iegūsim

$$a_0F(k) = a_0\big[k(k-1) - k + 1\big].$$

Aprēķinot kvadrātvienādojuma

$$F(k) = k(k-1) - k + 1 = 0$$

saknes, iegūsim $k_1 = k_2 = k = 1$. Redzam, ka $k_1 = k_2$, tāpēc saskaņā ar 1.7. teorēmas 2. gadījumu meklēsim divus lineāri neatkarīgus atrisinājumus formās (1.36) un (1.38).

Izrakstot koeficientus pie citām $x$ pakāpēm, veidojas rekurenta attiecība

$$F(n+k)a_n = \big[(n+k-1)(n+k) - (n+k) + 1\big]a_n = -(n+k-1)a_{n-1},\ n = 1, 2, \ldots,$$

ko var pārrakstīt

$$a_n = -\frac{n+k-1}{(n+k)(n+k-2)+1}a_{n-1}.$$

Izteiksim $a_n$ ar $a_0$:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(n+k-1)!} a_0. \tag{1.58}$$

Pirmo partikulāro atrisinājumu atradīsim, pieņemot, ka $k = 1$, tad rekurenta attiecība ir

$$a_n F(n+1) = a_n[(n+1)n - (n+1) + 1] = -n a_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

ko var pierakstīt

$$a_n = -\frac{1}{n} a_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Izsakot $a_n$ ar $a_0$, iegūsim

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!} a_0, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Tāpēc diferenciālvienādojuma (1.56) viens partikulārais atrisinājums ir

$$y_1(x) = |x| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n.$$

Lai atrastu otro diferenciālvienādojuma (1.56) atrisinājumu, logaritmiski diferencēsim (1.58) pēc $k$, iegūsim

$$(\ln a_n)' = \frac{a_n'}{a_n} = -\sum_{m=0}^{n} \frac{1}{k+m-1}.$$

Ievietojot $k = 1$ un pieņemot, ka $a_0 = 1$, iegūsim

$$d_n = a_n'\big|_{k=1} = a_n\big|_{k=1} \cdot \left(-\sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m}\right) = -\frac{(-1)^n}{n!} \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m}.$$

Tāpēc otrais diferenciālvienādojuma (1.56) partikulārais atrisinājums ir

$$y_2(x) = y_1(x) \ln|x| + |x| \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} \right) x^n.$$

Vispārīgo vienādojuma (1.56) atrisinājumu var pierakstīt formā

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

kur $C_1$ un $C_2$ ir patvaļīgas konstantes.

**1.22. piemērs.** Atrisināt diferenciālvienādojumu

$$x^2 y'' + 2xy' + xy = 0 \tag{1.59}$$

punktā $x = 0$.

**Atrisinājums.** Pārveidosim doto diferenciālvienādojumu formā (1.29)

$$y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{x}{x^2}y = 0. \tag{1.60}$$

Redzam, ka funkcijas $p_1(x) = \dfrac{2}{x}$ un $p_2(x) = \dfrac{x}{x^2}$ nav analītiskas punktā $x = 0$, bet funkcijas $p(x) = 2$ un $q(x) = x$ ir analītiskas punktā $x = 0$, tādēļ punkts $x = 0$ ir diferenciālvienādojuma (1.59) regulārs singulārais punkts un varam meklēt dotā diferenciālvienādojuma atrisinājumu vispārinātās pakāpju rindas veidā (1.30).

Divreiz atvasinot rindu (1.30) un ievietojot vienādojumā (1.60), iegūsim

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+k-1)(n+k)a_n x^{n+k-2} + \frac{2}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(n+k)a_n x^{n+k-1} + \frac{x}{x^2}\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+k} = 0$$

jeb

$$\big[k(k-1)+2k\big]a_0 x^{k-2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\big[(n+k-1)(n+k)+2(n+k)\big]a_n + a_{n-1}\right\}x^{n+k-2} = 0.$$

Izrakstot koeficientus pie $x^{k-2}$, iegūsim

$$a_0 F(k) = a_0\big[k(k-1)+2k\big].$$

Aprēķinot kvadrātvienādojuma

$$F(k) = k(k-1)+2k = 0$$

saknes, iegūsim $k_1 = 0$ un $k_2 = -1$.

Redzam, ka $k_1 - k_2 = 1$ ir vesels pozitīvs skaitlis, tāpēc saskaņā ar 1.7. teorēmas 3. gadījumu, meklēsim divus lineāri neatkarīgus atrisinājumus formās (1.36) un (1.39).

Izrakstot koeficientus pie citām $x$ pakāpēm, veidojas rekurenta attiecība

$$F(n+k)a_n = \big[(n+k-1)(n+k)+2(n+k)\big]a_n = -a_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

ko var pārrakstīt

$$a_n = -\frac{1}{(n+k)(n+k+1)}a_{n-1}.$$

Izteiksim $a_n$ ar $a_0$:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{(k+1)(k+2)^2(k+3)^2\cdots(k+n)^2(k+n+1)}a_0.$$

Pirmo partikulāro atrisinājumu atradīsim, pieņemot, ka $k = 0$, tad rekurenta attiecība ir

$$a_n F(n+1) = a_n[(n-1)n+2n] = -a_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

jeb

$$a_n = -\frac{1}{n(n+1)} a_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Izsakot $a_n$ ar $a_0$, iegūsim

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} a_0, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{1.61}$$

Tāpēc diferenciālvienādojuma (1.59) viens partikulārais atrisinājums ir

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} x^n.$$

Lai atrastu otro vienādojuma (1.59) atrisinājumu, pieņemsim $a_0 = k - k_2 = (k+1)$, tāpēc

$$a_n(k) = \frac{(-1)^n}{(k+2)^2(k+3)^2 \cdots (k+n)^2(k+n+1)} \tag{1.62}$$

un

$$a_1(k) = -\frac{1}{(k+1)^2(k+2)} \cdot (k+1) = -\frac{1}{(k+1)(k+2)}.$$

Tātad

$$c = \lim_{k \to -1} (k+1) a_1(k) = \lim_{k \to -1} -\frac{(k+1)}{(k+1)(k+2)} = -1.$$

Logaritmiski diferencējot (1.62) pēc $k$, iegūsim

$$(\ln a_n)' \frac{a_n'}{a_n} = -2 \sum_{m=2}^{n} \frac{1}{k+m} - \frac{1}{k+n+1}.$$

Ievietojot $k = -1$, iegūsim

$$e_n = a_n'\big|_{k=-1} = a_n\big|_{k=-1} \cdot \left( -2 \sum_{m=2}^{n} \frac{1}{k+m} - \frac{1}{k+m+1} \right) \Bigg|_{k=-1} = -\frac{(-1)^n}{(n-1)!n!} \left[ 2 \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right].$$

Tātad otrais diferenciālvienādojuma (1.59) partikulārais atrisinājums ir

$$y_2(x) = -y_1(x) \ln|x| + |x|^{-1} \left( 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!n!} \left[ 2 \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right] x^n \right).$$

Vispārīgo vienādojumuma (1.59) atrisinājumu var pierakstīt formā

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

kur $C_1$ un $C_2$ ir patvaļīgas konstantes.

