DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE

Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte

Matemātikas katedra

**Aleksandrs Barišņikovs**

# Parasto diferenciālvienādojumu atrisinājumu stabilitāte

Daugavpils, 2014

# SATURS

# 1. Stabilitātes teorijas pamatjēdzieni un definīcijas

Apskatīsim parastu diferenciālvienādojumu normālu sistēmu

$$\frac{dy_i}{dt} = \Phi_i(t, y_1, y_2, ..., y_n), \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{1.1}$$

kur $t \in I \subset \mathbb{R}$, $\Phi_i \in C(I \times \mathbb{R}^n)$. Pieņemsim, ka

$$\varphi(t) = \big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), ..., \varphi_n(t)\big) \tag{1.2}$$

ir sistēmas (1.1) partikulārais atrisinājums, kurš atbilst fiksētiem sākuma nosacījumiem:

$$y_i(t_0) = y_i^0, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{1.3}$$

bet

$$y(t) = \big(y_1(t), y_1(t), ..., y_n(t)\big) \tag{1.4}$$

ir kāds cits sistēmas (1.1) atrisinājums.

**1.1. definīcija.** Diferenciālvienādojumu sistēmas (1.1) atrisinājumu $\varphi(t)$ sauc par **stabilu** jeb stabilu Ļapunova nozīmē, ja katram pēc patikas mazam $\varepsilon > 0$ var atrast tādu $\delta(\varepsilon) > 0$, ka katram sistēmas (1.1) atrisinājumam $y(t)$, kurš sākuma vērtības punktā $t = t_0$ apmierina nevienādību

$$||y_i(t_0) - \varphi_i(t_0)|| < \delta(\varepsilon), \quad i = 1, 2, ..., n,$$

visiem $t \geqslant t_0$ ir spēkā nevienādība

$$||y_i(t) - \varphi_i(t)|| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{1.5}$$

t.i., atrisinājumi, kas ir tuvi pēc sākuma vērtībām, paliek tuvi arī katram $t \geqslant t_0$.

**1.2. definīcija.** Ja pēc patikas mazam $\delta > 0$ kaut vienam no atrisinājumiem $y(t)$ neizpildās nevienādība (1.5), tad atrisinājumu $\varphi(t)$ sauc par **nestabilu**.

**1.3. definīcija.** Ja atrisinājums $\varphi(t)$ ir ne tikai stabils, bet arī apmierina nosacījumu

$$\lim_{t \to \infty} ||y_i(t) - \varphi_i(t)|| = 0, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

tad atrisinājumu $\varphi(t)$ sauc par **asimptotiski stabilu**.

**1.1. piemērs.** *Izpētīt uz stabilitāti Košī problēmas atrisinājumu:*

$$\frac{dy}{dt} = -4y, \qquad y(0) = 3.$$

► Dotā diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$y(t) = Ce^{-4t}, \qquad C \in \mathbb{R},$$

bet partikulārais atrisinājums, kas apmierina doto sākumnosācījumu ir

$$\varphi(t) = 3e^{-4t}.$$

Pierādīsim, ka atrisinājums $\varphi(t)$ ir stabils.

$$|y(t) - \varphi(t)| = |Ce^{-4t} - 3e^{-4t}| = e^{-4t}|C - 3|.$$

Apskatīsim atrisinājumu $y(t)$, kurš sākumpunktā $t = 0$ apmierina nevienādību

$$|y(0) - \varphi(0)| = |C - 3| < \delta.$$

Ja par $\delta$ ņemsim

$$\delta = \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0,$$

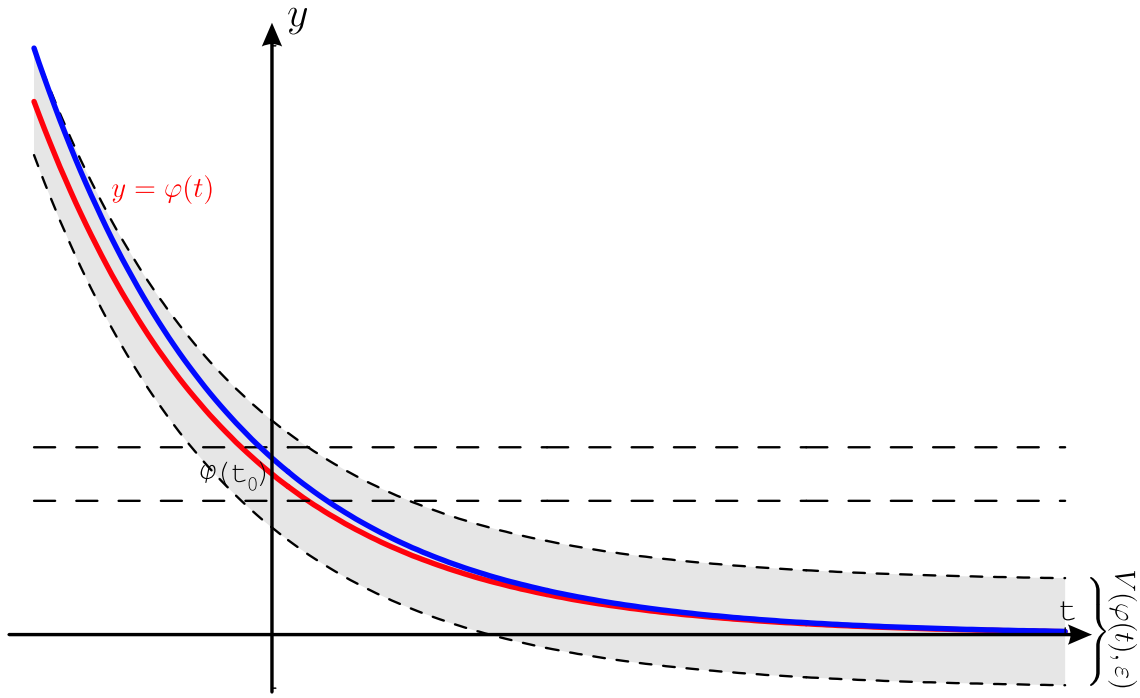
tad

$$|y(t) - \varphi(t)| = e^{-4t}|C - 3| < e^{-4t}\delta = \frac{\delta}{e^{4t}},$$

visiem $t \geqslant 0 e^{4t} \geqslant 1$ un tātad visiem $t \geqslant 0$

$$|y(t) - \varphi(t)| < \frac{\delta}{e^{4t}} \leqslant \delta = \varepsilon.$$

Tādējādi saskaņā ar 1.1. definīciju atrisinājums $\varphi(t)$ ir stabils.
(skat. 1.1. zīm.)◄




**1.1. zīm.** Stabils atrisinājums. Sarkans grafiks: $\varphi = 3e^{-4t}$, zils grafiks: $y = 3.3\, e^{-4t}$.

**1.2. piemērs.** *Izpētīt uz stabilitāti Košī problēmas atrisinājumu:*

$$\frac{dy}{dt} = 2t(1-y), \qquad y(0) = 2.$$

► Dotā diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$y(t) = 1 + Ce^{-t^2}, \qquad C \in \mathbb{R},$$

bet partikulārais atrisinājums, kas apmierina sākumnosācījumu ir

$$\varphi(t) = 1 + e^{-t^2}.$$

Pierādīsim, ka atrisinājums $\varphi(t)$ ir stabils.

$$|y(t) - \varphi(t)| = |(1 + Ce^{-t^2}) - (1 + e^{-t^2})| = e^{-t^2}|C-1|. \tag{1.6}$$

Apskatīsim atrisinājumu $y(t)$, kurš sākumpunktā $t = 0$ apmierina nevienādību

$$|y(0) - \varphi(0)| = |1 + C - 2| = |C-1| < \delta. \tag{1.7}$$

Katram $t \geqslant 0$

$$e^{t^2} \geqslant e^0, \qquad e^{-t^2} \leqslant 1. \tag{1.8}$$

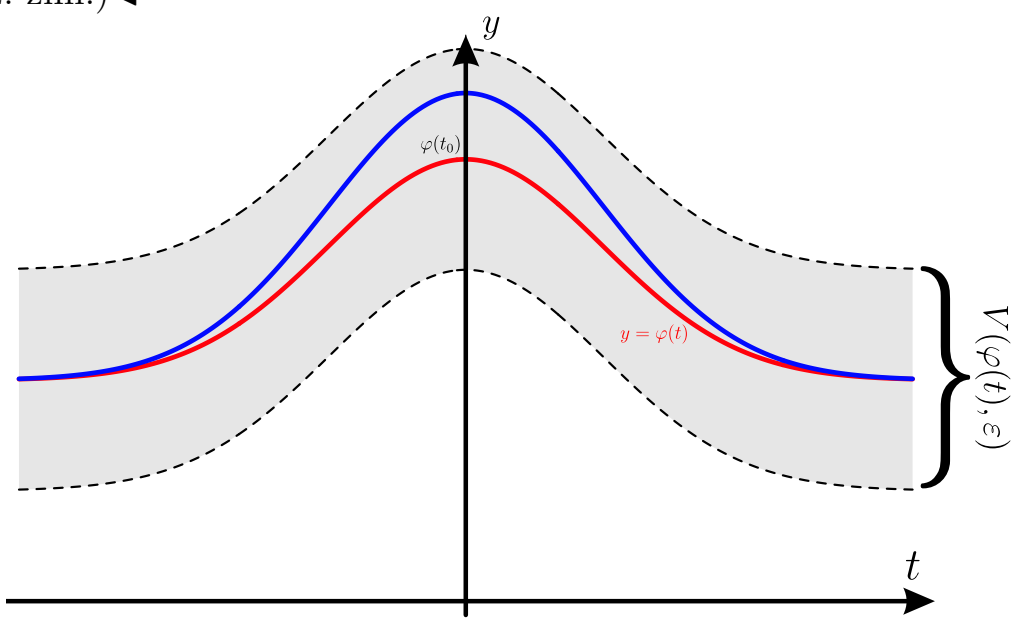
Ja pieņemt $\delta = \varepsilon$, tad no (1.6) – (1.8) izriet ka

$$|y(t) - \varphi(t)| = e^{-t^2}|C-1| \leqslant |C-1| < \delta = \varepsilon.$$

Tātad saskaņā ar 1.1. definīciju atrisinājums $\varphi(t)$ ir stabils. Atrisinājums ir arī asimptotiski stabils, jo

$$\lim_{t\to+\infty} |y(t) - \varphi(t)| \leqslant \lim_{t\to+\infty} \delta e^{-t^2} = 0$$

(skat. 1.2. zīm.)◀




**1.2. zīm.** Asimptotiski stabils atrisinājums. Sarkans grafiks: $\varphi = 1 + e^{-t^2}$, zils grafiks: $y = 1 + 1.3e^{-t^2}$.

**1.3. piemērs.** *Izpētīt uz stabilitāti Košī problēmas atrisinājumu:*

$$\frac{dy}{dt} = a^2 y, \qquad a \neq 0, \qquad y(t_0) = y_0.$$

► Dotā diferenciālvienādojuma vispārīgais atrisinājums ir

$$y(t) = Ce^{a^2 t}, \qquad C \in \mathbb{R},$$

bet partikulārais atrisinājums, kas apmierina sākumnosācījumu ir

$$\varphi(t) = y_0 e^{a^2(t-t_0)}.$$

Pierādīsim, ka atrisinājums $\varphi(t)$ ir nestabils. Apskatīsim visus atrisinājumus $y(t)$, kas apmierina nevienādību

$$|y(t_0) - \varphi(t_0)| = |Ce^{a^2 t_0} - y_0| < \delta.$$

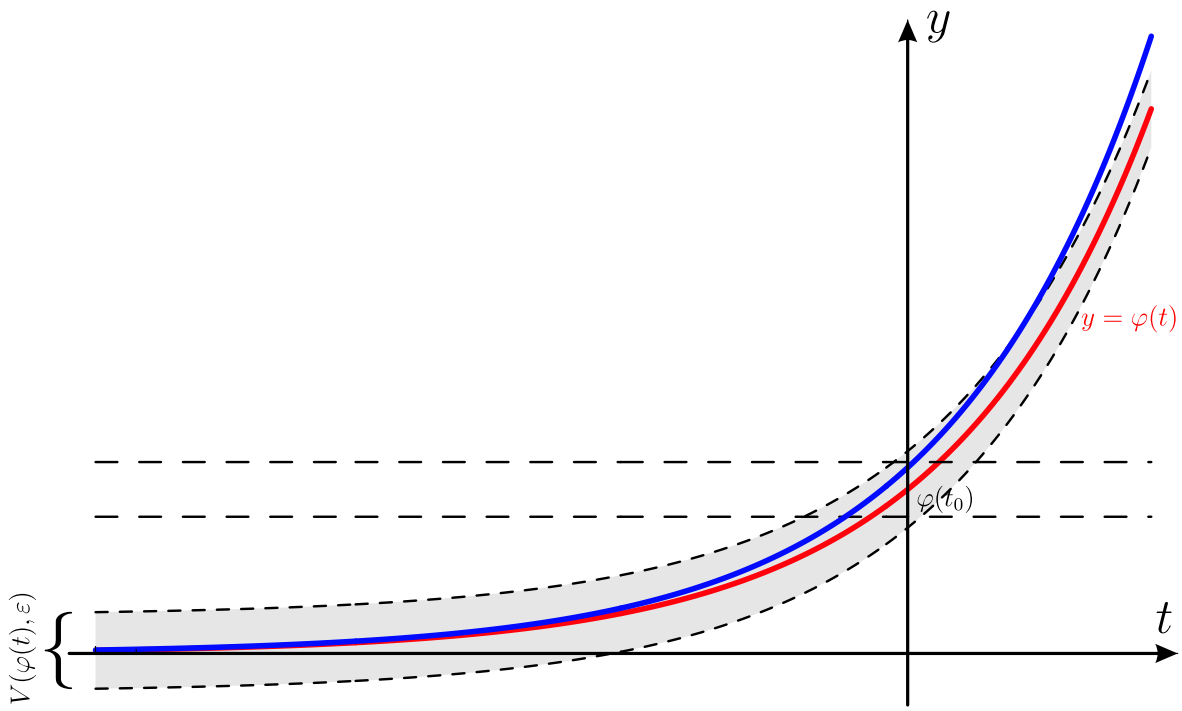
Visiem $t \geqslant t_0$

$$|y(t) - \varphi(t)| = |Ce^{a^2 t} - y_0 e^{a^2(t-t_0)}| = e^{a^2(t-t_0)}|Ce^{a^2 t_0} - y_0|,$$

bet

$$\lim_{t \to +\infty} e^{a^2(t-t_0)}|Ce^{a^2 t_0} - y_0| = +\infty.$$

Tātad atrisinājums $\varphi(t)$ ir nestabils.
(skat. 1.3. zīm.)◄




**1.3. zīm.** Nestabils atrisinājums. Sarkans grafiks: $\varphi = 3e^{4t}$, zils grafiks: $y = 3.4e^{4t}$.

**1.1. piezīme.** Jautājumu par sistēmas (1.1) kāda atrisinājuma $y = \varphi(t)$ stabilitāti var pārveidot par triviāla atrisinājuma $x(t) \equiv 0$ stabilitātes pētīšanu citai diferenciālvienādojumu sistēmai, kuru var iegūt no (1.1) ar mainīgo aizvietošanu $y =$
$= x + \varphi(t)$. Tāpēc ir tik svarīgi prast pētīt uz stabilitāti sistēmas triviālo atrisinājumu.

