DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE

Matemātikas katedra

Anita Sondore, Vjačeslavs Starcevs

VISPĀRĪGĀ TOPOLOĢIJA

Uzdevumu krājums

2014

SATURS

Ievads

Uzdevumu krājumā ietverts īss teorijas izklāsts un uzdevumi, kas atbilst šādām "Vispārīgās topoloģijas" tēmām: jēdziens par topoloģisku telpu; topoloģijas bāze; punktu klasifikācija attiecībā pret kopu; topoloģiskas telpas apakštelpa; virknes konverğence topoloģiskās telpās; nepārtraukti attēlojumi, homeomorfisms; atdalāmības aksiomas, funkcionālā atdalāmība; kompaktas telpas, sakarīgas un lineāri sakarīgas telpas, topoloģisku telpu reizinājums. Uzdevumu krājumā apskatītie jautājumi atbilst DU studiju kursa "Vispārīgā topoloģija" programmai bakalauru un maģistru līmenim zinātņu nozarē "Matemātika".

Autori ir apkopojuši uzdevumus, kas ir pašu izveidoti un savākti no dažādiem literatūras avotiem (skat. literatūras sarakstu).

Literatūras sarakstā kā pamatliteratūra ir [1], [3], [4], [6], [7], [8], [9], [13], [14], [25], [26], bet kā papildliteratūra - [5], [10], [11], [12], [15], [19], [20], [21], [22], [23].

Uzdevumu krājumu var izmantot pašmācībai, tas noderēs visiem interesentiem, kas grib sākt iepazīties ar topoloģijas elementiem, grāmatas [2], [16], [17], [18], [24] no literatūras saraksta arī noderēs šim mērķim.

1. nodaļa

Pamatjēdzieni, topoloģiju salīdzināšana, metriskā topoloģija

Pieņemsim, ka X ir patvaļīga netukša kopa.

1.1. definīcija. Par **topoloģiju** kopā X sauc patvaļīgu kopas X apakškopu saimi τ, kurai izpildās šādas īpašības:

1. $\emptyset, X \in \tau$;
2. $U, V \in \tau \Rightarrow U \bigcap V \in \tau$;
3. $U_\alpha \in \tau$, $\alpha \in I \Rightarrow \bigcup\limits_{\alpha \in I} U_\alpha \in \tau$.

1.2. definīcija. Par **topoloģisku telpu** sauc patvaļīgu netukšu kopu X ar kādu topoloģiju τ.

Apzīmēsim

$$(X, \tau) - \text{topoloģiska telpa.}$$

1.3. definīcija. Pieņemsim, ka (X, τ)-topoloģiska telpa. Katru kopu $U \in \tau$ sauc par šīs telpas **vaļēju kopu**.

1.4. definīcija. Pieņemsim, ka (X, τ)-topoloģiska telpa. Kopu $F \subset X$ sauc par šīs telpas **slēgtu kopu**, ja

$$CF = X \backslash F \in \tau.$$

Ar λ apzīmēsim topoloģiskās telpas (X, τ) visu slēgto apakškopu saimi.

1.1. teorēma. Topoloģiskās telpas (X, τ) apakškopu saimei λ izpildās šādas īpašības:

1. $\emptyset, X \in \lambda$;
2. $F, G \in \lambda \Rightarrow F \bigcup G \in \lambda$;
3. $F_\alpha \in \lambda$, $\alpha \in I \Rightarrow \bigcap\limits_{\alpha \in I} F_\alpha \in \lambda$.

Salīdzināsim divas topoloģijas τ_1 un τ_2, kuras dotas vienā un tajā pašā kopā X.

1.5. definīcija. Saka, ka topoloģija τ_1 **mažorē (ir stiprāka par)** topoloģiju τ_2, savukārt, topoloģija τ_2 **minorē (ir vājāka par)** topoloģiju τ_1, ja

$$\tau_2 \subset \tau_1.$$

Atzīmēsim, ka ne vienmēr jebkuras divas topoloģijas ir salīdzināmas (skat. 1.3. uzdevumu).

Pieņemsim, ka dota metriska telpa (X, ρ). Par vaļēju lodi ar centru punktā $a \in X$ un rādiusu $r > 0$ sauc kopu

$$U(a, r) = \{x \in X \;/\; \rho(a, x) < r\}.$$

Metrisku telpu (X, ρ) var apskatīt kā topoloģiskas telpas īpašu gadījumu.