### 1.4.1. Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

**1.23. piemērs.** Atrisināt diferenciālvienādojumu $9x^2y'' + 9xy' + (9x^2 - 1)y = 0$ punktā $x = 0$.

**Atbilde.** $y_1(x) = |x|^{\frac{1}{3}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n) \cdot 8 \cdot 14 \cdot \dots \cdot (6n+2)} x^{2n}\right)$ un
$y_2(x) = |x|^{-\frac{1}{3}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2n) \cdot 4 \cdot 10 \cdot \dots \cdot (6n-2)} x^{2n}\right)$.

**1.24. piemērs.** Atrisināt diferenciālvienādojumu $2x^2y'' + xy' - (x+1)y = 0$ punktā $x = 0$.

**Atbilde.** $y_1(x) = |x| \left(1 + \frac{1}{5}x + \frac{1}{70}x^2 + \cdots\right)$ un
$y_2(x) = |x|^{-\frac{1}{2}} \left(1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{18}x^3 - \cdots\right)$.

**1.25. piemērs.** Atrisināt diferenciālvienādojumu $(1 - x^2)y'' + y' + 2y = 0$ punktā $x = -1$.

**Atbilde.** $y_1(x) = 1 - 2(x+1) + \frac{2}{3}(x+1)^2$ un
$y_2(x) = |x+1|^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{3}{4}(x+1) + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3(2n-4)!}{2^{3n-2}n!(n-2)!}(x+1)^n\right)$.

**1.26. piemērs.** Atrisināt diferenciālvienādojumu $x^2y'' + \left(x^2 - \frac{7}{36}\right)y = 0$ punktā $x = 0$.

**Atbilde.** $y_1(x) = |x|^{\frac{7}{6}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{2^{2n}n! \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n+2)}\right)$ un
$y_2(x) = |x|^{-\frac{1}{6}} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{2^{2n}n! \cdot 1 \cdot 4 \cdots (3n-2)}\right)$.

**1.27. piemērs.** Atrisināt diferenciālvienādojumu $x(1-x)y'' + (1-5x)y' - 4y = 0$ punktā $x = 0$.

**Atbilde.** $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n$ un $y_2(x) = y_1(x) \ln|x| - 2\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$.

**1.28. piemērs.** Atrisināt diferenciālvienādojumu $(x^2 + x^3)y'' - (x + x^2)y' + y = 0$ punktā $x = 0$.

**Atbilde.** $y_1(x) = x(1+x)$ un $y_2(x) = y_1(x)\ln|x| - |x|\left(2x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n(n-1)}x^n\right).$

**1.29. piemērs.** Atrisināt diferenciālvienādojumu $x^2y'' + 4xy' + (2+x)y = 0$ punktā $x = 0$.

**Atbilde.** $y_1(x) = |x|^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}x^n$ un

$y_2(x) = -y_1(x)\ln|x| + |x|^{-2}\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n-1)!}\left(2\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)x^n\right).$

**1.30. piemērs.** Atrisināt diferenciālvienādojumu $x(1+x)y'' + (x+5)y' - 4y = 0$ punktā $x = 0$.

**Atbilde.** $y_1(x) = 1 + \frac{4}{5}x + \frac{1}{5}x^2$ un $y_2(x) = |x|^{-4}(1 + 4x + 5x^2)$.

**1.31. piemērs.** Atrisināt diferenciālvienādojumu $(x - x^2)y'' - 3y' + 2y = 0$ punktā $x = 0$.

**Atbilde.** $y_1(x) = \sum_{n=4}^{\infty}(n-3)x^n$ un $y_2(x) = 1 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x^2$. [3]

[3] Partikulārie atrisinājumi $y_1(x)$ un $y_2(x)$ ir lineāri neatkarīgi, tādēļ dotā diferenciālvienādojuma vispārīgo atrisinājumu var pierakstīt formā

$$y(x) = C_1y_1(x) + C_2y_2(x),$$

kur $C_1$ un $C_2$ ir patvaļīgas konstantes.

# 2. Diferenciālvienādojumu periodiskie atrisinājumi

Ir zināms, ka periodisko funkciju pētīšanā svarīgākais instruments ir trigonometriskā Furjē rinda. Tāpēc, runājot par lineāru diferenciālvienādojumu risināšanu ar rindu palīdzību, ir svarīgi apskatīt periodiskos atrisinājumus Furjē rindas veidā.

Apskatīsim dažus pamatfaktus par Furjē rindām.

## 2.1. Furjē rindas

Pirms sākam apskatīt, kā ar Furjē rindu palīdzību var atrisināt diferenciālvienādojumus, atgādināsim Furjē rindu teorijas pamatus. [4]

J. B. J. Furjē (`Jean Baptiste Joseph Fourier`, 1768 - 1830) - franču matemātiķis.

### 2.1.1. Periodiskas funkcijas ar periodu $2\pi$ trigonometriskā Furjē rinda

**2.1. definīcija.** Par ***trigonometrisko Furjē rindu*** sauc šādu funkciju rindu

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + b_1 \sin x) + (a_2 \cos 2x + b_1 \sin 2x) + \ \ldots \ + (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \\ = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Ja šī rinda vienmērīgi konverģē intervālā $[-\pi, \pi]$ un tās summa ir funkcija $f(x)$, tad rindas koeficientus aprēķina pēc formulām

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx, (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

### 2.1.2. Furjē rindas konverģence

Furjē rindas konverģences pietiekamie nosacījumi doti Dirihlē teorēmā, kuru formulēsim bez pierādījuma.