**1.4. piemērs.** *Izpētīt uz stabilitāti diferenciālvienādojumu sistēmas*

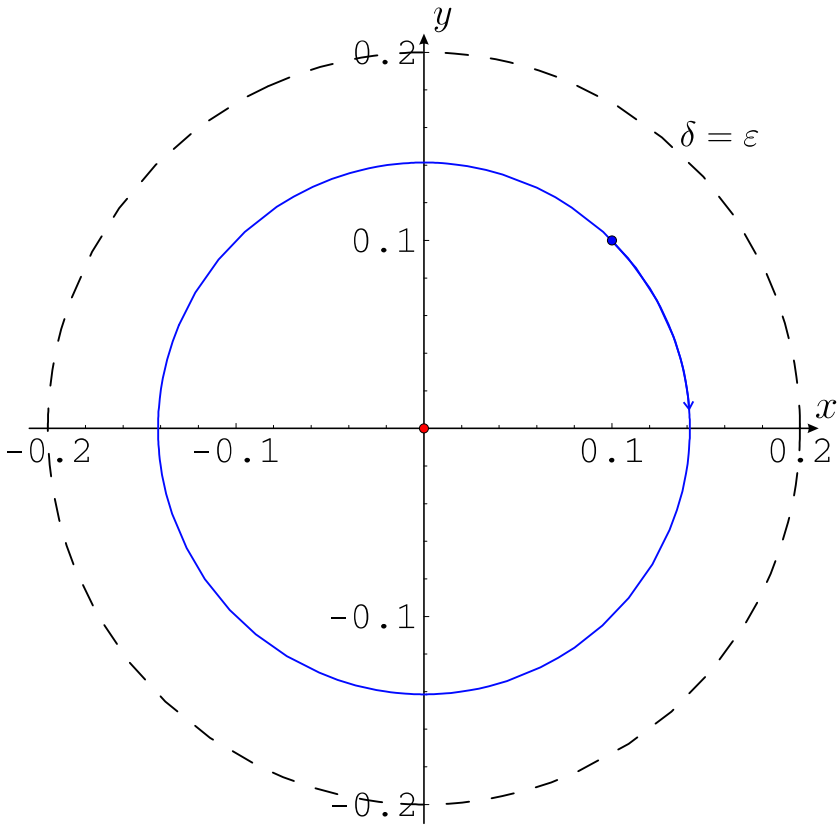
$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x \end{cases} \tag{1.9}$$

*triviālo atrisinājumu* $x = 0, y = 0$.

► Sistēmas vispārīgais atrisinājums ir

$$\begin{cases} x = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \\ y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t, \end{cases} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Apskatīsim sistēmas atrisinājumu $\big(x(t), y(t)\big)$ laika momentā $t = 0$, kurš maz atšķiras no triviālā atrisinājuma, piemēram, ja $C_1 = 0.1, C_2 = 0.1$ un apskatīsim triviālā atrisinājuma apkārtni ar rādiusu $\varepsilon = \delta = 0.2$.




**1.4. zīm.** Stabils atrisinājums. Zila līkne ir (1.9) sistēmas atrisinājuma, kas sākas punktā $x_0 = 0.1, y_0 = 0.1$, fāzes portrets, sarkans punkts ir triviālais atrisinājums.

Redzam, ka atrisinājuma $\big(x(t), y(t)\big)$ fāzes portrets neiziet ārpus apkārtnes ar rādiusu $\delta = \varepsilon$. Tātad saskaņā ar 1.1. definīciju sistēmas (1.9) triviālais atrisinājums ir stabils.◄

**1.5. piemērs.** *Izpētīt uz stabilitāti diferenciālvienādojumu sistēmas*

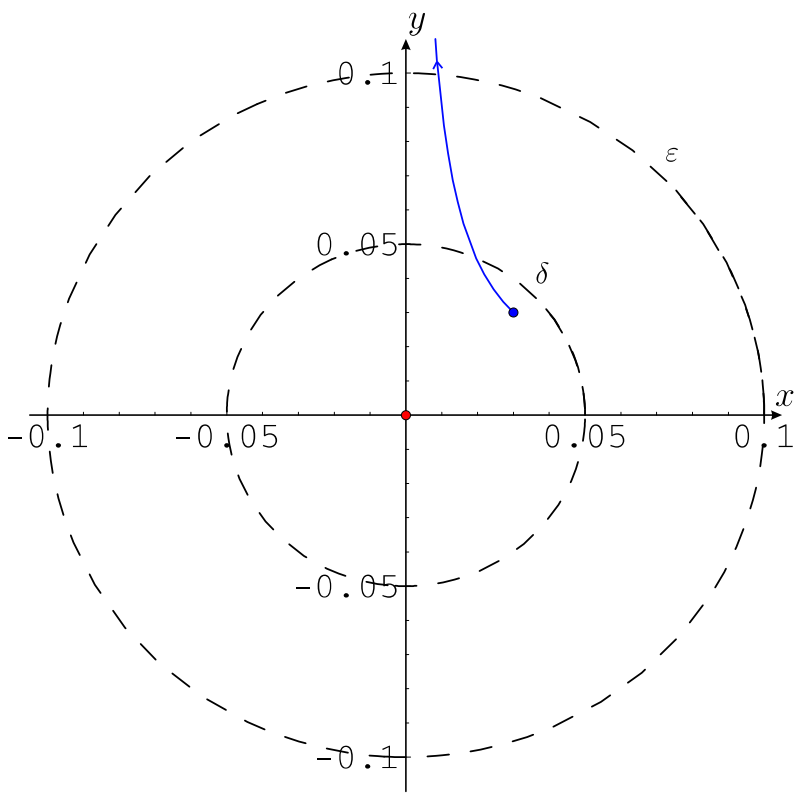
$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = y \end{cases} \tag{1.10}$$

*triviālo atrisinājumu* $x = 0, y = 0$.

► Sistēmas vispārīgais atrisinājums ir

$$\begin{cases} x = C_1 e^{-t}, \\ y = C_2 e^{t}, \end{cases} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Apskatīsim sistēmas atrisinājumu $\big(x(t), y(t)\big)$ laika momentā $t = 0$, kurš maz atšķiras no triviālā atrisinājuma, piemēram, ja $C_1 = 0.03, C_2 = 0.03$ un apskatīsim apkārtnes ar rādiusiem $\varepsilon = 0.1$, $\delta = 0.05$.




**1.5. zīm.** Nestabils atrisinājums. Zila līkne ir (1.10) sistēmas atrisinājuma, kas sākas punktā $x_0 = 0.03, y_0 = 0.03$, fāzes portrets, sarkans punkts ir triviālais atrisinājums.

Ir redzams, ka atrisinājuma $\big(x(t), y(t)\big)$ fāzes portrets iziet ārpus apkārtnes ar rādiusu $\varepsilon$ un lai kādu mazu $\delta$ neņemt, vienalga atrisinājums izies no apkārtnes ar rādiusu $\varepsilon$. Tātad saskaņā ar 1.2. definīciju sistēmas (1.10) triviālais atrisinājums ir nestabils.◄

**1.6. piemērs.** *Izpētīt uz stabilitāti diferenciālvienādojumu sistēmas*

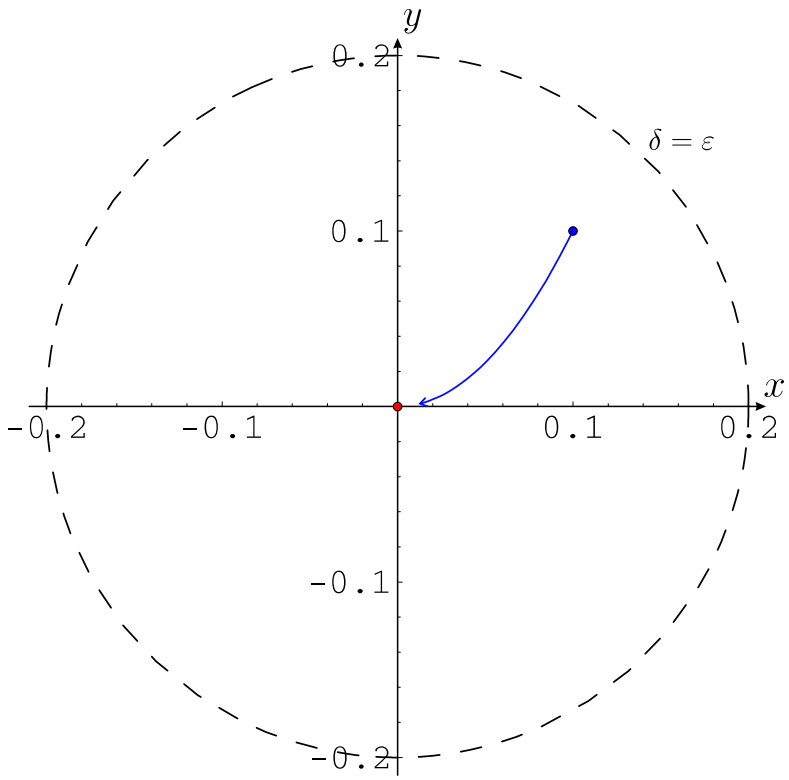
$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = -2y, \end{cases} \tag{1.11}$$

*triviālo atrisinājumu* $x = 0, y = 0$.

► Sistēmas vispārīgais atrisinājums ir

$$\begin{cases} x = C_1 e^{-t}, \\ y = C_2 e^{-2t}, \end{cases} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Apskatīsim sistēmas atrisinājumu $\big(x(t), y(t)\big)$ laika momentā $t = 0$, kurš maz atšķiras no triviālā atrisinājuma, piemēram, ja $C_1 = 0.1, C_2 = 0.1$ un apskatīsim triviālā atrisinājuma apkārtni ar radiusu $\varepsilon = \delta = 0.2$.




**1.6. zīm.** Asimptotiski stabils atrisinājums. Zila līkne ir (1.11) sistēmas atrisinājuma, kas sākas punktā $x_0 = 0.1, y_0 = 0.1$, fāzes portrets, sarkans punkts ir triviālais atrisinājums.

Atrisinājuma $\big(x(t), y(t)\big)$ fāzes portrets neiziet ārpus apkārtnes ar rādiusu $\varepsilon = \delta$, pie tam tas tiecas pie triviālā atrisinājuma fāzes portreta. Tātad saskaņā ar 1.3. definīciju sistēmas (1.11) triviālais atrisinājums ir asimptotiski stabils.◄

# 2. Lineāras diferenciālvienādojumu sistēmas

## 2.1. Lineāru diferenciālvienādojumu sistēmu triviālā atrisinājuma stabilitāte

**2.1. piemērs.** *Izpētīt uz stabilitāti Košī problēmas atrisinājumu:*

$$\frac{dy}{dt} = t, \qquad y(t_0) = y_0.$$

► Atdalot mainīgos dotajā diferenciālvienādojuma, integrēsim abas puses

$$\int dy = \int t dt,$$

tad

$$y = \frac{t^2}{2} + C, \qquad C \in \mathbb{R},$$

un saskaņā ar sākumnosācījumu

$$y_0 = \frac{t_0^2}{2} + C,$$

$$C = y_0 - \frac{t_0^2}{2}.$$

Tātad dotās Košī problēmas atrisinājums ir

$$y = \frac{t^2}{2} - \frac{t_0^2}{2} + y_0,$$

kas ir stabils, bet nav ierobežots.◄

Bet, ja apskatīt diferencīalvienādojumu sistēmu

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)x_j \ (i = 1, 2, ..., n), \tag{2.1}$$

tad šīs sistēmas atrisinājumu stabilitāte un ierobežotība ir tieši saistītas un ir spēkā šāda teorēma,

**2.1. teorēma.** [1] Lineāras diferenciālvienādojumu sistēmas (2.1) visi atrisinājumi ir stabili tad un tikai tad, kad tie ir ierobežoti.

Ja izpētīt uz stabilitāti lineāru autonomu diferenciālvienādojumu sistēmu

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ (i = 1, 2, ..., n), a_{i,j} \in \mathbb{R}, \tag{2.2}$$

tad var secināt, ka triviālā atrisinājuma $x \equiv 0$ stabilitāte ir atkarīga no atbilstošā raksturvienādojuma saknēm.

**2.2. teorēma.** [1] Ja lineāras diferenciālvienādojumu sistēmas atbilstošā raksturvienādojuma visu sakņu reālas daļas ir negatīvas, tad šīs sistēmas triviālais atrisinājums ir asimptotiski stabils.

**2.3. teorēma.** [1] Ja lineāras diferenciālvienādojumu sistēmas atbilstošā raksturvienādojuma vairākkārtīgo sakņu reālas daļas ir negatīvas, un vienkāršo sakņu reālas daļas ir nepozitīvas, tad šīs sistēmas triviālais atrisinājums ir stabils.