1.6. definīcija. Kopu $A \subset X$ sauksim par vaļēju kopu metriskā telpā (X, ρ), ja

$$\forall a \in A \; \exists r > 0, \text{ ka } U(a, r) \subset A.$$

Var pierādīt, ka vaļējo kopu sistēma metriskā telpā apmierina 1.1. definīciju[1]. Līdz ar to metriskas telpas (X, ρ) visu vaļējo kopu saime

$$\tau_\rho = \{G \subset X \;/\; \forall x \in G \; \exists r > 0 \; U(x, r) \subset G\}$$

veido topoloģiju kopā X, ko sauc par **metrikas noteikto topoloģiju** jeb **metrisko topoloģiju**.

1.1. uzdevums. Pieņemsim, ka X -patvaļīga netukša kopa. Pierādīt, ka kopas X apakškopu saime

$$\tau_a = \{\emptyset, X\}$$

ir topoloģija kopā X. (Topoloģiju τ_a sauc par kopas X *antidiskrēto* jeb *triviālo topoloģiju.*)

1.2. uzdevums. Pieņemsim, ka X -patvaļīga netukša kopa. Pierādīt, ka kopas X apakškopu saime

$$\tau_d = \{G \;/\; G \subset X\}$$

ir topoloģija kopā X. (Topoloģiju τ_d sauc par kopas X *diskrēto topoloģiju.*)

1.3. uzdevums. Pieņemsim, ka $X = \{a, b\}$. Pierādīt, ka kopas X apakškopu saimes

$$\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$$

$$\tau_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$$

ir topoloģijas kopā X. Salīdzināt kopas X topoloģijas τ_a, τ_d, τ_1, τ_2.

1.4. uzdevums. Uzrakstīt visas iespējamās topoloģijas kopā $X = \{a, b, c\}$. Salīdzināt šīs topoloģijas, t.i., katram topoloģiju pārim noteikt, vai tās ir salīdzināmas, un ja ir, tad noteikt stiprāko no abām topoloģijām.

1.5. uzdevums. Apskatīsim kopu $\mathbb{R}^n = \{x = (x_1; x_2; \ldots; x_n) \;/\; x_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1, n}\}$, kurā attālumu starp punktiem $x, y \in \mathbb{R}^n$ nosaka formula

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

(ja $n = 1$, tad $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ un $\rho(x, y) = |x - y|$, kur $x, y \in \mathbb{R}$).

Telpā $\mathbb{R}^n$ vaļēju lodi ar rādiusu $r \in (0; \infty)$ un centru $a \in \mathbb{R}^n$ apzīmēsim ar

$$U(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n \;/\; \rho(a, x) < r\}.$$

[1] skat. 1.20. uzdevumu

1. Pierādīt, ka šādas apakškopu saimes ir topoloģijas kopā $\mathbb{R}^n$:
   (a) $\tau_{dab} = \{V \subset \mathbb{R}^n \;/\; \forall x \in V \;\exists U(x,r) \subset V\}$ (topoloģiju τ_{dab} sauc par kopas $\mathbb{R}^n$ *dabisko* jeb *parasto topoloģiju*).
   (b) τ_{MN} - kopas $\mathbb{R}^n$ visu tādu apakškopu saime, kuras ir simetriskas pret fiksētu taisni $MN \subset \mathbb{R}^n$.
   (c) τ_S - kopas $\mathbb{R}^n$ visu tādu apakškopu saime, kuras ir simetriskas pret fiksētu punktu $S \in \mathbb{R}^n$.
   (d) $\tau_r = \{\emptyset, \mathbb{R}^n\} \bigcup \{U(O,r) \;/\; O \in \mathbb{R}^n, r > 0\}$, kur, ja $O \in \mathbb{R}^n$ $(n > 1)$, tad punkts $O = \underbrace{(0;0;\ldots;0)}_{n}$, bet, ja $O \in \mathbb{R}$, tad punkts O ir skaitlis nulle.
   (e) $\tau_{cr} = \{\emptyset, \mathbb{R}^n\} \bigcup \{C\overline{U(O,r)} \;/\; O \in \mathbb{R}^n, r > 0\}$, kur $C\overline{U(O,r)}$ ir slēgtas lodes $\overline{U(O,r)}$ papildinājums.
2. Apskatīsim kopas $\mathbb{R}^n$ patvaļīgu vienelementa apakškopu $\{x\}$. Katrā no topoloģiskajām telpām $(\mathbb{R}^n, \tau_{dab})$, $(\mathbb{R}^n, \tau_{MN})$, $(\mathbb{R}^n, \tau_S)$, $(\mathbb{R}^n, \tau_r)$ un $(\mathbb{R}^n, \tau_{cr})$ (skat. 1.5. uzdevumu 1.) noteikt, vai kopa $\{x\}$ ir
   (a) vaļēja kopa;
   (b) slēgta kopa;
   (c) vienlaicīgi vaļēja un slēgta kopa;
   (d) nav vaļēja un nav slēgta kopa?
3. Katrā no topoloģiskajām telpām $(\mathbb{R}^2, \tau_{MN})$, $(\mathbb{R}^2, \tau_S)$, $(\mathbb{R}^2, \tau_r)$, $(\mathbb{R}^2, \tau_{cr})$ minēt kādu netukšu apakškopu, kura attiecīgajā telpā ir
   (a) vaļēja kopa;
   (b) slēgta kopa;
   (c) vienlaicīgi vaļēja un slēgta kopa.
4. Pārbaudīt apgalvojumu, ka topoloģisko telpu $(\mathbb{R}^2, \tau_{MN})$ un $(\mathbb{R}^2, \tau_S)$ katra vaļēja kopa ir arī slēgta.