L. Dirichlet (`Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet`, 1805 - 1859) - vācu matemātiķis.

**2.1. teorēma.** *Pieņemsim, ka funkcija $f(x)$ apmierina šādus nosacījumus:*

1. *$f(x)$ ir periodiska ar periodu $2\pi$;*
2. *intervālā $[-\pi, \pi]$ $f(x)$ ir nepārtraukta vai arī šai intervālā tai ir galīgs skaits tikai pirmā veida pārtraukuma punktu;*
3. *intervālā $[-\pi, \pi]$ $f(x)$ ir monotona vai arī šai intervālā tai ir galīgs skaits ekstrēma punktu.*

*Tad ir pareizi šādi apgalvojumi.*

1. *Funkcijas $f(x)$ Furjē rinda visām $x$ vērtībām konverģē uz summu $S(x)$.*

2. *Visos funkcijas $f(x)$ nepārtrauktības punktos ir spēkā vienādība $S(x) = f(x)$.*

3. *Ja $x = x_0$ ir funkcijas pirmā veida pārtraukuma punkts, tad*

$$S(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2},$$

*kur $f(x_0 - 0)$ un $f(x_0 + 0)$ ir funkcijas $f(x)$ vienpusējās robežas punktā $x_0$.*

Ir redzams, ka Dirihlē teorēmas nosacījumi ir spēkā ļoti plašai funkciju klasei. Tas nozīmē, ka ļoti daudzas funkcijas var izvirzīt Furjē rindā.

### 2.1.3. Periodiskas funkcijas ar periodu $2l$ trigonometriskā Furjē rinda

Apskatīsim funkciju $f(x)$, kuras periods ir $2l$, t.i., funkciju, kurai ar visiem $x$ ir spēkā vienādība $f(x + 2l) = f(x)$ ($l$ - reāls skaitlis).

**2.2. definīcija.** Par ***periodiskas funkcijas*** $f(x)$ ***ar periodu*** $2l$ ***trigonometrisko Furjē rindu*** sauc šādu funkciju rindu

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi}{l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x),$$

kur

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x \, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx.$$

### 2.1.4. Furjē trigonometriska rinda pāra vai nepāra funkcijai

Ja $f(x)$, $x \in [-l, l]$ ir ***pāra funkcija***, t.i., $f(-x) = f(x)$, $x \in [-l, l]$, tad Furjē rindas koeficienti ir

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) dx = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x) dx, \tag{2.1}$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x dx = \frac{2}{l} \int_{0}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi}{l} x \, dx, \tag{2.2}$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx = 0. \tag{2.3}$$

Pāra funkcijai atbilstošā Furjē trigonometriska rinda ir

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l} x. \tag{2.4}$$

Ja $f(x)$, $x \in [-l, l]$ ir ***nepāra funkcija***, t.i., $f(-x) = -f(x)$, $x \in [-l, l]$, tad Furjē rindas koeficienti ir

$$a_0 = a_n = 0, \tag{2.5}$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \, dx. \tag{2.6}$$

Šai funkcijai atbilstošā Furjē trigonometriska rinda ir

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x. \tag{2.7}$$

### 2.1.5. Intervālā $[0, l]$ definētas funkcijas izvirzījums Furjē trigonometriskā rindā

Ja funkcija $f(x)$ ir definēta intervālā $[a, b]$, tad tai atbilstošus Furjē rindas koeficientus var aprēķinat pēc formulām

$$a_0 = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \cos \frac{2n\pi}{b-a} x \, dx,$$

$$b_n = \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) \sin \frac{2n\pi}{b-a} x \, dx, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Šoreiz uzskatījām, ka $2l = b - a$, bet $l = \dfrac{b-a}{2}$.

Ja funkcija ir definēta intervālā $[0, l]$, tad Furjē rindas koeficienti ir

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{2n\pi}{l} x \, dx,$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{2n\pi}{l} x \, dx, \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Ja funkcija $f(x)$ ir definēta intervālā $[0, l]$, tad varam rīkoties arī citādi. Vispirms varam $f(x)$ turpināt uz intervālu $[-l, l]$ pēc pāra vai pēc nepāra principa, t.i., izveidojot pāra funkciju

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ja } x \in [0, l], \\ f(-x), & \text{ja } x \in [-l, 0) \end{cases}$$

vai nepāra funkciju

$$\psi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ja } x \in [0, l], \\ -f(-x), & \text{ja } x \in [-l, 0). \end{cases}$$

Pēc tam intervālā $[-l, l]$ iegūto funkciju varam izvirzīt Furjē trigonometriskā rindā.

Pāra funkcijai $\varphi(x)$ iegūsim Furjē rindas koeficientu izteiksmes (2.1), (2.2), (2.3). Atbilstošā Furjē trigonometriska rinda (2.4).

Šādos gadījumos saka, ka intervālā $[0, l]$ uzdotā funkcija $f(x)$ ir izvirzīta Furjē trigonometriskajā rindā pēc kosinusiem.

Nepāra funkcijai $\psi(x)$ Furjē rindas koeficientu izteiksmes ir (2.5), (2.6) un Furjē trigonometriskā rinda ir (2.7).

Šoreiz saka, ka intervālā $[0, l]$ uzdotā funkcija ir izvirzīta Furjē trigonometriskā rindā pēc sinusiem.

## 2.2. Periodiskie atrisinājumi

Apskatīsim diferenciālvienādojumu

$$y'' + ay' + by = f(x), \quad a, b \in \mathbb{R}. \tag{2.8}$$

**2.3. definīcija.** Funkciju $f$ sauc par ***periodisko funkciju*** ar periodu $T \neq 0$, ja katram $x$ no funkcijas definīcijas apgabala ir pareiza vienādība:

$$f(x) = f(x + T).$$

**2.2. teorēma.** *Ja vienādojumam* (2.8) *ir periodisks atrisinājums $y_0(x)$ ar periodu $T$, tad vienādojums* (2.8) *arī ir periodiska funkcija pēc $x$ ar to pašu periodu $T$.*

**Pierādījums.** Tiešām, vienādojumā (2.8) ievietojot periodisko atrisinājumu $y = y_0(x)$, iegūstam

$$y_0'(x) = f(x) - ay_0'(x) - by_0(x) = F\big(x, y_0(x), y_0'(x)\big).$$

Šajā vienādojumā aizvietojot $x$ ar $x + T$, neizmainīsim vienādojuma kreiso pusi, jo funkcija ir periodiska.