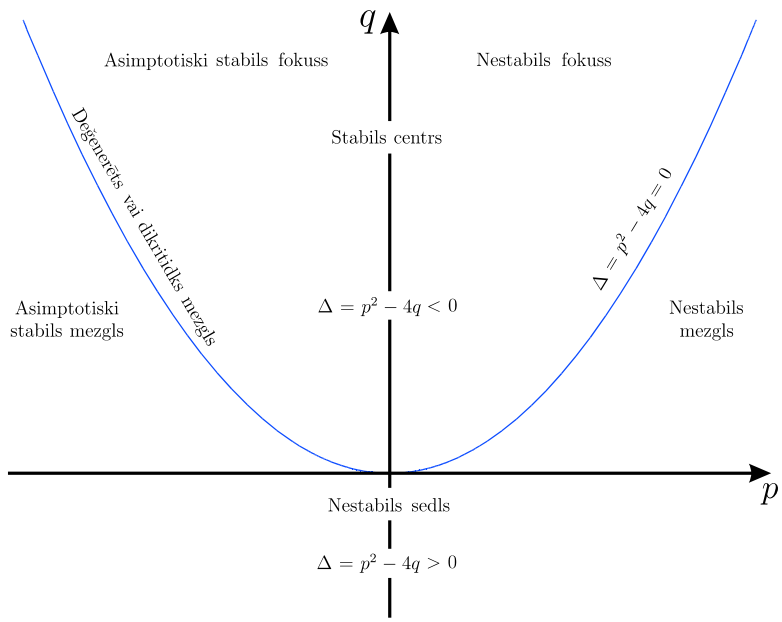
**2.4. teorēma.** [1] Ja lineāras diferenciālvienādojumu sistēmas atbilstošā raksturvienādojuma kaut vienas saknes reāla daļa ir pozitīva, tad šīs sistēmas triviālais atrisinājums ir nestabils.

Ja lineāra diferenciālvienādojumu sistēma (2.2) ir otras kārtas sistēma ar raksturvienādojumu vaidā $r^2 + pr + q = 0$, tad ir spēkā 2.5. teorēma.

**2.5. teorēma.** [1] Ja lineāras diferenciālvienādojumu sistēmas (2.2) raksturvienādojuma $r^2 + pr + q = 0$ saknes ir $\lambda_1$ un $\lambda_2$, tad atrisinājuma traektorija, kas ir tuvs triviālajam atrisinājumam, ir šāda tipa:

- stabils mezgls, ja $\lambda_1$ un $\lambda_2$ ir reālas, dažādas un negatīvas;
- nestabils mezgls, ja $\lambda_1$ un $\lambda_2$ ir reālas, dažādas un pozitīvas;
- sedla punkts, ja $\lambda_1$ un $\lambda_2$ ir reālas un ar dažādām zīmēm;
- stabils deģenerēts mezgls, ja $\lambda_1$ un $\lambda_2$ ir reālas, vienādas un negatīvas;
- nestabils deģenerēts mezgls, ja $\lambda_1$ un $\lambda_2$ ir reālas, vienādas un pozitīvas;
- centrs, ja $\lambda_1$ un $\lambda_2$ ir tīri imagināri skaitļi;
- stabils fokuss, ja $\lambda_1$ un $\lambda_2$ ir kompleksi saistītie skaitļi ar negatīvām reālām daļām;
- nestabils fokuss, ja $\lambda_1$ un $\lambda_2$ ir kompleksi saistītie skaitļi ar pozitīvām reālām daļām.

Varam attēlot punktu klasifikāciju uz plaknes $Opq$, kur $p^2 - 4q$ ir apskatāmas sistēmas raksturvienādojuma diskriminants.




**2.1. zīm.** Lineāras diferenciālvienādojumu sistēmas (2.2) stacionāru punktu klasifikācija.

## 2.2. Rausa-Gurvica kriterijs

Pētot uz stabilitāti diferenciālvienādojumu sistēmu (2.1), var uzzināt vai sistēmas triviālais atrisinājums būs stabils vai nē, neizskaitļojot tā raksturvienādojuma saknes.

**2.6. teorēma.** Vienādojumam

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

visu sakņu reālas daļas ir negatīvas tad un tikai tad, kad visi Gurvica matricas

$$\begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$$

galvenas diagonāles minori ir pozitīvi, t.i.,

$$\Delta_1 = a_1 > 0, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \ \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \ \dots,$$

$\Delta_n = a_n\Delta_{n-1} > 0.$

**2.2. piemērs.** *Ar kādām parametru a un b vērtībām diferenciālvienādojuma*

$$y''' + ay'' + 2y' + by = 0 \tag{2.3}$$

*triviālais atrisinājums ir stabils.*

► Šī diferenciālvienādojuma raksturvienādojums ir

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + 2\lambda + b = 0, \tag{2.4}$$

un Gurvica matrica ir

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 2 & a \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

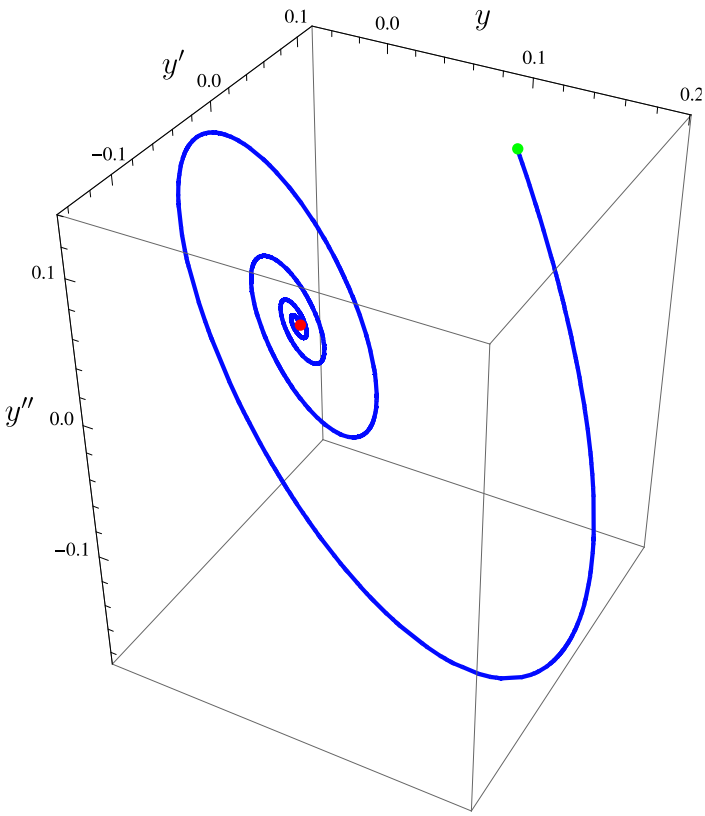
Tagad sastādīsim galvenas diagonāles minorus

$$\Delta_1 = a > 0, \ \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{vmatrix} = 2a - b > 0, \ \ \Delta_3 = b \cdot \Delta_2 = b(2a - b) > 0,$$

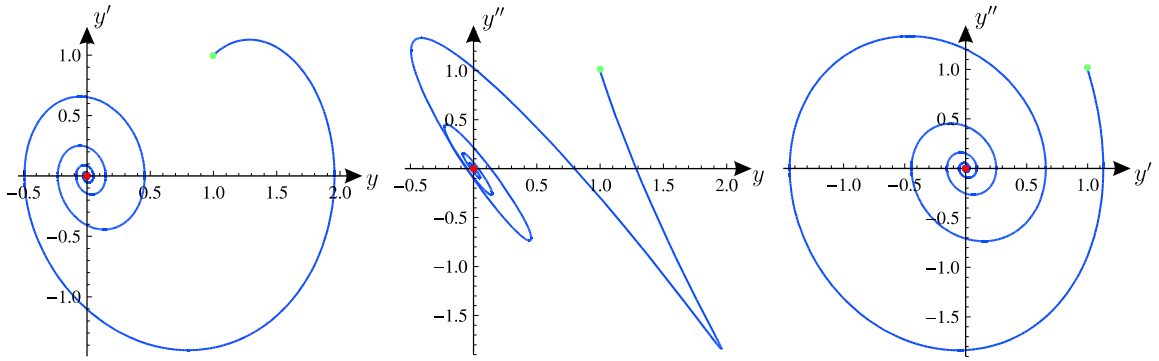
no tā secinām, ja

$$\begin{cases} a > 0, \\ b > 0, \\ 2a - b > 0, \end{cases}$$

tad saskaņā ar 2.6. teorēmu raksturvienādojuma (2.4) saknes reālās daļas būs negatīvas, tātād saskaņā ar 2.2. teorēmu diferenciālvienādojuma (2.3) triviālais atrisinājums būs asimtotiski stabils.
(skat. 2.2. zīm.)◀




**2.2. zīm.** Diferenciālvienādojuma (2.3) pie $a = b = 1$ atrisinājuma, kurš apmierina sākumnosācījumu $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.1$, trajektorija (zila līkne). Sarkans punkts attēlo diferenciālvienādojuma (2.3) triviālo atrisinājumu.




**2.3. zīm.** Diferenciālvienādojuma (2.3) pie $a = b = 1$ atrisinājuma, kurš apmierina sākumnosacījumu $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.1$, trajektorijas projekcijas.

# 3. Nelineāras diferenciālvienādojumu sistēmas

## 3.1. Stabilitāte pirmajā tuvinājumā

$$\frac{dx_i}{dt} = \Phi_i(t, x_1, x_2, ..., x_n) \ (i = 1, 2, ..., n), \tag{3.1}$$

Pieņemsim, ka diferenciālvienādojumu sistēmaj (3.1) ir *stacionārais punkts*[1] $x_i \equiv 0$. Pētot to uz stabilitāti bieži pielieto šādu metodi: izmantojot funkcijas $\Phi_i$ diferencējamību, atsevišķos gadījumos sistēmu (3.1) koordinātu sākumpunkta apkārtnē var izteikt veidā

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + h_i(t, x_1, x_2, ..., x_n) \ (i = 1, 2, ..., n), \tag{3.2}$$

kur funkcijām $h_i$ ir spēkā

$$\lim_{x_1, x_2, ..., x_n \to 0} \frac{h_i(t, x_1, x_2, ..., x_n)}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}} = 0 \ (i = 1, 2, ..., n) \tag{3.3}$$

un sistēmas (3.2) vietā pēta uz stabilitāti lineāru sistēmu ar konstantiem koeficientiem

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ (i = 1, 2, ..., n), \tag{3.4}$$

kuru sauc par dotās sistēmas (3.2) *pirmā tuvinājuma sistēmu.*

### 3.1.1. Pirmais paņēmiens

**3.1. teorēma.** [4] Ja diferenciālvienādojumu sistēmā (3.2) funkcijas $h_i$ apmierina nosacījumu (3.3) un raksturvienādojuma

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{3.5}$$

[1] Par sistēmas

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, ..., x_n) \ (i = 1, 2, ..., n)$$

stacionāru punktu sauc tādu punktu $(x_1, x_2, ..., x_n)$, kas apmierina vienādojumu sistēmu

$$f_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \ (i = 1, 2, ..., n).$$

visu sakņu reālās daļas ir negatīvas, tad sistēmas (3.2), kā arī pirmā tuvinājuma sistēmas (3.4) triviālie atrisinājumi ir **asimptotiski stabili**, tāpēc šajā gadījumā ir iespējāma pētīšana uz stabilitāti pirmajā tuvinājumā.

**3.2. teorēma.** [4] Ja diferenciālvienādojumu sistēmā (3.2) visas finkcijas $h_i$ apmierina 3.1. teorēmas nosacījumus un vismaz vienas rakturvienādojuma (3.5) saknes reālā daļa ir pozitīva, tad sistēmas (3.2), kā arī pirmā tuvinājuma sistēmas (3.4) triviālie atrisinājumi ir **nestabili**, tāpēc šajā gadījumā ir iespējāma pētīšana uz stabilitāti pirmajā tuvinājumā.

Pastāv šāds šī paņēmiena pielietojuma ierobežojums: ja raksturvienādojuma visu sakņu reālās daļas ir nepozitīvas, pie tam vismaz vienas saknes reālā daļa vienāda ar nulli, tad pētīšana uz sabilitāti ar pirmā tuvinājuma metodi nav iespējama.

Gadījumā, ja sistēma (3.2) ir otrās kārtas sistēma, tad stacionāra punkta stabilitāti un tipu nosāka atbilstošas pirmā tuvinājuma lineāras sistēmas stacionāra punkta raksturs.

**3.3. teorēma.** [1] Pieņemsim, ka pirmā tuvinājuma sistēmas (3.4) (ja $n = 2$) raksturvienādojuma saknes ir $\lambda_1$ un $\lambda_2$.

- Nelineārās sistēmas (3.2) (ja $n = 2$) stacionāram punktam ir tas pats tips, kāds ir lineārai sistēmai (3.4), ja
  1. $\lambda_1 \neq \lambda_2$ un stacionārs punkts ir mezgls;
  2. stacionārs punkts ir sedls;
  3. $\lambda_1 = \lambda_2$ un stacionārs punkts nav dikritisks mezgls;
  4. stacionārs punkts ir fokuss.
- Nelineārās sistēmas (3.2) (ja $n = 2$) stacionāram punktam ne obligāti ir tas pats tips, kāds ir lineārai sistēmai (3.4):
  1. ja $\lambda_1 = \lambda_2$ un stacionārs punkts ir lineāras sistēmas (3.4) dikritisks mezgls, tad nelineārai sistēmai (3.2) stacionārs punkts būs mezgls vai fokuss.
  2. ja stacionārs punkts ir lineāras sistēmas (3.4) centrs, tad nelineārai sistēmai (3.2) stacionārs punkts būs centrs vai fokuss.