1.6. uzdevums. Pieņemsim, ka $\mathbb{Z}$ -veselo skaitļu kopa. Apzīmēsim

$$Z_k = \{m \in \mathbb{Z} \;/\; m \geq k, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Pierādīt, ka apakškopu saime

$$\tau = \{\mathbb{Z}, \emptyset\} \cup \{Z_k, k \in \mathbb{Z}\}$$

ir topoloģija kopā $\mathbb{Z}$. Parādīt, ka katra vienelementa kopa $\{m\}$, kur $m \in \mathbb{Z}$, nav slēgta kopa topoloģiskajā telpā $(\mathbb{Z}, \tau)$.

1.7. uzdevums. Pieņemsim, ka $\mathbb{Z}$ -veselo skaitļu kopa. Nenegatīvo veselo skaitļu kopu apzīmēsim

$$\mathbb{Z}_+ = \{m \in \mathbb{Z}, m \geq 0\},$$

bet katram $m \in \mathbb{Z}_+$ atbilstošo veselo skaitļu kopu, kas dalās ar 2^m, apzīmēsim

$$U_m = \{a \in \mathbb{Z} \;/\; a \,\vdots\, 2^m\}.$$

Pierādīt, ka apakškopu saime

$$\tau = \{\emptyset\} \cup \{U_m \;/\; m \in \mathbb{Z}_+\}$$

ir topoloģija veselo skaitļu kopā $\mathbb{Z}$.

1.8. uzdevums. Pieņemsim, ka X -patvaļīga netukša kopa, B -kopas X fiksēta apakškopa, bet $P(B)$ ir kopas B visu iespējamo apakškopu saime. Pierādīt, ka apakškopu saime

$$\tau = \{X\} \cup P(B)$$

1. ir topoloģija kopā X;
2. ir antidiskrētā topoloģija kopā X tad un tikai tad, ja $B = \emptyset$;
3. ir diskrētā topoloģija kopā X tad un tikai tad, ja $B = X$.

1.9. uzdevums. Pieņemsim, ka X -patvaļīga netukša kopa. Pierādīt, ka apakškopu saime

$$\tau_k = \{\emptyset, X\} \cup \{CG \;/\; G \subset X, G - \text{galīga kopa}\}$$

ir topoloģija kopā X. (Topoloģiju τ_k sauc par kopas X *ko-galīgo* jeb *Zariska topoloģiju.*)

1.10. uzdevums. Pieņemsim, ka X -patvaļīga bezgalīga kopa. Pierādīt, ka apakškopu saime

$$\tau_c = \{\emptyset, X\} \cup \{CG \;/\; G \subset X, G - \text{ne vairak kā sanumurējama kopa}\}$$

ir topoloģija kopā X. (Topoloģiju τ_c sauc par kopas X *ko-sanumurējamo topoloģiju.*)

1.11. uzdevums. Pieņemsim, ka X -patvaļīga netukša kopa. $f : X \to X$ ir bijektīvs attēlojums, kurš kopu X attēlo sevī. Pierādīt, ka apakškopu saime

$$\tau_f = \{U \;/\; U \subset X, f(U) = U\}$$

ir topoloģija kopā X.

1.12. uzdevums. Pieņemsim, ka (X, τ) -patvaļīga topoloģiska telpa. Apskatīsim patvaļīgu vaļēju kopu $U \subset X$ un slēgtu kopu $F \subset X$. Pierādīt, ka kopa $U \setminus F$ ir vaļēja, bet $F \setminus U$ ir slēgta kopa telpā (X, τ).