Ja $f(x)$ ir periodiska funkcija ar periodu $T$, tad tās atvasinājums $f'(x)$ arī ir periodiska funkcija, jo

$$f'(x) = \big(f(x)\big)' = \big(f(x+T)\big)' = f'(x+T) \cdot x' = f'(x+T).$$

Tādēļ iegūsim

$$F\big(x, y_0(x), y_0'(x)\big) = F\big(x+T, y_0(x+T), y_0'(x+T)\big) = F\big(x+T, y_0(x), y_0'(x)\big),$$

t.i., funkcija $F$ pa integrāllīniju $y = y_0(x)$ ir periodiska pēc $x$ ar periodu $T$.

**Sekas.**

1. Ja vienādojuma (2.8) labā puse pie jebkuras $y_0(x)$ izvēles, nav periodiska funkcija pēc argumenta $x$, tad neeksistē periodisks atrisinājums.
2. Ja funkcija $F$ nav atkarīga no $x$, tad $F$ var apskatīt kā periodisko funkciju pēc $x$ ar jebkuru periodu un nav izslēgts, ka eksistē atrisinājums ar jebkuru periodu.

Pieņemsim, ka ir jāatrod diferenciālvienādojuma (2.8) partikulārais periodisks atrisinājums.

Lai eksistētu periodisks atrisinājums, pieņemsim, ka $f(x)$ ir periodiska funkcija. Bez īpaša ierobežojuma, var pieņemt, ka funkcija $f(x)$ ir periodiska funkcija ar periodu $2\pi$. Tas ir iespējams tāpēc, ka, ja funkcijas $f(x)$ periods būtu $T$, tad pēc neatkarīgā mainīgā $x_1 = \frac{2\pi}{T}x$ pārveidošanas, labā puse kļūtu par periodisko funkciju ar periodu $2\pi$ pēc jaunā neatkarīgā mainīgā $x_1$.

Pieņemsim, ka funkcija $f(x)$ ir arī nepārtraukta un izvirzīsim to Furjē rindā:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{2.9}$$

Periodisko atrisinājumu meklēsim šādā veidā

$$y(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k \cos kx + B_k \sin kx). \tag{2.10}$$

Atvasinot rindu (2.10), iegūsim

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-kA_k \sin kx + kB_k \cos kx) = \sum_{k=1}^{\infty} k(B_k \cos kx - A_k \sin kx).$$

Otrreiz atvasinot, iegūsim

$$y''(x) = \sum_{k=1}^{\infty}(-k^2 A_k \cos kx - k^2 B_k \sin kx) = -\sum_{k=1}^{\infty} k^2(A_k \cos kx + B_k \sin kx).$$

Atvasinājumus ievietojot dotajā vienādojumā (2.8), iegūsim

$$-\sum_{k=1}^{\infty} k^2(A_k\cos kx + B_k\sin kx) + a\sum_{k=1}^{\infty} k(B_k\cos kx - A_k\sin kx)+$$
$$+ b\left[\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k\cos kx + B_k\sin kx)\right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx + b_k\sin kx).$$

Vienādojot koeficientus pie $\cos kx$ un $\sin kx$ kreisajā un labajā pusē, iegūsim sistēmu

$$\begin{array}{c} \\ \sin x \\ \cos x \\ \sin 2x \\ \cos 2x \\ \dots \\ \sin kx \\ \cos kx \\ \dots \end{array}
\begin{cases} \dfrac{bA_0}{2} = \dfrac{a_0}{2}, \\ -B_1 - aA_1 + bB_1 = b_1, \\ -A_1 + aB_1 + bA_1 = a_1, \\ -2^2B_2 - 2aA_2 + bB_2 = b_2, \\ -2^2A_2 + 2aB_2 + bA_2 = a_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots , \\ -k^2B_k - kaA_k + bB_k = b_k, \\ -k^2A_k + kaB_k + bA_k = a_k, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{2.11}$$

Apskatīsim vienādojumus

$$A_0b = a_0, \tag{2.12}$$

$$A_k\left[(b-k^2)^2 + a^2k^2\right] = (b-k^2)a_k - akb_k, \tag{2.13}$$

$$B_k\left[(b-k^2)^2 + a^2k^2\right] = (b-k^2)b_k + aka_k. \tag{2.14}$$

Ja $b \neq 0$, tad $A_0 = \dfrac{a_0}{b}$, kur $a_0 = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)dx$.

Ja $b = 0$, tad, lai eksistētu atrisinājums, ir nepieciešams, lai $a_0 = 0$. Tad $A_0$ ir patvaļīga konstante. Šajā gadījumā vienādojumam (2.8) eksistē vairāki periodiskie atrisinājumi.

Ja tomēr $b = 0$ un $a_0 \neq 0$, tad periodisks atrisinājums neeksistē.

Apskatīsim vienādojumus (2.13) un (2.14).

Ja $a \neq 0$, tad $(b-k^2)^2 + a^2k^2 \neq 0$ un tātad vienādojumiem (2.13) un (2.14) ir atrisinājumi

$$A_k = \frac{(b-k^2)a_k - akb_k}{(b-k^2)^2 + a^2k^2},$$

$$B_k = \frac{(b-k^2)b_k + aka_k}{(b-k^2)^2 + a^2k^2}.$$

Ja $a = 0$, tad vienādojumus (2.13) un (2.14) var pārrakstīt veidā

$$A_k(b - k^2) = a_k, \quad B_k(b - k^2) = b_k. \tag{2.15}$$

Vienādojumi (2.15) ir atrisināmi divos gadījumos:

1. ja $b \neq k^2$, tad katram $k$

$$A_k = \frac{a_k}{b - k^2} = \frac{1}{b - k^2} \cdot \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx,$$
$$B_k = \frac{b_k}{b - k^2} = \frac{1}{b - k^2} \cdot \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx, \quad k = 1, 2, \ldots$$

   un diferenciālvienādojumam (2.8) eksistē partikulārais periodisks atrisinājums, kuru nosaka formula (2.10);

2. ja dažiem $k_0$ izpildās $b = k_0^2$ un

$$a_{k_0} = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \cos k_0 x \, dx = 0 \;\text{ un }\; b_{k_0} = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(x) \sin k_0 x \, dx = 0,$$

   tad vienādojumus (2.15) var pārrakstīt veidā

$$A_{k_0} \cdot 0 = 0 \;\text{ un }\; B_{k_0} \cdot 0 = 0,$$

   no kurienes izriet, ka $A_{k_0}$ un $B_{k_0}$ ir patvaļīgas konstantes.