**3.1. piemērs.** *Izpētīt uz stabilitāti divu nelineāru diferenciālvienādojumu sistēmu*

$$\begin{cases} x' = -2y - x^2, \\ y' = 2x, \end{cases} \tag{3.6}$$

*un*

$$\begin{cases} x' = -2y - x^3, \\ y' = 2x, \end{cases} \tag{3.7}$$

*stacionārus punktus.*

► Abām sistēmām eksistē vienīgais stacionārais punkts $x = 0$, $y = 0$. Šo sistēmu nelineāras daļas attiecīgi ir $h_1(x, y) = -x^2$, $h_2(x, y) = 0$ un $h_1^*(x, y) = -x^3$, $h_2^*(x, y) = 0$. Tā kā

$$\lim_{x,y\to 0} \frac{h_1(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{x,y\to 0} \frac{-x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

$$\lim_{x,y\to 0} \frac{h_1^*(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{x,y\to 0} \frac{-x^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

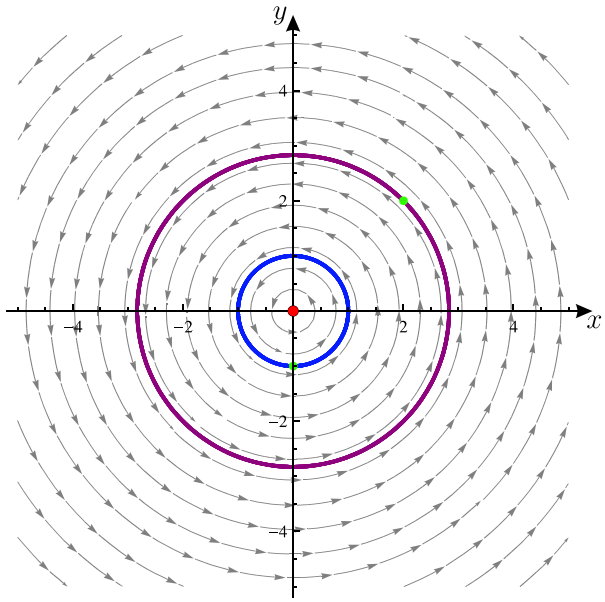
tad abām sistēmām atbilst viena un tā pati pirmā tuvinājuma sistēma

$$\begin{cases} x' = -2y, \\ y' = 2x \end{cases} \tag{3.8}$$

ar sekojošo raksturvienādojumu

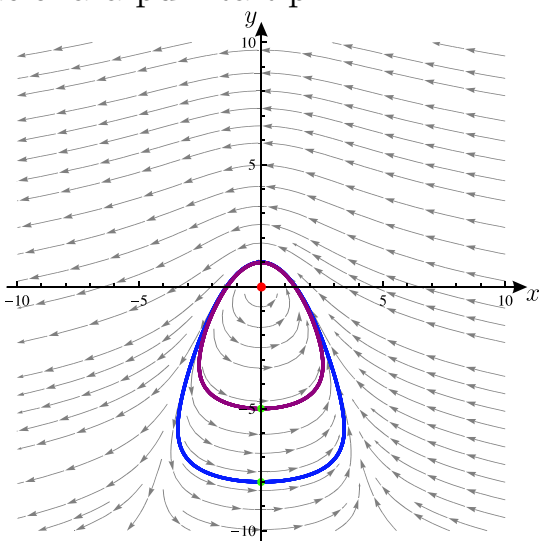
$$\begin{vmatrix} -\lambda & -2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0,$$

tā saknes $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ ir tīri imagināras, tad saskaņā ar 2.5. teorēmu pirmā tuvinājuma sistēmas (3.8) stacionāra punkta tips ir centrs.

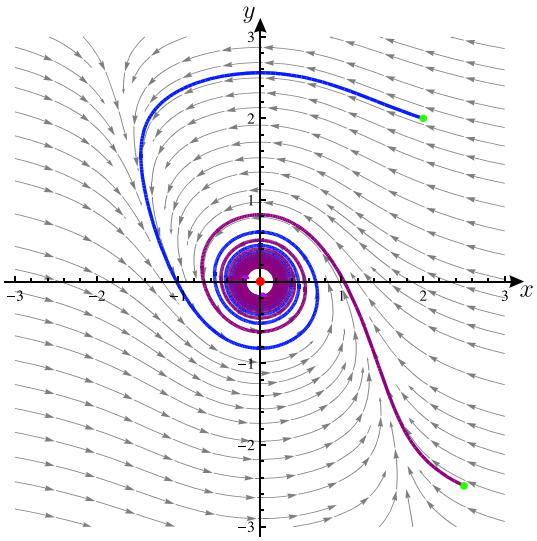



**3.1. zīm.** Sistēmas (3.8) atrisinājumu fāzes portreti stacionāra punkta $x = 0$, $y = 0$ apkārtnē.

Bet saskaņā ar 3.3. teorēmu sistēmām (3.6) un (3.7) var būt dažādi stacionāra punkta tipi.




**3.2. zīm.** Sistēmas (3.6) fāzes portreti.




**3.3. zīm.** Sistēmas (3.7) fāzes portreti.

3.2. un 3.3. zīmējumi apliecina, ka sistēmai (3.6) stacionāra punkta tips ir centrs, bet sistēmai (3.7) stacionāra punkta tips ir fokuss.◀

**3.2. piemērs.** *Izpētīt uz stabilitāti nelineāras diferenciālvienādojumu sistēmas*

$$\begin{cases} x' = x(2y - x + 5), \\ y' = x^2 + y^2 - 6x - 8y. \end{cases} \tag{3.9}$$

*stacionārus punktus.*

► Sistēmai

$$\begin{cases} x(2y - x + 5) = 0, \\ x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0 \end{cases}$$

ir četri atrisinājumi, tātad sistēmai (3.9) ir četri stacionāri punkti $(0,0), (0,8), (3,-1), (7,1$

1) Pirmais stacionārs punkts $(0,0)$. Sistēmu (3.9) pārrakstām

$$\begin{cases} x' = 5x + 2xy - x^2, \\ y' = -6x - 8y + x^2 + y^2. \end{cases} \tag{3.10}$$

Nelineāras daļas ir $h_1(x,y) = 2xy - x^2$ un $h_2(x,y) = x^2 + y^2$,

$$\lim_{x,y\to 0} \frac{h_1(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x,y\to 0} \frac{2xy - x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

$$\lim_{x,y\to 0} \frac{h_2(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x,y\to 0} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

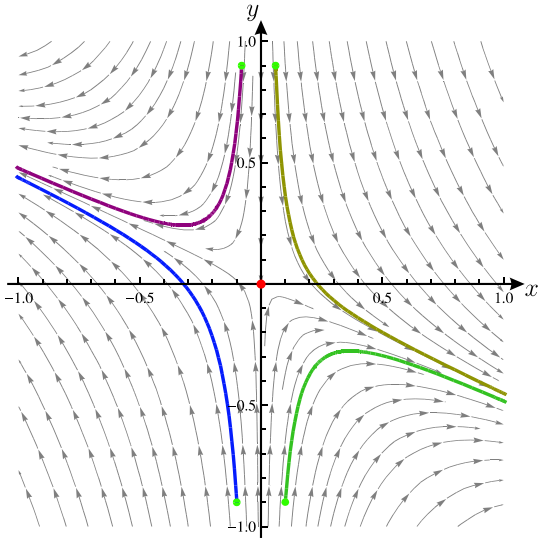
tad sistēmu (3.10) var aizvietot ar atbilstošo pirmā tuvinājuma sistēmu

$$\begin{cases} x' = 5x, \\ y' = -6x - 8y. \end{cases} \tag{3.11}$$

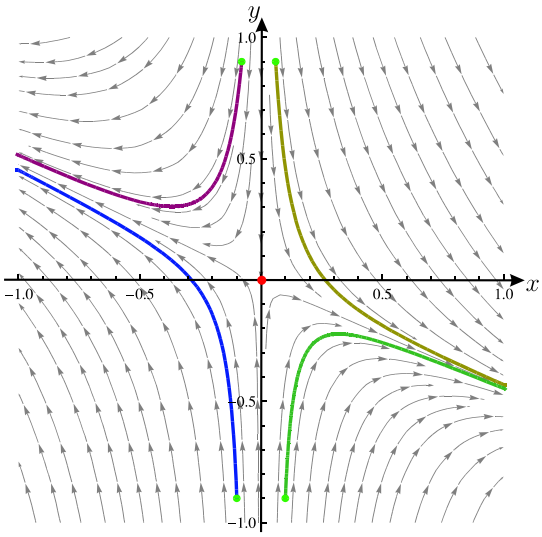
Šīs sistēmas raksturvienādojums ir

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 0 \\ -6 & -8-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 5)(\lambda + 8) = 0,$$

tā saknes $\lambda_1 = 5$ un $\lambda_2 = -8$ ir reālas ar dažādām zīmēm, kas nozīme, ka stacionāra punkta tips ir sedls.




**3.4. zīm.** Sistēmas (3.11) fāzes portreti.




**3.5. zīm.** Sistēmas (3.9) fāzes portreti
punkta $(0,0)$ apkārtnē.

**3.1. piezīme.** Ja $(\bar{x},\bar{y})$ ir sistēmas (3.9) stacionārs punkts, tad izmantojot substitūciju $u = x - \bar{x}, v = y - \bar{y}$, var pārveidot sistēmu (3.9) ekvivalentā sistēmā ar vienīgu stacionāro punktu $(0,0)$, un tad pētīt iegūto sistēmu, pie tam stacionāru punktu tips abām sistēmām būs vienāds.

2) Otrais stacionārs punkts $(0,8)$. Izmantosim šādu substitūciju $u = x$ un $v = y - 8$, tad $y = v + 8$, dabūsim

$$\begin{cases} u' = 21u + 2uv - u^2, \\ v' = 8v - 6u + u^2 + v^2. \end{cases} \tag{3.12}$$

Nelineāras daļas ir $h_1(u,v) = 2uv - u^2$ un $h_2(u,v) = u^2 + v^2$, kas apmierina nosacījumu (3.3), tātad aizvietojam sistēmu (3.12) ar atbilstošo pirmā tuvinājuma sistēmu

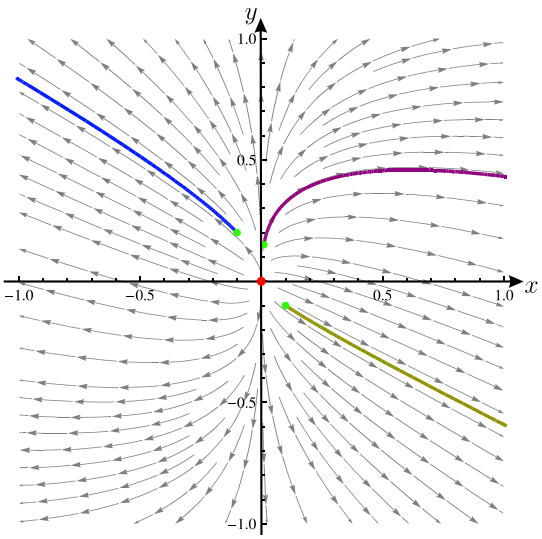
$$\begin{cases} u' = 21u, \\ v' = -6u + 8v. \end{cases} \tag{3.13}$$

Sistēmas (3.13) raksturvienādojums ir

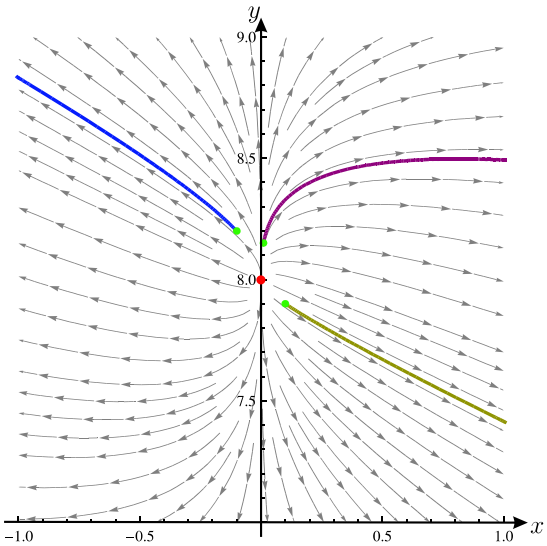
$$\begin{vmatrix} 21-\lambda & 0 \\ -6 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (21-\lambda)(8-\lambda) = 0,$$

tā saknes $\lambda_1 = 8$ un $\lambda_2 = 21$ ir reālas, dažādas un pozitīvas, tas nozīmē, ka stacionāra punkta tips ir nestabils mezgls. Tātad sistēmas (3.9) stacionārs

punkts $(0, 8)$ ir nestabils.




**3.6. zīm.** Sistēmas (3.13) fāzes portreti.




**3.7. zīm.** Sistēmas (3.9) fāzes portreti
punkta $(0, 8)$ apkārtnē.

3) Trešais stacionārs punkts $(3, -1)$. Izmantosim šādu substitūciju $u = x - 3$ un $v = y + 1$, tad $x = u + 3$, $y = v - 1$, dabūsim

$$\begin{cases} u' = 6v - 3u + 2uv - u^2, \\ v' = -10v + u^2 + v^2. \end{cases} \tag{3.14}$$

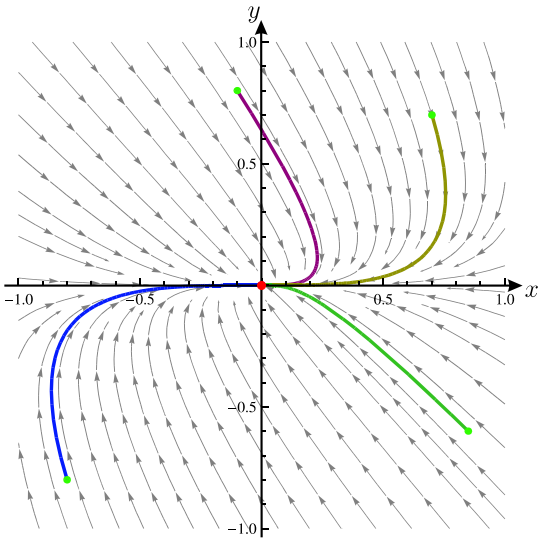
Nelineāras daļas ir $h_1(u, v) = 2uv - u^2$ un $h_2(u, v) = u^2 + v^2$, kas apmierina nosacījumu (3.3), tātad aizvietojam sistēmu (3.14) ar atbilstošo pirmā tuvinājuma sistēmu

$$\begin{cases} u' = -3u + 6v, \\ v' = -10v. \end{cases} \tag{3.15}$$

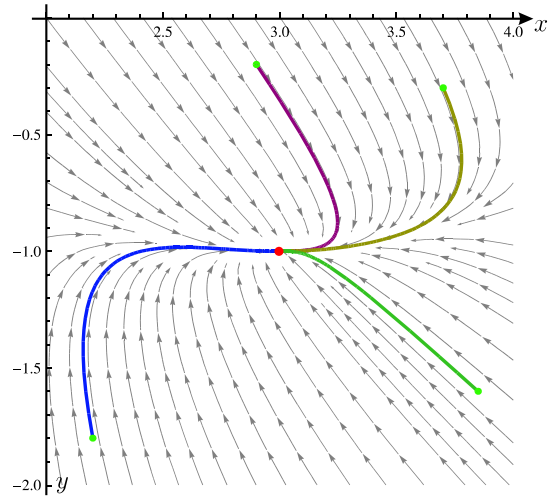
Sistēmas raksturvienādojums ir

$$\begin{vmatrix} -3 - \lambda & 6 \\ 0 & -10 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 3)(\lambda + 10) = 0,$$

tā saknes $\lambda_1 = -3$ un $\lambda_2 = -10$ ir reālas, dažādas un negatīvas, tas nozīmē, ka stacionāra punkta tips ir stabils mezgls. Tātad sistēmas (3.9) stacionārs punkts $(3, -1)$ ir stabils.