1.13. uzdevums. $\{\tau_\beta, \beta \in B\}$ -patvaļīga topoloģiju saime kopā X. Pierādīt, ka apakškopu saime

$$\tau = \bigcap_{\beta \in B} \tau_\beta$$

ir topoloģija kopā X.

1.14. uzdevums. Pieņemsim, ka $\{\tau_\beta, \beta \in B\}$ -patvaļīga topoloģiju saime kopā X. Vai apakškopu saime

$$\tau = \bigcup_{\beta \in B} \tau_\beta$$

ir topoloģija kopā X? Kopā $X = \{a, b, c\}$ atrast divas topoloģijas, kuru apvienojums nav topoloģija kopā X.

1.15. uzdevums. Patvaļīgā netukšā kopā X apskatīsim tādu topoloģiju τ_n virkni, kurām izpildās nosacījums

$$\tau_1 \subset \tau_2 \subset \ldots \subset \tau_n \subset \tau_{n+1} \subset \ldots\,.$$

Vai apakškopu saime

$$\tau = \bigcup_{n=1}^{\infty} \tau_n$$

ir topoloģija kopā X?

1.16. uzdevums. Pierādīt, ka kopas X katrai apakškopai B eksistē visvājākā topoloģija kopā X, kura satur apakškopu B.

1.17. uzdevums. Dotajai reālo skaitļu kopas $\mathbb{R}$ apakškopai B_i konstruēt visvājāko topoloģiju τ_i kopā $\mathbb{R}$, kas satur kopu B_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

1. $B_1 = \{(a; b) \;/\; a, b \in \mathbb{R};\; a < b\}$;
2. $B_2 = \{[a; b] \;/\; a, b \in \mathbb{R};\; a < b\}$;
3. $B_3 = \{[m; n] \;/\; m, n \in \mathbb{Z};\; m < n\}$;
4. $B_4 = \{[a; b) \;/\; a, b \in \mathbb{R};\; a < b\}$;
5. $B_5 = \{(a; +\infty) \;/\; a \in \mathbb{R}\}$;
6. $B_6 = \{[a; +\infty) \;/\; a \in \mathbb{R}\}$.

1.18. uzdevums. Pierādīt, ka patvaļīgā netukšā kopā X diskētā topoloģija τ_d ir visstiprākā, bet antidiskētā topoloģija τ_a ir visvājākā no visām iespējamajām topoloģijām kopā X.

1.19. uzdevums. Pieņemsim, ka $\mathbb{R}$ -reālo skaitļu kopa un apskatīsim $\mathbb{R}$ apakškopu saimi

$$\tau_{irr} = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{U \;/\; U \subset \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\}.$$

1. Pierādīt, ka apakškopu saime τ_{irr} ir topoloģija kopā $\mathbb{R}$.
2. Vai kopā $\mathbb{R}$ topoloģiju τ_{irr} var salīdzināt ar topoloģijām τ_{dab}, τ_r, τ_{cr}, τ_S?
3. Telpā $(\mathbb{R}, \tau_{irr})$ minēt vaļējas kopas piemēru un slēgtas kopas piemēru. Vai telpā $(\mathbb{R}, \tau_{irr})$ ir vienlaicīgi vaļējas un slēgtas kopas, izņemot $\emptyset$ un $\mathbb{R}$?

1.20. uzdevums. Pieņemsim, ka (X, ρ) -metriska telpa, $U(a, r) = \{x \in X \;/\; \rho(a, x) < r\}$ ir vaļēja lode telpā (X, ρ) (skat. 1.6. definīciju). Pierādīt, ka apakškopu saime

$$\tau_\rho = \{G \subset X \;/\; \forall x \in G \;\exists r > 0 \; U(x, r) \subset G\}$$

ir topoloģija kopā X.

1.21. uzdevums. Apskatīsim kopu $X = \{a, b\}$ un topoloģiju $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}\}$. Pierādīt, ka kopā X nevar ieviest metriku ρ tā, lai $\tau_\rho = \tau$ (metriskā topoloģija τ_ρ sakristu ar apskatīto topoloģiju). Šādā gadījumā saka, ka topoloģija τ nav metrizējama kopā X.