   Pārējos koeficientus $A_k$, $B_k$, ja $k \neq k_0$, var noteikt pēc formulām (2.15). Vienādojumam (2.8) eksitē partikulārais periodisks atrisinājums.

   Ja tomēr $a = 0$ un $b = k_0^2$, bet vismaz viens no koeficientiem $a_{k_0}$, $b_{k_0}$ nav vienāds ar nulli, tad vienādojumam (2.8) periodisks atrisinājums neeksistē. Tiešām, šajā gadījumā iegūstam vienādojumu

$$y'' + k_0^2 y = a_{k_0} \cos k_0 x + b_{k_0} \sin k_0 x,$$

   kura vispārīgajā atrisinājumā iekļaujas neperiodiska funkcija

$$x(A_{k_0} \cos k_0 x + B_{k_0} \sin k_0 x).$$

Apskatīsim dažus piemērus.

**2.32. piemērs.** Atrast vienādojuma

$$y'' + 2y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^4}$$

periodisko atrisinājumu.

**Atrisinājums.** Meklēsim atrisinājumu Furjē rindas veidā (2.10).

Divreiz atvasinot šo rindu un ievietojot atvasinājumus dotajā vienādojumā, iegūsim

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2(-A_k \cos kx - B_k \sin kx) + 2\left(\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kx + B_k \sin kx\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^4}.$$

Izrakstot koeficientus pie $\cos kx$ un $\sin kx$ visiem $k = 1, 2, \ldots$, iegūsim sistēmu

$$\begin{array}{c} \\ \sin x \\ \cos x \\ \sin 2x \\ \cos 2x \\ \ldots \\ \sin kx \\ \cos kx \\ \ldots \end{array} \qquad \begin{cases} A_0 = 0, \\ -B_1 + 2B_1 = 1, \\ -A_1 + 2A_1 = 0, \\ -2^2 B_2 + 2B_2 = \dfrac{1}{2^4}, \\ -2^2 A_2 + 2A_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ , \\ -k^2 B_k + 2B_k = \dfrac{1}{k^4}, \\ -k^2 A_k + 2A_k = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{2.16}$$

No šīs sistēmas atradīsim koeficientus

$$\begin{cases} A_0 = 0, \\ B_1 = 1, \\ A_1 = 0, \\ B_2 = -\dfrac{1}{2 \cdot 2^4}, \\ A_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ , \\ B_k = \dfrac{1}{k^4(2 - k^2)}, \\ A_k = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{2.17}$$

Tāpēc iegūsim, ka dotā diferenciālvienādojuma periodisks atrisinājums ir šāds

$$y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^4(2 - k^2)}.$$

**2.1. piezīme.** Atsevišķos gadījumos otrās kārtas parasta nehomogēna lineāra diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums (ne tikai kāds partikulārais) arī ir periodiska funkcija.

Kā zināms no diferenciālvienādojumu teorijas, tāda diferenciālvienādojuma vispārīgo atrisinājumu var pierakstīt veidā

$$y(x) = y_0(x) + \tilde{y}(x), \tag{2.18}$$

kur $y_0(x)$ ir atbilstošā homogēna diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums, bet $\tilde{y}(x)$ ir nehomogēna diferenciālvienādojuma partikulārais atrisinājums.

Ja atbilstošā homogēna diferenciālvienādojuma raksturvienādojumam ir kompleksās saknes $\alpha \pm \beta i$, tad $y_0(x)$ ir periodiska funkcija ar periodu $T_0 = \dfrac{2\pi}{\beta}$. Tāpēc vispārīgais atrisinājums (2.18) var būt periodiska funkcija, ja funkciju $y_0$ un $\tilde{y}$ periodi ir samērojami, t.i., ja šo periodu dalījums ir racionāls skaitlis.

Apskatāmā 2.32. piemērā vispārīgo atrisinājumu var pierakstīt veidā

$$y(x) = C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^4(2-k^2)}.$$

Šajā gadījumā $T_{y_0} = \sqrt{2}$ un $T_{\tilde{y}} = 2\pi$. Redzam, ka šie periodi nav samērojami, tātad tikai partikulārais 2.32. piemērā apskatāmā diferenciālvienādojuma atrisinājums būs periodisks.

**2.33. piemērs.** Atrast vienādojuma

$$y'' + 4y = \sum_{k=4}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2}$$

periodisko atrisinājumu.

**Atrisinājums.** Meklēsim atrisinājumu Furjē rindas veidā (2.10).

Divreiz atvasinot šo rindu un ievietojot atvasinājumus dotajā vienādojumā, iegūsim

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2(-A_k \cos kx - B_k \sin kx) + 4\left(\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kx + B_k \sin kx\right) = \sum_{k=4}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2}.$$

Izrakstot koeficientus pie $\cos kx$ un $\sin kx$ visiem $k = 4, 5, \ldots$, iegūsim sistēmu

$$\begin{array}{c} \\ \sin 4x \\ \cos 4x \\ \sin 5x \\ \cos 5x \\ \cdots \\ \sin kx \\ \cos kx \\ \cdots \end{array} \qquad \begin{cases} A_0 = 0, \\ -4^2 B_4 + 4B_4 = \dfrac{1}{4^2}, \\ -4^2 A_4 + 4A_4 = 0, \\ -5^2 B_5 + 4B_5 = \dfrac{1}{5^2}, \\ -5^2 A_5 + 4A_5 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots , \\ -k^2 B_k + 4B_k = \dfrac{1}{k^2}, \\ -k^2 A_k + 4A_k = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{2.19}$$

No šīs sistēmas atradīsim koeficientus

$$\begin{cases} A_0 = 0, \\ B_4 = \dfrac{1}{4^2(4-4^2)}, \\ A_4 = 0, \\ B_5 = \dfrac{1}{5^2(4-5^2)}, \\ A_5 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots , \\ B_k = \dfrac{1}{k^2(4-k^2)}, \\ A_k = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{2.20}$$

Tātad iegūstam, ka dotā nehomogēna diferenciālvienādojuma partikulārais periodisks atrisinājums ir šāds

$$\tilde{y}(x) = \sum_{k=4}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2(4-k^2)}.$$

**2.2. piezīme.** Apskatāmā 2.33. piemērā atbilstošā homogēna diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$y_0(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Nehomogēna diferenciālvienādojuma iegūtais partikulārais atrisinājums ir

$$\tilde{y}(x) = \sum_{k=4}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2(4-k^2)}.$$

Redzam, ka šajā gadījumā $T_{y_0} = \pi$, $T_{\tilde{y}} = 2\pi$. Šie periodi ir samērojami, tātad dotā nehomogēna diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \sum_{k=4}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2(4-k^2)}$$

arī ir periodiska funkcija patvaļīgām $C_1$ un $C_2$ konstantēm.