**3.8. zīm.** Sistēmas (3.15) fāzes portreti.




**3.9. zīm.** Sistēmas (3.9) fāzes portreti
punkta $(3, -1)$ apkārtnē.

4) Ceturtais stacionārs punkts $(7, 1)$. Izmantosim šādu substitūciju $u = x - 7$ un $v = y - 1$, tad $x = u + 7$, $y = v + 1$, dabūsim

$$\begin{cases} u' = -7u + 14v + 2uv - u^2, \\ v' = 8u - 6v + u^2 + v^2. \end{cases} \tag{3.16}$$

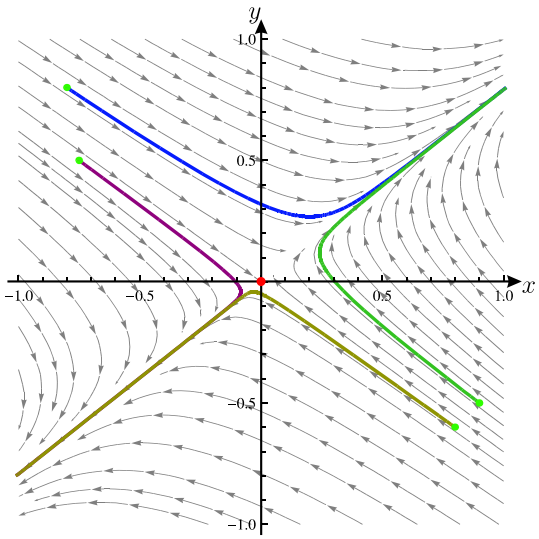
Nelineāras daļas arī ir $h_1(u, v) = 2uv - u^2$ un $h_2(u, v) = u^2 + v^2$, kas apmierina nosacījumu (3.3), tātad aizvietojam sistēmu (3.16) ar atbilstošo pirmā tuvinājuma sistēmu

$$\begin{cases} u' = -7u + 14v, \\ v' = 8u - 6v. \end{cases} \tag{3.17}$$

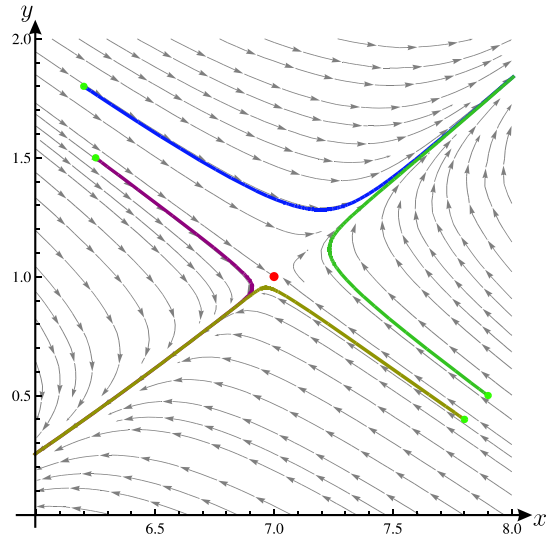
Sistēmas raksturvienādojums ir

$$\begin{vmatrix} -7 - \lambda & 14 \\ 8 & -6 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 7)(\lambda + 6) - 112 = \lambda^2 + 13\lambda - 70 = 0,$$

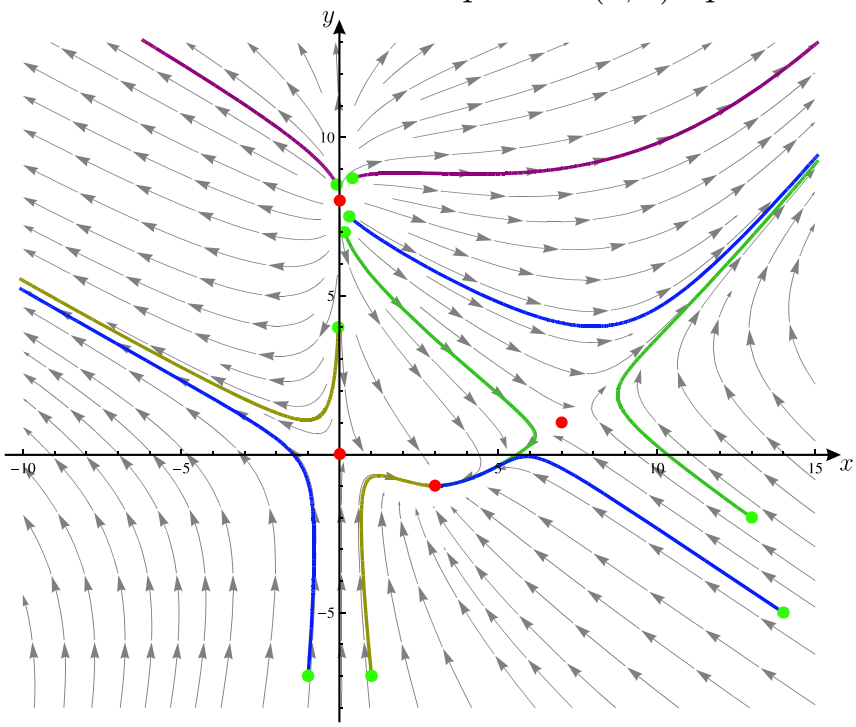
tā saknes $\lambda_1 = \dfrac{-13 + \sqrt{449}}{2}$ un $\lambda_2 = \dfrac{-13 - \sqrt{449}}{2}$ ir reālas ar dažādām zīmēm, tas nozīmē, ka stacionāra punkta tips ir sedls. Tātad sistēmas (3.9) stacionārs punkts $(7, 1)$ ir nestabils.




**3.10. zīm.** Sistēmas (3.17) fāzes portreti.




**3.11. zīm.** Sistēmas (3.9) fāzes portreti punkta $(7, 1)$ apkārtnē.




**3.12. zīm.** Sistēmas (3.9) atrisinājumu fāzes portreti.

**3.3. piemērs.** *Izpētīt diferenciālvienādojumu sistēmas*

$$\begin{cases} x' = x + ay + y^2, \\ y' = bx - 3y - x^2 \end{cases} \tag{3.18}$$

*triviālo atrisinājumu un noteikt, pie kurām $a$ un $b$ vērtībām triviālais atrisinājums būs asimptotiski stabils.*

► Šīs sistēmas nelineāras daļas ir $h_1(x,y) = y^2$ un $h_2(x,y) = -x^2$,

$$\lim_{x,y\to 0} \frac{h_1(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x,y\to 0} \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

$$\lim_{x,y\to 0} \frac{h_2(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x,y\to 0} \frac{-x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

tad sistēmu (3.18) var aizvietot ar atbilstošo pirmā tuvinājuma sistēmu

$$\begin{cases} x' = x + ay, \\ y' = bx - 3y. \end{cases} \tag{3.19}$$

Sistēmas (3.19) raksturvienādojums ir

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & a \\ b & -3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-3-\lambda) - ab = \lambda^2 + 2\lambda - 3 - ab = 0,$$

tā saknes

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{4+ab}.$$

Iespējami divi varianti: ja $ab \geqslant -4$, tad būs reālas saknes; ja $ab < -4$, tad būs kompleksas saknes. Apskatīsim 1. variantu, kad $ab \geqslant -4$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1 + \sqrt{4+ab}, \\ \lambda_2 &= -1 - \sqrt{4+ab}, \end{aligned}$$

otra sakne vienmēr būs negatīva, bet, lai pirmā sakne būtu negatīva un reāla, ir jāizpildās šādam nosacījumam:

$$\sqrt{4+ab} < 1,$$

$$0 \leqslant 4 + ab < 1,$$

$$-4 \leqslant ab < -3,$$

tātad sistēmas (3.19) triviālais atrisinājums ir asimptotiski stabils, ja $ab \in [-4; -3)$.

Apskatīsim 2. variantu, kad $ab < -4$.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -1 + i\sqrt{-ab-4}, \\ \lambda_2 &= -1 - i\sqrt{-ab-4}, \end{aligned}$$

reālās daļās ir konstantas un negatīvas, tāpēc pie jebkuriem $ab < -4$ sistēmas (3.19) triviālais atrisinājums būs asimptotiski stabils. Apkopojot abu variantu rezultātus, dabūjam, ka pirmā tuvinājuma sistēmas (3.19), kā arī pētāmas sistēmas (3.18) triviālaie atrisinājumi ir asimptotiski stabili, ja $ab \in [-\infty; -3)$. ◄

**3.4. piemērs.** *Izpētīt diferenciālvienādojumu sistēmas*

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -bx + ay - y^3 \end{cases} \tag{3.20}$$

*triviālo atrisinājumu un noteikt, pie kurām $a$ un $b$ vērtībām triviālais atrisinājums būs stabils.*

► Šīs sistēmas nelineāras daļas ir $h_1(x, y) = 0$ un $h_2(x, y) = -y^3$,

$$\lim_{x,y\to 0} \frac{h_2(x, y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{x,y\to 0} \frac{-y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0,$$

tad sistēmu (3.20) var aizvietot ar atbilstošo pirmā tuvinājuma sistēmu

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -bx + ay. \end{cases} \tag{3.21}$$

Sistēmas (3.21) raksturvienādojums ir

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -b & a - \lambda \end{vmatrix} = -\lambda(a - \lambda) + b = \lambda^2 - a\lambda + b,$$

Apskatīsim iespējamus variantus.

1. Ja $a = 0$, $b > 0$, tad saknes ir

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{b}i$$

un sistēmas (3.21) triviālais atrisinājums ir stabils, bet tā tips ir centrs.

2. Ja $a = 0$, $b < 0$, tad saknes ir

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-b}.$$

Viena sakne ir pozitīva, tātad sistēmas (3.21) triviālais atrisinājums ir nestabils.

3. Ja $a^2 - 4b > 0$, $a < 0$, tad ir divas reālas saknes

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \\ \lambda_2 &= \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \end{aligned}$$

$\lambda_2$ vienmēr būs negatīva, bet, lai $\lambda_1$ būtu negatīva un reāla, ir jāizpildās šādam nosacījumam:

$$\sqrt{a^2 - 4b} < -a,$$

jeb $0 \leqslant b < \dfrac{a^2}{4}$, tātad sistēmas (3.21) triviālais atrisinājums ir asimptotiski stabils un tā tips ir mezgls, pie tām, ja $b = 0$, tad $\lambda_2 = 0$, bet $\lambda_1 < 0$, tāpēc sistēmas (3.21) triviālais atrisinājums ir stabils, bet nav asimptotiski stabils.

4. Ja $a^2 - 4b > 0$, $a > 0$, tad arī ir divas reālas saknes, pie tām abas ir pozitīvas, tātad sistēmas (3.21) triviālais atrisinājums ir nestabils.

5. Ja $a^2 - 4b = 0$, $a < 0$, tad ir divas vienādas, reālas un negatīvas saknes

$$\lambda_{1,2} = \frac{a}{2}$$

un sistēmas (3.21) triviālais atrisinājums ir asimptotiski stabils un tā tips ir deģenerēts mezgls.

6. Ja $a^2 - 4b = 0$, $a > 0$, tad ir divas vienādas, reālas un pozitīvas saknes un sistēmas (3.21) triviālais atrisinājums ir nestabils un tā tips ir deģenerēts mezgls.

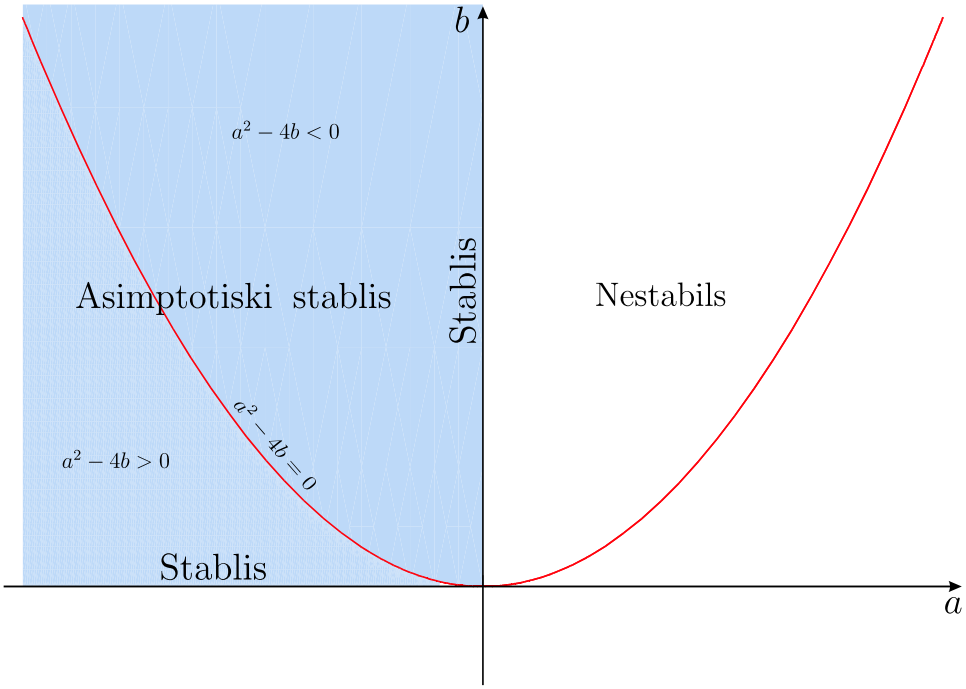
7. Ja $a^2 - 4b < 0$, $a < 0$, tad saknes ir kompleksi saistītas

$$\lambda_{1,2} = \frac{a \pm i\sqrt{4b - a^2}}{2},$$

reālās daļas ir negatīvas, tāpēc sistēmas (3.21) triviālais atrisinājums ir asimptotiski stabils.