1.22. uzdevums. Pieņemsim, ka X -patvaļīga netukša kopa. $f : X \to X$ ir bijektīvs attēlojums, kurš kopu X attēlo sevī. $\tau_f = \{U \;/\; U \subset X, f(U) = U\}$ ir topoloģija kopā X (skat. 1.11. uzdevumu). Pierādīt, ka topoloģija τ_f ir metrizējama kopā X (t.i., kopā X eksistē tāda metrika ρ, ka metriskā topoloģija τ_ρ sakrīt ar topoloģiju τ_f).

1.23. uzdevums. Pieņemsim, ka X -patvaļīga netukša kopa, kura satur vismaz divus punktus, un šajā kopā dota triviālā metrika

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y; \\ 0, & x = y. \end{cases} \tag{1.1}$$

Pierādīt, ka

1. vaļējā lode ar centru punktā $x \in X$ un rādiusu $r > 0$ ir kopa

$$U(x, r) = \begin{cases} \{x\}, & 0 < r \leq 1; \\ X, & r > 1. \end{cases} \tag{1.2}$$

2. $\tau_\rho = \tau_d$.

1.24. uzdevums. Pieņemsim, ka $X = C_{[a;b]}$ ir visu nogrieznī $[a;b]$ nepārtrauktu reālā mainīgā reālo funkciju kopa. Kopā X apskatīsim divas metrikas:

$$\rho_\infty = \max_{x\in[a;b]} |f(x) - g(x)|;$$

$$\rho_2 = \sqrt{\int\limits_a^b (f(x) - g(x))^2 dx}.$$

Kāda ģeometriskā interpretācija ir vaļējai lodei metriskās topoloģijas telpā (X, τ_{ρ_∞})? Parādīt, ka metriskā topoloģija τ_{ρ_∞} ir vājāka par metrisko topoloģiju τ_{ρ_2}.

1.25. uzdevums. Pieņemsim, ka (X, ρ) -patvaļīga metriska telpa. Katram $x, y \in X$ noteiksim, ka

$$\rho^*(x, y) = \frac{\rho(x, y)}{1 + \rho(x, y)}.$$

Pierādīt, ka $\rho^*(x, y)$ ir metrika kopā X un abas metrikas ρ un ρ^* nosaka vienu un to pašu topoloģiju, t.i., $\tau_\rho = \tau_{\rho^*}$.

1.26. uzdevums. Reālo skaitļu kopā $\mathbb{R}$ salīdzināt šādas topoloģijas: $\tau_a, \tau_d, \tau_{dab}$ un τ_k.

2. nodaļa

Topoloģijas bāze

2.1. definīcija. Pieņemsim, ka (X,τ)-topoloģiska telpa, punkts $x \in X$. Kopu $U(x) \subset X$ sauc par **punkta x vaļēju apkārtni**, ja

1. $x \in U(x)$;
2. $U(x) \in \tau$.

Apzīmēsim

$$\tau(x) \text{ – punkta } x \text{ visu vaļējo apkārtņu saime topoloģiskā telpā } (X,\tau).$$

2.1. teorēma. Topoloģiskās telpas (X,τ) punkta $x \in X$ vaļējo apkārtņu saimei $\tau(x)$ izpildās šādas īpašības:

1. $\forall\, x \in X$ saime $\tau(x)$ ir netukša, pie tam $\forall\, U \in \tau(x)$ punkts $x \in U$;
2. $U,\ V \in \tau(x) \Rightarrow U \cap V \in \tau(x)$;
3. $U \in \tau(x)$ un $y \in U \Rightarrow U \in \tau(y)$.

2.2. definīcija. Pieņemsim, ka (X,τ)-topoloģiska telpa, punkts $x \in X$. Par **punkta x apkārtni** sauc jebkuru tādu kopu $A \subset X$, ja eksistē kopa $U(x) \in \tau(x)$, kurai $U(x) \subset A$.

Apzīmēsim

$$\mathcal{O}(x) \text{ – punkta } x \text{ visu apkārtņu saime topoloģiskā telpā } (X,\tau).$$

Skaidrs, ka punkta vaļējo apkārtņu saimi ar apkārtņu saimi saista šāda sakarība

$$\forall\, x \in X:\ \tau(x) \subset \mathcal{O}(x).$$

2.2. teorēma. Topoloģiskās telpas (X,τ) punkta $x \in X$ apkārtņu saimei $O(x)$ izpildās šādas īpašības:

1. Ja kopa $A \in \mathcal{O}(x)$, tad punkts $x \in A$;
2. Ja kopas $A_1, A_2 \in \mathcal{O}(x)$, tad $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{O}(x)$;
3. Ja kopa $A \in \mathcal{O}(x)$ un $A \subset B$, tad $B \in \mathcal{O}(x)$.
4. Ja kopa $A \in \mathcal{O}(x)$, tad eksistē tāda kopa B, $B \subset A$, ka katram punktam $y \in B$ kopa $B \in \mathcal{O}(y)$.