**2.34. piemērs.** Atrast vienādojuma

$$y'' + 4y = \cos^2 x$$

periodisko atrisinājumu.

**Atrisinājums.** Pārrakstīsim doto vienādojumu formā

$$y'' + 4y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x.$$

Meklēsim atrisinājumu Furjē rindas veidā (2.10).

Divreiz atvasinot šo rindu un ievietojot atvasinājumus dotajā vienādojumā, iegūsim

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2(-A_k \cos kx - B_k \sin kx) + 4\left(\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos kx + B_k \sin kx\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x.$$

Izrakstot koeficientus pie $\cos kx$ un $\sin kx$ visiem $k = 1, 2, \ldots$, iegūsim sistēmu

$$\begin{array}{c} \\ \sin x \\ \cos x \\ \sin 2x \\ \cos 2x \\ \ldots \\ \sin kx \\ \cos kx \\ \ldots \end{array} \quad \begin{cases} 2A_0 = \dfrac{1}{2}, \\ -B_1 + 4B_1 = 0, \\ -A_1 + 4A_1 = 0, \\ -2^2 B_2 + 4B_2 = 0, \\ -2^2 A_2 + 4A_2 = \dfrac{1}{2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ , \\ -k^2 B_k + 4B_k = 0, \\ -k^2 A_k + 4A_k = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{2.21}$$

No šīs sistēmas atradīsim koeficientus

$$\begin{cases} A_0 = 1\frac{1}{4}, \\ B_1 = 0, \\ A_1 = 0, \\ B_2 = 0, \\ 0 \neq \dfrac{1}{2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ , \\ B_k = 0, \\ A_k = 0, \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{2.22}$$

Redzam, ka sistēma ir nesaderīga, tāpēc dotajam vienādojumam nav periodiska atrisinājuma.

**2.3. piezīme.** Secinājumu par to, ka dotajam diferenciālvienādojumam nav periodiska atrisinājuma var izdarīt arī pētot atbilstošā homogēna vienādojuma un Furjē rindas koeficientus.

Tā kā $a = 0$, $b = k_0^2 = 2^2$ un $a_{k_0} = a_2 \neq 0$, tad apskatāmajam diferenciālvienādojumam neeksistē periodisks atrisinājums.

**2.35. piemērs.** Atrast vienādojuma

$$y'' - y = |\sin x|$$

periodisko atrisinājumu.

**Atrisinājums.** Izvirzīsim funkciju $f(x) = |\sin x|$ Furjē trigonometriskajā rindā intervālā $[-\pi; \pi]$. Tā kā $f(x)$ ir pāra funkcija, tad $b_n = 0$. Atradīsim Furjē rindas koeficientus

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\sin x| dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \sin x dx = -\frac{2}{\pi}\cos x\Big|_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi}(-1-1) = \frac{4}{\pi}.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\sin x| \cos nx dx = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \sin x \cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} \big(\sin(1-n)x + \sin(1+n)x\big) dx =$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{1-n}\cos(1-n)x - \frac{1}{1+n}\cos(1+n)x\right)\Bigg|_0^{\pi} =$$
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\left(\dfrac{2}{1-2k} + \dfrac{2}{1+2k}\right), & n = 2k, \\ 0, & n = 2k-1, \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi(1-4k^2)}, & n = 2k, \\ 0, & n = 2k-1. \end{cases}$$

Tāpēc funkcijai $f(x) = |\sin x|$ atbilstošā Furjē trigonometriskā rinda ir

$$\frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{1-4k^2}.$$

Rinda konverģē uz funkciju $f(x) = |\sin x|$ visiem $x \in [-\pi; \pi]$. Tādējādi

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{1-4k^2}.$$

Tātad atradīsim vienādojuma

$$y'' - y = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2kx}{1-4k^2}$$

periodiskos atrisinājumus. Meklēsim atrisinājumu Furjē rindas veidā

$$y(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k}\cos 2kx + B_{2k}\sin 2kx.$$

Atvasinot šo rindu, iegūsim

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} 2k(-A_{2k}\sin 2kx + B_{2k}\cos 2kx)$$

un, otrreiz atvasinot, iegūsim

$$y'' = \sum_{k=1}^{\infty} (2k)^2(-A_{2k}\cos 2kx - B_{2k}\sin 2kx).$$

Ievietojot atvasinājumus dotajā vienādojumā, iegūsim

$$\sum_{k=1}^{\infty}(2k)^2(-A_{2k}\cos 2kx - B_{2k}\sin 2kx) - \left(\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k}\cos 2kx + B_{2k}\sin 2kx\right) = \\ = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{1-4k^2}.$$

Izrakstot koeficientus pie $\cos kx$ un $\sin kx$ visiem $k = 1, 2, \ldots$, iegūsim sistēmu

$$\begin{array}{ll} & -\dfrac{A_0}{2} = \dfrac{2}{\pi}, \\ \sin 2x & -(2\cdot 1)^2 B_2 - B_2 = 0, \\ \cos 2x & -(2\cdot 1)^2 A_2 - A_2 = -\dfrac{4}{\pi(4\cdot 1^2 - 1)}, \\ \sin 4x & -(2\cdot 2)^2 B_4 - B_4 = 0, \\ \cos 4x & -(2\cdot 2)^2 A_4 - A_4 = -\dfrac{4}{\pi(4\cdot 2^2 - 1)}, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\ \sin 2kx & -(2k)^2 B_{2k} - B_{2k} = 0, \\ \cos 2kx & -(2k)^2 A_{2k} - A_{2k} = -\dfrac{4}{\pi(4\cdot k^2 - 1)}, \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \tag{2.23}$$