8. Ja $a^2 - 4b < 0$, $a > 0$, tad saknes ir kompleksi saistītas, bet ar pozitīvām reālām daļam, tāpēc sistēmas (3.21) triviālais atrisinājums ir nestabils.

Apkopojot visu variantu rezultātus, dabūjam, ka pirmā tuvinājuma sistēmas (3.21), ka arī pētāmas sistēmas (3.20) triviālaie atrisinājumi ir stabili, ja $a \leqslant 0$ un $b \geqslant 0$.
(skat. 3.13. zīm.) ◀




**3.13. zīm.** Sistēmas (3.20) triviālā atrisinājuma stabilitāte atkarībā no parametru $a$ un $b$ vērtībām.

### 3.1.2. Otrais paņēmiens

Apskatīsim autonomu diferenciālvienādojumu sistēmu

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, ..., x_n) \ (i = 1, 2, ..., n), \tag{3.22}$$

kurai eksistē triviālais atrisinājums $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$. Tātad $F_i(0, 0, ..., 0) = 0$ $(i =$
$= 1, 2, ..., n)$ un katras funkcijas $F_i$ izvirzījums Maklorena rindā sāksies no lineāra locekļa $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_k}(0, 0, ..., 0)x_k$, kurš ir $F_i$ pirmais tuvinājums. Tāpēc stablitātes īpašību punktā $x_i \equiv 0$ nosaka matrica $A$ ar elementiem $a_{ik} = \frac{\partial F_i}{\partial x_k}(0, 0, ..., 0)$ $(i, k = 1, 2, ..., n)$.

**3.4. teorēma.** Pieņemsim, ka kādā vaļējā lodē $\Omega$ ar centru punktā $x_i \equiv 0$ funkcijas $F_i$ un to parciālie atvasinājumi pēc $x_1, x_2, ..., x_n$ līdz otrai kārtai ieskaitot ir nepārtrauktas. Ja $F_i(0, 0, ..., 0) = 0$, bet raksturvienādojuma

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

saknes $\lambda_i$, kur $a_{ik} = \frac{\partial F_i}{\partial x_k}(0, 0, ..., 0)$, apmierina nosacījumu $Re\lambda_i < 0$ visiem
$i = 1, 2, ..., n$, tad sistēmas (3.22) triviālais atrisinājums ir **stabils, pie tam asimptotiski**.
Ja kaut vienam $i$ izpildās nevienādība $Re\lambda_i > 0$, tad sistēmas (3.22) triviālais atrisinājums ir **nestabils**.

Ja kaut vienas saknes $\lambda_i$ reālā daļa vienāda ar 0, tad pētīšana uz stabilitāti ar pirmā tuvinājuma metodi nav iespējama.

**3.5. piemērs.** *Izpētīt uz stabilitāti diferenciālvienādojumu sistēmas*

$$\begin{cases} x' = 2x + 8\ln(1 + y), \\ y' = 2 - e^x - 3y - \cos y \end{cases} \tag{3.23}$$

*triviālo atrisinājumu.*

► $F_1(x,y) = 2x + 8\ln(1+y)$ un $F_2(x,y) = 2 - e^x - 3y - \cos y$ ir diferencējamas funkcijas un $F_i(0,0) = 0$ $(i = 1,2)$, no tā seko, ka var pielietot pirmā tuvinājuma metodi. Atradīsim $F_1$ un $F_2$ atvasinājumus pēc katra mainīgā, lai sastādītu matricu A:

$$\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{\partial F_1}{\partial x} = 2,\\
a_{12} &= \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{8}{1+y}|_{(0,0)} = 8,\\
a_{21} &= \frac{\partial F_2}{\partial x} = -e^x|_{(0,0)} = -1,\\
a_{22} &= \frac{\partial F_2}{\partial y} = -3 + \sin y|_{(0,0)} = -3.
\end{aligned}$$

Tātad pirmā tuvinājuma sistēma ir

$$\begin{cases} x' = 2x + 8y,\\ y' = -x - 3y. \end{cases}$$

Sastādām pirmā tuvinājuma sistēmas raksturvienādojumu

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 8 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(2-\lambda)(3+\lambda) + 8 = \lambda^2 + \lambda + 2 = 0,$$

tā saknes

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

un reālās daļas

$$Re\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}.$$

Tā kā raksturvienādojuma sakņu reālās daļas ir negatīvas, tad sistēmas (3.23) triviālais atrisinājums ir asimptotiski stabils. ◄

**3.6. piemērs.** *Izpētīt uz stabilitāti diferenciālvienādojumu sistēmas*

$$\begin{cases} x' = \mathrm{tg}(z-y) + 2x,\\ y' = \sqrt{9+12x} - 3e^y,\\ z' = -3y \end{cases} \tag{3.24}$$

*triviālo atrisinājumu.*

► $F_1(x,y,z) = \mathrm{tg}(z-y)+2x$, $F_2(x,y,z) = \sqrt{9+12x}-3e^y$ un $F_3(x,y,z) = -3y$ ir bezgalīgi diferencējamas funkcijas un $F_i(0,0,0) = 0$ $(i = 1,2,3)$. Lietojam pirmā tuvinājuma metodi. Atradīsim $F_1$, $F_2$ un $F_3$ atvasinājumus

pēc katra mainīgā un atradīsim matricas A elementus:

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{\partial F_1}{\partial x} = 2, \\
a_{12} &= \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{-1}{\cos^2(z-y)}|_{(0,0,0)} = -1, \\
a_{13} &= \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{1}{\cos^2(z-y)}|_{(0,0,0)} = 1, \\
a_{21} &= \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{12}{2\sqrt{9+12x}}|_{(0,0,0)} = 2, \\
a_{22} &= \frac{\partial F_2}{\partial y} = -3e^y|_{(0,0,0)} = -3, \\
a_{23} &= \frac{\partial F_2}{\partial z} = 0, \\
a_{31} &= \frac{\partial F_3}{\partial x} = 0, \\
a_{32} &= \frac{\partial F_3}{\partial y} = -3, \\
a_{33} &= \frac{\partial F_3}{\partial z} = 0.
\end{aligned}
$$

Tātad pirmā tuvinājuma sistēma ir

$$
\begin{cases}
x' = 2x - y + z, \\
y' = 2x - 3y, \\
z' = -3y.
\end{cases}
$$

Sastādām pirmā tuvinājuma sistēmas raksturvienādojumu

$$
\begin{vmatrix}
2-\lambda & -1 & 1 \\
2 & -3-\lambda & 0 \\
0 & -3 & -\lambda
\end{vmatrix}
= (2-\lambda)(3+\lambda)\lambda - 6 - 2\lambda = -\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda - 6 = 0,
$$

jeb

$$(\lambda+3)(\lambda^2 - 2\lambda + 2) = 0,$$

tā saknes

$$\lambda_1 = -3,$$

$$\lambda_{2,3} = 1 \pm i,$$

un reālās daļas

$$Re\lambda_1 = -3,$$

$$Re\lambda_{2,3} = 1.$$

Raksturvienādojuma komplekso sakņu reālās daļas ir pozitīvas, tātad sistēmas (3.24) triviālais atrisinājums ir nestabils.◀

## 3.2. Sistēmas fāzes portreta konstruēšana ar līmeņlīniju palīdzību

Autonomas sistēmas

$$\begin{cases} x' = f(x,y), \\ y' = g(x,y) \end{cases} \tag{3.25}$$

trajektorijas dažreiz var atrast, risinot ar šo sistēmu saistīto pirmās kārtas diferenciālvienādojumu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)} \tag{3.26}$$

Atrisinot šo diferenciālvienādojumu, iegūsim funkciju $H(x,y) = C$ un piešķirot $C$ dažādas vertības, var konstruēt diferenciālvienādojuma (3.26) līmeņlīnijas, un ar to palīdzību var noskaidrot diferenciālvienādojumu sistēmas (3.25) stacionāra atrisinājuma stabilitāti.

**3.7. piemērs.** *Izpētīt uz stabilitāti diferenciālvienādojumu sistēmas*

$$\begin{cases} x' = x - xy, \\ y' = y + 2xy. \end{cases} \tag{3.27}$$

*stacionārus punktus un konstruēt fāzes portretu.*

► Sākumā atradīsim sistēmas stacionārus punktus

$$\begin{cases} x - xy = 0, \\ y + 2xy = 0. \end{cases}$$

Atrisinot šo sistēmu secinām, ka stacionāri punkti ir $(0,0)$ un $(-0.5,1)$.

Tagad sastādīsim atbilstošo diferenciālvienādojumu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+2xy}{x-xy} \tag{3.28}$$

un atrisinām to,

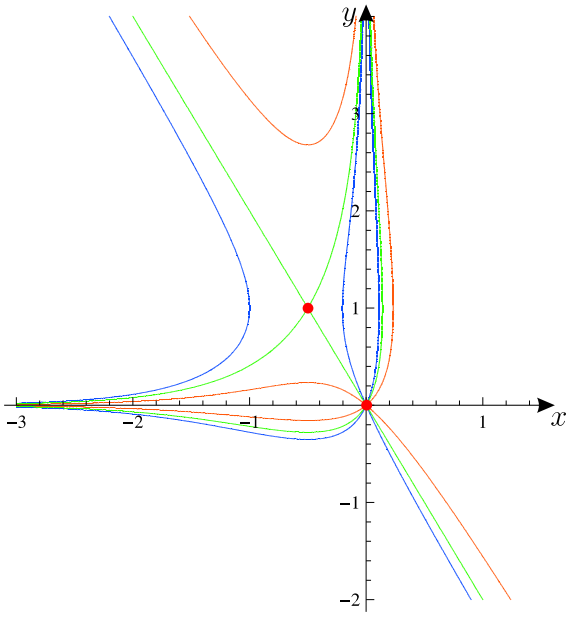
$$x(1-y)dy = y(1+2x)dx,$$

$$\int \frac{(1-y)dy}{y} = \int \frac{(1+2x)dx}{x}.$$

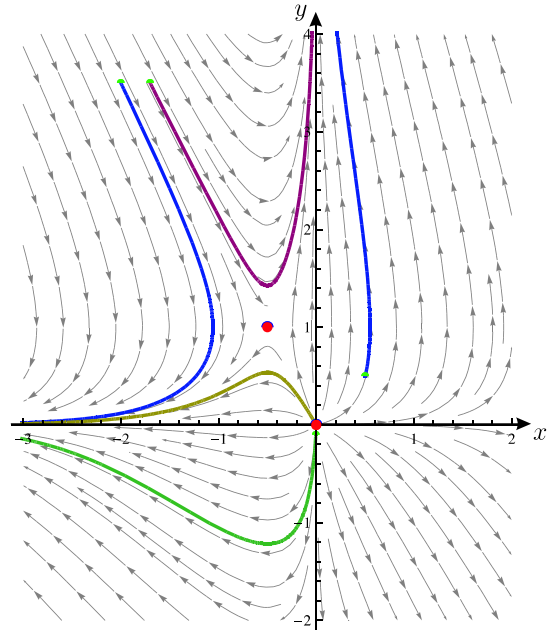
Tātad diferenciālvienādojuma (3.28) visparīgais integrālis ir $H(x,y) = C$, kur

$$H(x,y) = \ln|y| - y - \ln|x| - 2x$$

un $C$ ir patvaļīga konstante.




**3.14. zīm.** $H(x, y) = C$ funkciju grafiki, ja $C = 1$ (zila līkne), $C = ln(2)$ (zaļa līkne), $C = 0$ (sarkana līkne).




**3.15. zīm.** Sistēmas (3.27) fāzes portreti.

No 3.14. zīmējuma secinām, ka stacionāra punkta $(-0.5, 1)$ tips ir sedls, kas ir nestabils, bet stacionāra punkta $(0, 0)$ tips ir mezgls, pie tām arī nestabīls, jo palielinoties laikam $t$ sistēmas trajektorija attālinās no stacionāra punkta.◀

**3.8. piemērs.** *Izpētīt uz stabilitāti diferenciālvienādojumu sistēmas*

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x + \frac{x^3}{6}. \end{cases} \tag{3.29}$$

*stacionārus punktus un konstruēt fāzes portētu.*

▶ Sākumā atradīsim sistēmas stacionārus punktus

$$\begin{cases} y = 0, \\ -x + \frac{x^3}{6} = 0. \end{cases}$$

Atrisinot šo sistēmu secinām, ka stacionāri punkti ir $(0, 0)$, $(-\sqrt{6}, 0)$ un $(\sqrt{6}, 0)$.

Tagad sastādīsim atbilstošo diferenciālvienādojumu

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + \frac{x^3}{6}}{y} \tag{3.30}$$

un atrisinām to,

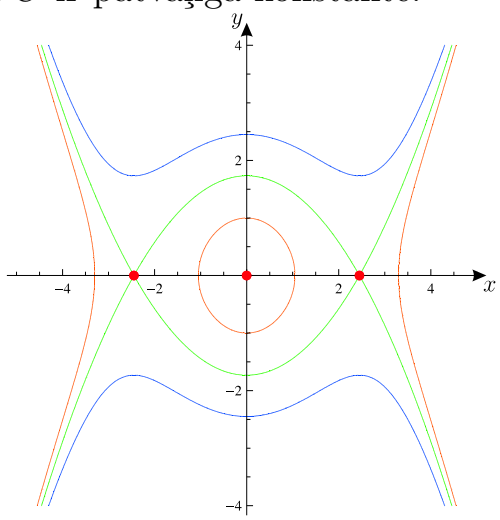
$$ydy = (-x + \frac{x^3}{6})dx,$$

$$\int ydy = \int (-x + \frac{x^3}{6})dx.$$

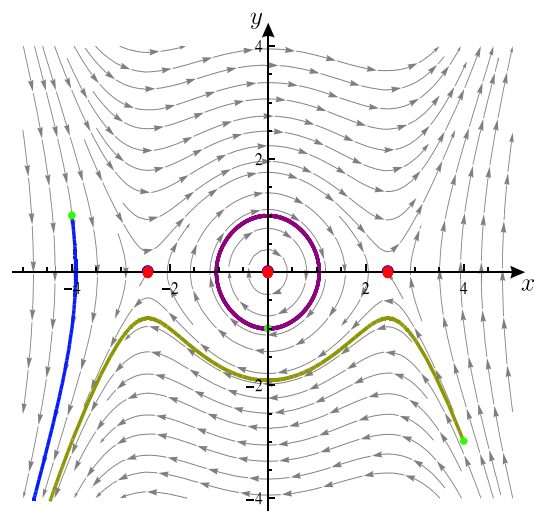
Tātad diferenciālvienādojuma (3.30) visparīgais integrālis ir $H(x, y) = C$, kur

$$H(x, y) = y^2 + x^2 - \frac{x^4}{12}$$

un $C$ ir patvaļīga konstante.




**3.16. zīm.** $H(x, y) = C$ funkciju grafiki, ja $C = 1$ (sarkana līkne), $C = 3$ (zaļa līkne), $C = 6$ (zila līkne).




**3.17. zīm.** Sistēmas (3.29) fāzes portreti.

No 3.16. zīmējuma secinām, ka stacionāra punkta $(0, 0)$ tips ir centrs, kas ir stabils, jo atrisinājumu trajektorijas riņķo apkārt šī punkta, bet stacionāru punktu $(-\sqrt{6}, 0)$ un $(\sqrt{6}, 0)$ tipi ir sedli, kas ir nestabili.◀

# 4. Ļapunova metode (Ļapunova funkcijas)

Slavenais krievu matemātiķis A.Ļapunovs 19. gadsimta beigās izstrādāja vispārīgo stabilitātes pētīšanas metodi diferenciālvienādojumu sistēmai

$$\frac{dx_i}{dt} = \Phi_i(t, x_1, x_2, ..., x_n) \ (i = 1, 2, ..., n), \tag{4.1}$$

kuru sauc par Ļapunova otro metodi.

**4.1. teorēma. (Ļapunova teorēma par stabilitāti)** [4] Ja eksistē nepārtraukti diferencējama funkcija $V(x_1, x_2, ..., x_n)$ (to sauc par Ļapunova funkciju), kura koordinātu sākumpunkta apkartnē apmierina šādus nosacījumus:

1. $$V(x_1, x_2, ..., x_n) \geqslant 0,$$
   pie tam $V = 0$ tikai, ja $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$, t.i., funkcijai $V$ ir stingrais minimums koordinātu sākumpunktā;

2. funkcijas $V$ atvasinājums saskaņā ar sistēmu
   $$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \Phi_i(t, x_1, x_2, ..., x_n) \leqslant 0$$
   pie $t \geqslant t_0$,

tad sistēmas (4.1) triviālais atrisinājums $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$ ir **stabils**.

**4.2. teorēma. (Ļapunova teorēma par asimptotisko stabilitāti)** [4] Ja eksistē nepārtraukti diferencējama Ļapunova funkcija $V(x_1, x_2, ..., x_n)$, kura apmierina šādus nosacījumus:

1. $$V(x_1, x_2, ..., x_n) \geqslant 0,$$
   pie tam $V = 0$ tikai, ja $x_i \equiv 0$ $(i = 1, 2, ..., n)$, t.i., funkcijai V ir stingrais minimums koordinātu sākumpunktā;

2. funkcijas $V$ atvasinājums saskaņā ar sistēmu
   $$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \Phi_i(t, x_1, x_2, ..., x_n) \leqslant 0,$$

pie tam ārpus pēc patikas mazas koordinātu sākumpunkta apkārtnes atvasinājums

$$\frac{dV}{dt} \leqslant -\beta < 0,$$

tad diferencialvienādojumu sistēmas (4.1) triviālais atrisinājums $x_i \equiv 0$
$(i = 1, 2, ..., n)$ ir **asimptotiski stabils**.

**4.3. teorēma. (Četajeva teorēma par nestabilitāti)**[4] Ja eksistē nepārtraukti diferencējama funkcija $V(x_1, x_2, ..., x_n)$, kura slēgtā koordinātu sākumpunkta apkārtnē apmierina nosacījumus:

1. $$V(x_1, x_2, ..., x_n) \geqslant 0,$$
2. funkcijas $V$ atvasinājums saskaņā ar sistēmu

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} \Phi_i(t, x_1, x_2, ..., x_n) \geqslant 0,$$

pie tam apgabalā, kur $V(x_1, x_2, ..., x_n) > 0$, atvasinājums

$$\frac{dV}{dt} \geqslant \beta > 0,$$

tad diferencialvienādojumu sistēmas (4.1) triviālais atrisinājums $x_i \equiv 0$
$(i = 1, 2, ..., n)$ ir **nestabils**.

## 4.1. Lineāras diferenciālvienādojumu sistēmas

Bieži vien Ļapunova funkciju meklē kvadrātiskās formas veidā.

**4.1. piemērs.** *Izpētīt uz stabilitāti lineāras diferenciālvienādojumu sistēmas*

$$\begin{cases} x' = -x + y, \\ y' = -2y \end{cases} \tag{4.2}$$

*triviālo atrisinājumu.*

► Ļapunova funkciju meklēsim veidā $V(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, kur $a > 0, b > 0$ un $c > 0$.

$$\frac{dV}{dt} = 2ax(-x+y) + 2by(-x+y) + 2bx(-2y) + 2cy(-2y) =$$
$$= -2ax^2 - 2(3b-a)xy - 2(2c-b)y^2 =$$
$$= -2\left(ax^2 + 2xy\frac{3b-a}{2} + (2c-b)y^2\right).$$

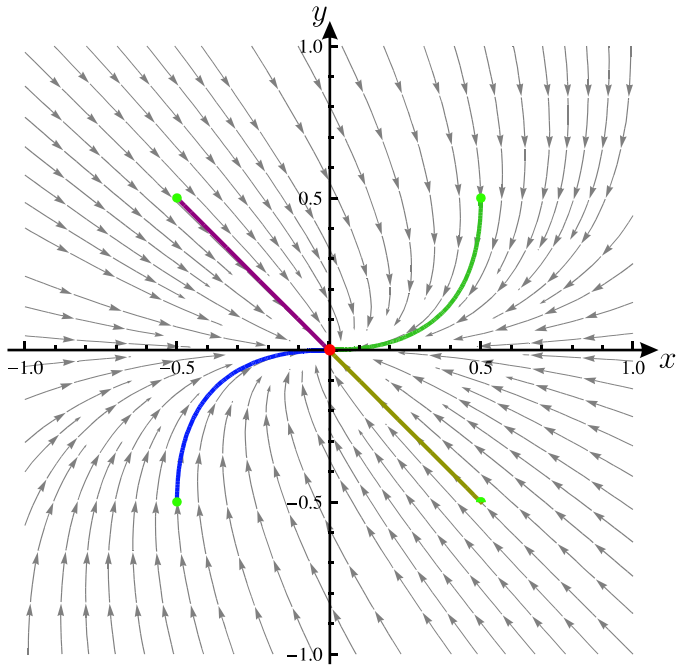
Ja $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$, tad Ļapunova funkcija ir

$$V(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + (x+y)^2 \geqslant 0,$$

pie tam $V = 0$ tikai , ja $x = 0$ un $y = 0$ un tās atvasinājums saskaņā ar sistēmu ir

$$\frac{dV}{dt} = -2(2x^2 + xy + y^2) = -3x^2 - y^2 - (x+y)^2 \leqslant 0.$$

Tā kā Ļapunova funkcija $V(x,y) \geqslant 0$, bet tās atvasinājums saskaņā ar sistēmu (4.2) $\frac{dV}{dt} \leqslant 0$, pie tām $V = 0$ un $\frac{dV}{dt} = 0$ tikai, ja $x = 0$ un $y = 0$, tāpēc saskaņā ar teorēmas 4.2. nosacījumiem, sistēmas (4.2) triviālais atrisinājums ir asimptotiski stabils.
(skat. 4.1. zīm.) ◄




**4.1. zīm.** Sistēmas (4.2) fāzes portreti.

## 4.2. Nelineāras diferenciālvienādojumu sistēmas

**4.2. piemērs.** *Izpētīt uz stabilitāti diferenciālvienādojumu sistēmas*

$$\begin{cases} x' = 3y - x^3, \\ y' = -4x - 3y^5 \end{cases} \tag{4.3}$$

*triviālo atrisinājumu.*

► Ļapunova funkciju meklēsim veidā $V(x, y) = ax^2 + by^2$, kur $a > 0, b > 0$. Tad $V(x, y) \geqslant 0$, pie tam $V = 0$ tikai , ja $x = 0$ un $y = 0$.

$$\frac{dV}{dt} = 2ax(3y - x^3) + 2by(-4x - 3y^5) = 2xy(3a - 4b) - 2ax^4 - 6by^6.$$

Noskaidrosim, kādā gadījumā var izpildīties nevienādība $\frac{dV}{dt} \leqslant 0$. Pieņemsim, ka

$$2xy(3a - 4b) = 0,$$

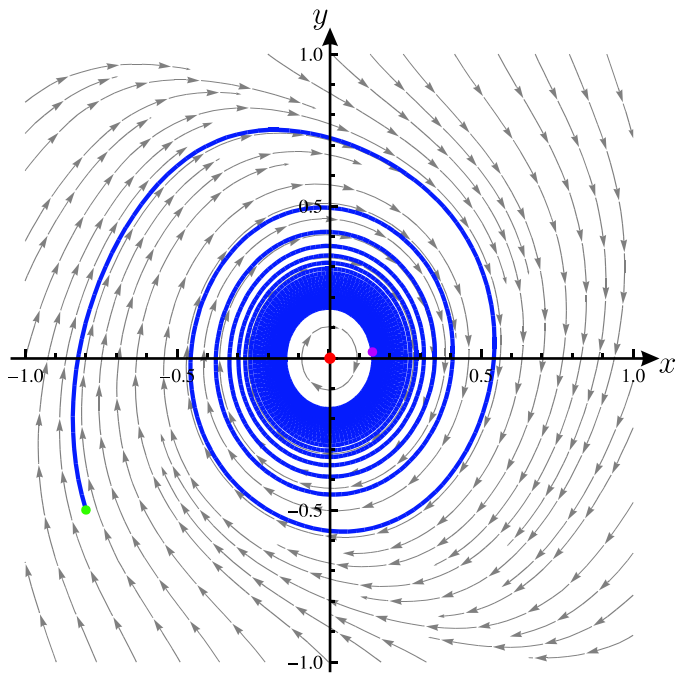
t.i., $3a = 4b$. Piemēram, $a = 4, b = 3$, tad

$$V(x, y) = 4x^2 + 3y^2 \geqslant 0$$

un

$$\frac{dV}{dt} = -8x^4 - 18y^6 \leqslant 0.$$

Tā kā Ļapunova funkcija $V(x, y) \geqslant 0$, bet tās atvasinājums saskaņā ar sistēmu (4.3) $\dfrac{dV}{dt} \leqslant 0$, pie tām $V = 0$ un $\dfrac{dV}{dt} = 0$ tikai, ja $x \equiv 0$, tad sistēmas (4.3) triviālais atrisinājums ir asimptotiski stabils.
(skat. 4.2. zīm.) ◄




**4.2. zīm.** Sistēmas (4.3) fāzes portreti.

Ne vienmēr var uz laimi pareizi izvēlēties Ļapunova funkcijas veidu tā, lai ar to palīdzību varētu izpētīt sistēmas atrisinājumu uz stabilitāti, kā arī neeksistē vispārīgas metodes Ļapunova funkciju konstruēšanai, tāpēc apskatīsim dažādus gadījumus konkrētiem nelineāru sistēmu veidiem.

### 4.2.1. Pirmais gadījums

Apskatīsim diferenciālvienādojumu sistēmu

$$\begin{cases} x' = f(x) + by, \\ y' = cx + dy, \end{cases} \tag{4.4}$$

kur $f(x)$ kāda nelineāra funkcija, $f(0) = 0$. Sākumā izpētīsim lineāru sistēmu

$$\begin{cases} x' = ax + by, \\ y' = cx + dy, \end{cases} \tag{4.5}$$

Ja $ad - bc > 0$, tad Ļapunova funkciju var meklēt veidā

$$V = (dx - by)^2 + (ad - bc)x^2.$$

Šajā gadījumā

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = \ & \big(2(dx - by)d + 2x(ad - bc)\big)(ax + by) + \\ & + \big(-2b(dx - by)\big)(cx + dy) = 2x^2(ad - bc)(d + a) \end{aligned}$$

Atkarībā no $a$ un $d$ var noteikt $\dfrac{dV}{dt}$ zīmi. Ievērojam, ka $V = (dx - by)^2 - bcx^2 + dax^2$. Tātad loceklim $ax$ no sistēmas (4.5) Ļapunova funkcijas pierakstā atbilst $ax^2 = 2\int\limits_0^x a\tau d\tau$. Ņemot par pamatu Ļapunova funkciju lineārai sistēmai (4.5), analogi var konstruēt Ļapunova funkciju nelineārai sistēmai (4.4) aizvietojot $ax$ ar $f(x)$, $ax^2$ ar $2\int\limits_0^x f(\tau)d\tau$ un $a$ ar $\dfrac{f(x)}{x}$ Dabūsim

$$V = (dx - by)^2 - bcx^2 + 2d\int\limits_0^x f(\tau)d\tau$$

un tās atvasinājums saskaņā ar sistēmu ir

$$\frac{dV}{dt} = 2x^2\left(d\frac{f(x)}{x} - bc\right)\left(d + \frac{f(x)}{x}\right).$$

Tā kā $V = (dx - by)^2 + 2\int\limits_0^x (df(\tau) - bc\tau)d\tau$, tad $V > 0$, ja

$2\int\limits_0^x (df(\tau) - bc\tau)d\tau) > 0$, t.i., $x(df(x) - bcx) > 0$ jeb $d\dfrac{f(x)}{x} - bc > 0$. Un, ja $d + \dfrac{f(x)}{x} < 0$, tad sistēmas (4.4) triviālais atrisinājums būs stabils.