No šīs sistēmas atradīsim koeficientus

$$\begin{cases} A_0 = -\dfrac{4}{\pi}, \\ B_2 = 0, \\ A_2 = \dfrac{4}{\pi(2^4 - 1)}, \\ B_4 = 0, \\ A_4 = \dfrac{4}{\pi(4^4 - 1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\ B_{2k} = 0, \\ A_{2k} = \dfrac{4}{\pi(16k^4 - 1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{2.24}$$

Tātad iegūstam, ka dotā diferenciālvienādojuma periodisks atrisinājums ir šāds

$$y(x) = -\frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\cos 2kx}{\pi(16k^4 - 1)}.$$

### 2.2.1. Uzdevumi patstāvīgai risināšanai

**2.36. piemērs.** Atrast diferenciālvienādojuma $y'' + y = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^3}$ periodisko atrisinājumu.

**Atbilde.** Dotam diferenciālvienādojumam nav periodiska atrisinājuma.

**2.37. piemērs.** Atrast diferenciālvienādojuma $y'' + y = \cos x \cdot \cos 2x$ periodisko atrisinājumu.

**Atbilde.** Dotam diferenciālvienādojumam nav periodiska atrisinājuma.

**2.38. piemērs.** Atrast diferenciālvienādojuma $y'' + 3y = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx + \sin kx}{k^3}$ periodisku atrisinājumu.

**Atbilde.** $y(x) = \frac{1}{3} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx + \sin kx}{k^3(k^2 - 3)}$.

**2.39. piemērs.** $y'' + y' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2}$ periodisko atrisinājumu.

**Atbilde.** $y(x) = C - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx + k \sin kx}{k^3(k^2 + 1)}$, kur $C$ ir patvaļīga konstante.

**2.40. piemērs.** $y'' + 4y = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}$ periodisko atrisinājumu.

**Atbilde.** $y(x) = A_2 \cos 2x + B_2 \sin 2x + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2(4 - k^2)}$.

# 3. Diferenciālvienādojumu risināšana ar matemātisko datorprogrammu *Mathematica*

Tagad aplūkosim, kā var izmantot datorprogrammu *Mathematica* risinot diferenciālvienādojumus ar pakāpju rindu palīdzību.

## 3.1. Atrisinājumi parastajā punktā

Apskatīsim diferenciālvienādojumu

$$y'' + y = 0.$$

Kā jau iepriekš bija apskatīts, atrisinājumu meklēsim pakāpju rindas veidā

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Atvasinot $y$, iegūsim

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

un

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Atvasinājumus ievietojot diferenciālvienādojumā, iegūsim

$$y'' + y = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n\right] x^n = 0.$$

Pielīdzinot koeficientus pie vienādām $x$ pakāpēm nullei, iegūsim

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n = 0$$

jeb

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n-1)n}.$$

Tad datorprogrammā *Mathematica* ierakstām nosacījumus:

```
a[n_] := a[n] = -a[n-2]/(n-1)n;
a[0] = a0;
a[1] = a1;
```

Tad tabulveidā izvadām pirmos 11 rindas locekļus ar komandu:

TableForm[Table[$n, a[n], n, 0, 11$]]

| | |
|---|---|
| 0 | $a0$ |
| 1 | $a1$ |
| 2 | $-\frac{a0}{2}$ |
| 3 | $-\frac{a1}{6}$ |
| 4 | $\frac{a0}{24}$ |
| 5 | $\frac{a1}{120}$ |
| 6 | $-\frac{a0}{720}$ |
| 7 | $-\frac{a1}{5040}$ |
| 8 | $\frac{a0}{40320}$ |
| 9 | $\frac{a1}{362880}$ |
| 10 | $-\frac{a0}{3628800}$ |

Un vispārīgo rindas izvirzījumu iegūsim ar komandu

$$\text{yapproxd} = \sum_{1=0}^{10} \text{a[i]x}^i,$$

$$a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2}x^2 - \frac{a_1}{6}x^3 + \frac{a_0}{24}x^4 + \frac{a_1}{120}x^5 - \frac{a_0}{720}x^6 - \frac{a_1}{5040}x^7 + \frac{a0}{40320}x^8 + \frac{a1}{362880}x^9$$

$a_0$ un $a_1$ var piešķirt patvaļīgas vērtības. Piemēram, ja datorprogrammā *Mathematica* apzīmēsim

$a0 = 1;\ a1 = 0;,$

tad ar komandu TableForm iegūsim izvirzījumu tabulas veidā

TableForm[Table[$n, a[n], n, 0, 11$]]

| | |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |
| 2 | $-\frac{1}{2}$ |
| 3 | 0 |
| 4 | $\frac{1}{24}$ |
| 5 | 0 |
| 6 | $-\frac{1}{720}$ |
| 7 | 0 |
| 8 | $\frac{1}{5040}$ |
| 9 | 0 |
| 10 | $-\frac{1}{362880}$, |

Bet ar komandu

$$\text{yapproxd} = \sum_{i=0}^{10} \text{a[i]x}^i,$$

iegūsim

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \frac{x^8}{40320} - \frac{x^{10}}{3628800}.$$

Redzam, ka tas ir kosinusa izvirzījums.

Ja datorprogrammā pieņem

$a0 = 0;\ a1 = 1;$

tad ar noteiktajām komandām, analogi kā iepriekš, iegūst izvirzījumu

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880}.$$

Redzam, ka tas ir sinusa izvirzījums.

Nav grūti ievērot, ka saskaitot kosinusa un sinusa izvirzījumus, iegūstam diferenciālvienādojuma

$$y = y'' + y$$

vispārīgā atrisinājuma izvirzījumu, līdz ar to varam spriest, ka

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Par to var pārliecināties, arī atrisinot šo vienādojumu datorprogrammā *Mathematica* ar citu paņēmienu, ar komandu DSolve:

| |
|---|
| DSolve$[y''[x] + y[x] == 0,\ y[x],\ x]$ |
| $y[x] = C[1]\mathrm{Cos}[x] + C[2]\mathrm{Sin}[x]$ |

Ar komandu DSolve ne vienmēr var dabūt tik vienkāršu atbildi, bieži vien pēc iegūtās atbildes nevar spriest par atrisinājuma rindas izvirzījumu.