**4.3. piemērs.** *Izpētīt uz stabilitāti diferenciālvienādojumu sistēmas*

$$\begin{cases} x' = -x^3 + y, \\ y' = -x - 2y \end{cases} \tag{4.6}$$

*triviālo atrisinājumu.*

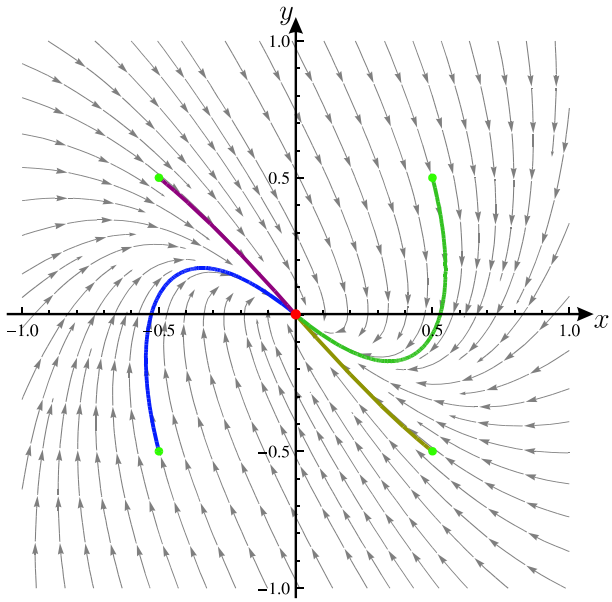
► Ļapunova funkcija ir

$$V = (-2x - y)^2 + x^2 + 4\int\limits_0^x \tau^3 d\tau = (2x + y)^2 + x^2 + x^4 \geqslant 0$$

un tās atvasinājums saskaņā ar sistēmu

$$\frac{dV}{dt} = \big(4(2x + y) + 2x + 4x^3\big)(-x^3 + y) + 2(2x + y)(-x - 2y) =$$
$$= -2x^2(1 + 2x^2)(2 + x^2) \leqslant 0.$$

Redzams, ka sistēmas (4.6) triviālais atrisinājums ir stabils, jo $V$ un $\dfrac{dV}{dt}$ ir funkcijas ar pretējām zīmēm, pie tam asimptotiski stabils.
(skat. 4.3. zīm.) ◀




**4.3. zīm.** Sistēmas (4.6) fāzes portreti.

#### 4.2.2. Otrais gadījums

Apskatīsism sistēmu

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -\varphi(x)y - f(x), \qquad f(0) = 0. \end{cases} \tag{4.7}$$

Līdz ar to apskatīsim lineāru sistēmu

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -ax - by, \qquad a > 0,\ b > 0. \end{cases} \tag{4.8}$$

Ļapunova funkciju sistēmai (4.8) var meklēt veidā $V = \dfrac{y^2}{2} + a\dfrac{x^2}{2} \geqslant 0$, tad $\dfrac{dV}{dt} =$
$= y(-ax - by) + axy = -by^2$. Sistēmai (4.7) Ļapunova funkciju vajag modificēt, aizvietojot $ax$ ar $f(x)$, $\dfrac{ax^2}{2}$ ar $\displaystyle\int_0^x f(\tau)d\tau$ un $b$ ar $\varphi(x)$. Dabūsim

$$V = \frac{y^2}{2} + \int_0^x f(\tau)d\tau, \qquad \text{tad} \qquad \frac{dV}{dt} = -\varphi(x)y^2.$$

Tātad lai sistēmas (4.7) triviālais atrisinājums būtu stabils, jāizpildās šādiem nosācījumiem:
1) $\varphi(x) > 0$, 2) $xf(x) > 0$.

**4.4. piemērs.** *Izpētīt uz stabilitāti diferenciālvienādojumu sistēmas*

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x^2 y - x^3 \end{cases} \tag{4.9}$$

*triviālo atrisinājumu.*

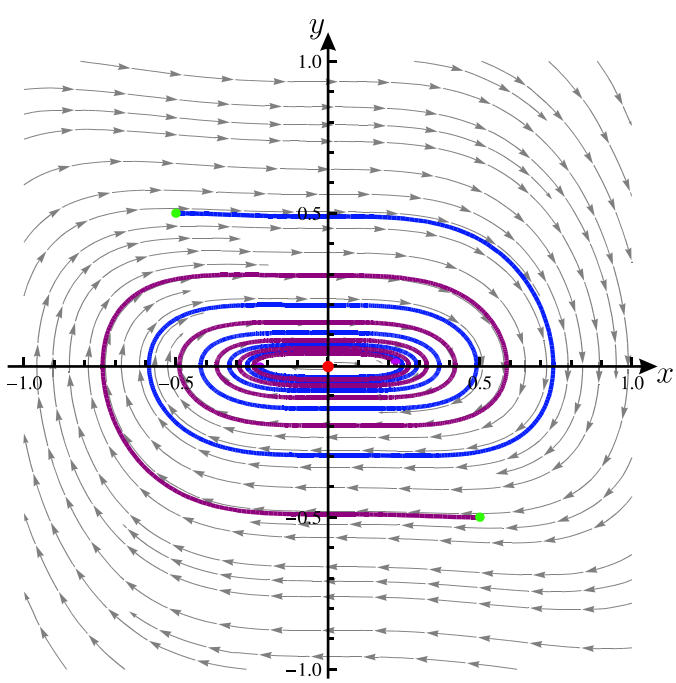
► Sistēma (4.9) ir (4.7) veida sistēma, kur $\varphi(x) = x^2$ un $f(x) = x^3$. Konstruēsim Ļapunova funkciju

$$V = \frac{y^2}{2} + \int_0^x \tau^3 d\tau = \frac{y^2}{2} + \frac{x^4}{4} \geqslant 0$$

un tās atvasinājums saskaņā ar sistēmu

$$\frac{dV}{dt} = y(-x^2 y - x^3) + x^3 y = -y^2 x^2 \leqslant 0.$$

Tā kā $V$ un $\dfrac{dV}{dt}$ ir funkcijas ar pretējām zīmēm, tad sistēmas (4.9) triviālais atrisinājums ir stabils, pie tām asimptotiski.
(skat. 4.4. zīm.) ◄




**4.4. zīm.** Sistēmas (4.9) fāzes portreti.

### 4.2.3. Trešais gadījums

Apskatīsism sistēmu

$$\begin{cases} x' = y - \varphi(x), \\ y' = -f(x). \end{cases} \tag{4.10}$$

Līdz ar to apskatīsim lineāru sistēmu

$$\begin{cases} x' = y - bx, \qquad b > 0, \\ y' = -ax, \qquad a > 0. \end{cases} \tag{4.11}$$

Ļapunova funkciju sistēmai (4.11) var meklēt veidā $V = \dfrac{y^2}{2} + \dfrac{ax^2}{2} \geqslant 0$, tad

$$\frac{dV}{dt} = y(-ax) + ax(y - bx) = -abx^2 \leqslant 0.$$

Aizvietojot $bx$ ar $\varphi(x)$, $ax$ ar $f(x)$ un $\dfrac{ax^2}{2} = \int\limits_0^x a\tau d\tau$ ar $\int\limits_0^x f(\tau)d\tau$, ieguvām Ļapunova funkciju nelineārai sistēmai

$$V = \frac{y^2}{2} + \int\limits_0^x f(\tau)d\tau$$

un tās atvasinājums saskaņā ar sistēmu ir

$$\frac{dV}{dt} = -f(x)\varphi(x).$$

Tātad, lai sistēmas (4.10) triviālais atrisinājums būtu stabils, jāizpildās šādiem nosācījumiem: 1) $xf(x) > 0$, 2) $x\varphi(x) > 0$.

**4.5. piemērs.** *Izpētīt uz stabilitāti diferenciālvienādojumu sistēmas*

$$\begin{cases} x' = y + x^3, \\ y' = -x \end{cases} \tag{4.12}$$

*triviālo atrisinājumu.*

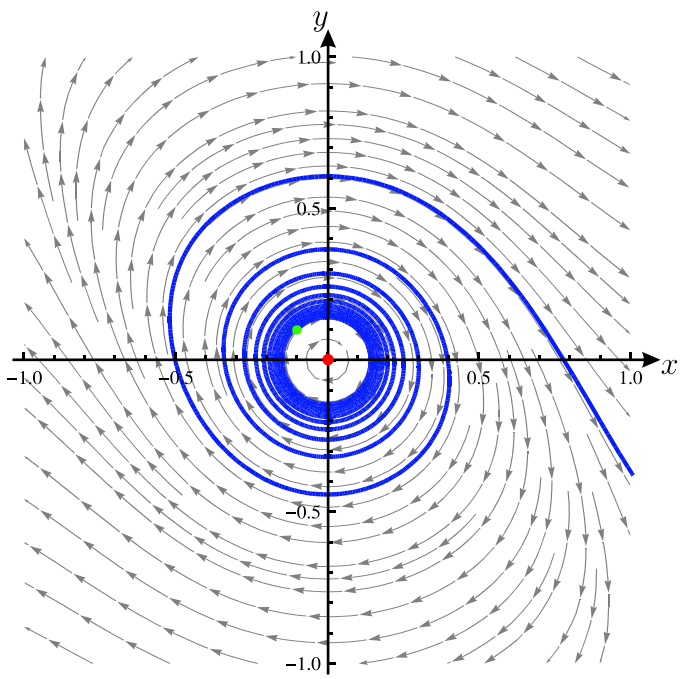
► Sistēma (4.12) ir (4.10) veida sistēma, kur $\varphi(x) = -x^3$ un $f(x) = x$. Konstruēsim Ļapunova funkciju

$$V = \frac{y^2}{2} + \int\limits_0^x \tau d\tau = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{4} \geqslant 0$$

un tās atvasinājums saskaņā ar sistēmu

$$\frac{dV}{dt} = x^4 \geqslant 0.$$

Tā kā $V$ un $\dfrac{dV}{dt}$ ir vienādas zīmes funkcijas, tad sistēmas (4.12) triviālais atrisinājums ir nestabils.
(skat. 4.5. zīm.) ◄




**4.5. zīm.** Sistēmas (4.11) fāzes portreti.

**4.6. piemērs.** *Izpētīt uz stabilitāti diferenciālvienādojumu sistēmas*

$$\begin{cases} x' = y - x^3, \\ y' = -x \end{cases} \tag{4.13}$$

*triviālo atrisinājumu.*

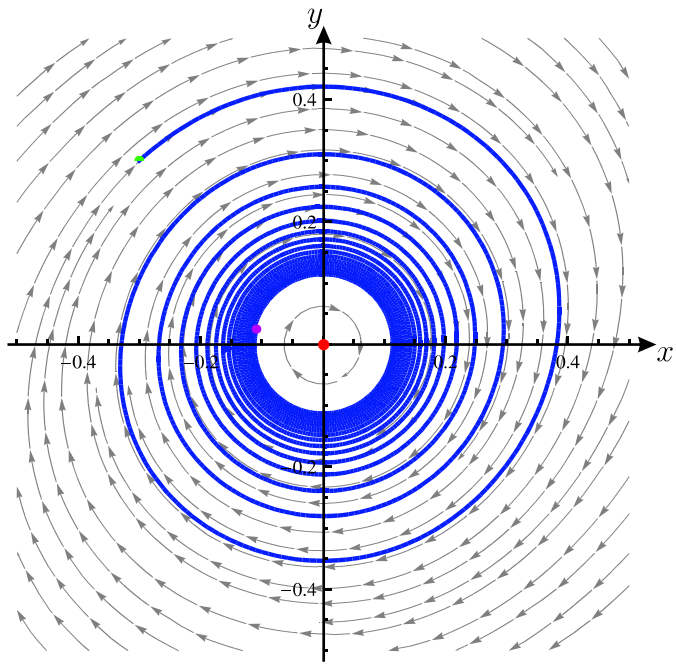
► Sistēma (4.13) ir (4.10) veida sistēma, kur $\varphi(x) = x^3$ un $f(x) = x$. Konstruēsim Ļapunova funkciju

$$V = \frac{y^2}{2} + \int\limits_0^x \tau d\tau = \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{4} \geqslant 0$$

un tās atvasinājums saskaņā ar sistēmu

$$\frac{dV}{dt} = -x^4 \geqslant 0.$$

Tā kā $V$ un $\dfrac{dV}{dt}$ ir funkcijas ar pretējām zīmēm, tad sistēmas (4.13) triviālais atrisinājums ir stabils.
(skat. 4.6. zīm.) ◀




**4.6. zīm.** Sistēmas (4.11) fāzes portreti.

# LITERATŪRA


[1] R.P. Agarwal, D. O'Regan. An Introduction to Ordinary Differential Eqations. - Springer, 2008.

[2] W.E. Boyce, R.C. DiPrima. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. - 2000

[3] D. Bože, L. Biezā, B. Siliņa, A. Strence. Uzdevumu krājums augstākajā matemātikā. R.:Zvaigzne, 2001.

[4] Л. Э. Эльсгольц. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. - М.:Наука, 1965.

[5] Е. А. Барбашин. Функции Ляпунова. - М.:Наука, 1970.

[6] А. М. Самойленко, С.А. Кривошея, Н.А. Перестюк. Дифференциальные уравнения примеры и задачи. - М.:Высшая школа, 1989.

[7] А.В. Васильева, Г.Н. Медведев, Н.А. Тихонов, Т. А. Уразгильдина. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах. - М.:ФИЗМАТЛИТ, 2003.

[8] А.И. Егоров. Обыкновенные дифференциальные уравнения с приложениями. 2-ое изд. - М.:ФИЗМАТЛИТ, 2005.