## 3.2. Atrisinājumi regulārā singulārajā punktā

Apskatīsim diferenciālvienādojumu

$$4xy'' + 2y' + y = 0$$

punktā $x = 0$.

Pārveidosim doto diferenciālvienādojumu formā

$$y'' + \frac{1}{2x}y' + \frac{x}{4x^2}y = 0.$$

No 1.19. piemēra ir zināms, ka $x = 0$ ir dotā diferenciālvienādojuma regulārs singulārais punkts, tāpēc var meklēt atrisinājumu vispārinātās pakāpju rindas veidā

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+k}, \quad (a_0 \neq 0).$$

Divreiz atvasinot šo rindu un ievietojot $y'$ un $y''$ dotajā vienādojumā, iegūsim

$$\left[k(k-1) + \frac{1}{2}k\right] a_0 x^{k-2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[(n+k-1)(n+k) + \frac{1}{2}(n+k)\right] a_n + \frac{1}{4}a_{n-1} \right\} x^{n+k-2} = 0.$$

Izrakstīsim koeficientus pie $x^{k-2}$, iegūsim

$$a_0 F(k) = a_0 \left[k(k-1) + \frac{1}{2}k\right].$$

Aprēķināsim kvadrātvienādojuma

$$k(k-1) + \frac{1}{2}k = 0$$

saknes ar datorprogrammas *Mathematica* palīdzību

| |
|---|
| Solve$[k(k-1) + \frac{1}{2}k == 0]$ |
| $\{\{k \to 0\},\ \{k \to \frac{1}{2}\}\}$ |

Izrakstot koeficientus pie citām $x$ pakāpēm veidojas rekurenta attiecība

$$\left[(n+k-1)(n+k)+\frac{1}{2}(n+k)\right]a_n=-\frac{1}{4}a_{n-1},\quad n=1,2,\ldots,$$

Pieņemot, ka $k=k_1=\frac{1}{2}$, iegūsim

$$\left[\left(n+\frac{1}{2}-1\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right]a_n+\frac{1}{4}a_{n-1}=0.$$

Izteiksim $a_n$

$\text{Solve}[\left(\left(n+\frac{1}{2}-1\right)\left(n+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)a[n]+\frac{1}{4}a[n-1]==0,a[n]]$

$\{\{a[n]\to-\frac{(-3+4n)a[-1+n]}{2n(1+2n)}\}\}$

Tabulveidā izvadīsim pirmos izvirzījuma locekļus

$a[n\_]:=a[n]=-\frac{(-3+4n)a[-1+n]}{2n(1+2n)};$

$a[0]=a0;$

$\text{TableForm}[\text{Table}[n,a[n]],n,0,5]]$

| | |
|---|---|
| 0 | $a0$ |
| 1 | $-\frac{a0}{6}$ |
| 2 | $\frac{a0}{120}$ |
| 3 | $-\frac{a0}{5040}$ |
| 4 | $\frac{a0}{362880}$ |
| 5 | $-\frac{a0}{39916800}$ |

Tapēc viens partikulārais atrisinājums ir

$$y_1(x)=a_0x^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{6}x+\frac{1}{120}x^2-\frac{1}{5040}x^3+\frac{1}{362880}x^4-\frac{1}{39916800}x^5+\ldots\right).$$

Pieņemot, ka $k=k_2=0$, iegūsim

$$\left[(n-1)n+\frac{1}{2}n\right]a_n+\frac{1}{4}a_{n-1}=0.$$

Izteksim $a_n$

$\text{Solve}[\left((n-1)n+\frac{1}{2}n\right)a[n]+\frac{1}{4}a[n-1]==0,a[n]]$

$\{\{a[n]\to-\frac{a[-1+n]}{2n(-1+2n)}\}\}$

Tabulveidā izvadīsim pirmos izvirzījuma locekļus

```
b[n_] := b[n] = -b[-1 + n]/(2n(-1 + 2n));
b[0] = b0;
TableForm[Table[n, b[n], n, 0, 5]]
```

$$b[n_-] := b[n] = -\frac{b[-1+n]}{2n(-1+2n)};$$

$$b[0] = b0;$$

$$\text{TableForm}[\text{Table}[n, b[n], n, 0, 5]]$$

| | |
|---|---|
| 0 | $b0$ |
| 1 | $-\frac{b0}{2}$ |
| 2 | $\frac{b0}{24}$ |
| 3 | $-\frac{b0}{720}$ |
| 4 | $\frac{b0}{40320}$ |
| 5 | $-\frac{b0}{3628800}$ |

Tāpēc otrais partikulārs atrisinājums ir

$$y_2(x) = b_0 \left(1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{720}x^3 + \frac{1}{40320}x^4 - \frac{1}{3628800}x^5 + \dots\right).$$

Vispārīgo dotā diferenciālvienādojuma atrisinājumu var pierakstīt veidā

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x),$$

kur $C_1$ un $C_2$ ir patvaļīgas konstantes, bet atrisinājumi $y_1(x)$ un $y_2(x)$ ir lineāri neatkarīgi.

# LITERATŪRA


[1] M.L. Abell, J.P. Braselton. Differential Equations with Mathematica, Elsevier Academic Press, 2004.

[2] R.P. Agarwal, D. O'Regan. Ordinary and Partial Differential Equations, Springer Science+Business Media, LLC, 2009.

[3] W.E. Boyce, R.C. DiPrima. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, John Willey and Sons, Inc., 2001.

[4] V. Gedroics. Rindas, Daugavpils Universitāte, 2005.

[5] J.C. Robinson. An Introduction to Ordinary Differential Equations, Cambridge University Press, 2004.

[6] Васильева А.Б., Медведев Г.Н., Тихонов Н.А., Уразгильдина Т.А. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах, Физматлит, 2003.

[7] Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения: Примеры и задачи, Высшая школа, 1989.

[8] Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения, Наука, 1985.

[9] Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление, Наука, 1969.

[10] `http://www.sosmath.com/diffeq/series/series04/series04.html` [tiek skatīts 30.04.2013.]

[11] `http://mathworld.wolfram.com/AiryDifferentialEquation.html` [tiek skatīts 30.04.2013.]