2.3. definīcija. Pieņemsim, ka (X, τ)-topoloģiska telpa, $x \in X$. Punkta x vaļējo apkārtņu saimi $B(x) \subset \tau(x)$ sauc par topoloģijas τ **lokālo bāzi punktā** x, ja katrai punkta x vaļējai apkārtnei $U \in \tau(x)$ eksistē tāda kopa $V \in B(x)$, ka $V \subset U$.

2.3. teorēma. Pieņemsim, ka X -patvaļīga netukša kopa, un katram punktam $x \in X$ eksistē lokālā bāze $B(x)$. Tad ir spēkā šādas īpašības:

1. $\forall\, x \in X$ apakškopu saime $B(x)$ ir netukša, pie tam $\forall\, U \in B(x)$ punkts $x \in U$;
2. $\forall\, x \in X$ un $\forall\, U, V \ \in B(x) \Rightarrow \exists\, W \in B(x)$, ka $W \subset U \cap V$;
3. $\forall\, x \in X$ un $\forall\, U \ \in B(x)$ un $\forall y \in U \Rightarrow \exists\, V \in B(y)$, ka $V \subset U$.

2.4. definīcija. Pieņemsim, ka (X, τ)-topoloģiska telpa. Apakškopu saimi $B \subset \tau$ sauc par **topoloģijas τ bāzi**, ja katrai vaļējai netukšai kopai $U \in \tau$ un $\forall\, x \in U\ \exists\, V \in B$, ka $x \in V \subset U$.

2.4. teorēma. Pieņemsim, ka (X, τ)-topoloģiska telpa un $B \subset \tau$. Apakškopu saime B ir topoloģijas τ bāze tad un tikai tad, ja katrai vaļējai netukšai kopai $U \in \tau$ eksistē tādas kopas $V_\alpha \in B$, $(\alpha \in I)$, ka

$$U = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha .$$

2.5. teorēma. Dota kopa X un tās apakškopu saime $B \subset P(X)$. B ir kopas X kaut kādas topoloģijas τ bāze tad un tikai tad, ja:

1. $\forall\, x \in X \Rightarrow \exists\, V \in B$, ka $x \in V$;
2. $\forall\, V_1,\ V_2 \in B$ un $\forall\, x \in V_1 \cap V_2 \Rightarrow \exists\, V \in B$, ka $x \in V \subset V_1 \cap V_2$.

2.5. definīcija. Pieņemsim, ka (X, τ)-topoloģiska telpa. Kopas X apakškopu saimi C sauc par **topoloģijas τ priekšbāzi**, ja τ ir pati vājākā topoloģija, kas aptver saimi C.

2.6. definīcija. Pieņemsim, ka (X, τ)-topoloģiska telpa. Par **raksturu** jeb **lokālo svaru punktā** $x \in X$ sauc minimālās lokālās bāzes punktā x apjomu.

Apzīmēsim

$$\chi(x, (X, \tau)) - \text{raksturs punktā } x \in X.$$

2.7. definīcija. Par **topoloģiskas telpas** (X, τ) **raksturu** sauc lielāko no visiem raksturiem punktos $x \in X$.

Apzīmēsim

$$\chi(X, \tau) - \text{topoloģiskas telpas } (X, \tau) \text{ raksturs.}$$

Tātad

$$\chi(X, \tau) = \max_{x \in X} \chi(x, (X, \tau)).$$

2.8. definīcija. Par **topoloģiskas telpas** (X, τ) **svaru** sauc minimālās bāzes apjomu.

Apzīmēsim

$$s(X, \tau) - \text{topoloģiskas telpas } (X, \tau) \text{ svars.}$$

2.9. definīcija. Ja $\chi(X, \tau) \leq \aleph_o$, tad topoloģiskā telpa (X, τ) apmierina **pirmo sanumurējamības aksiomu**.

2.10. definīcija. Ja $s(X, \tau) \leq \aleph_o$, tad topoloģiskā telpa (X, τ) apmierina **otro sanumurējamības aksiomu**.

Tātad, ja topoloģijai eksistē galīga vai sanumurējama bāze, t.i., $s(X,\tau) \leq \aleph_o$, tad topoloģiskā telpa apmierina otro sanumurējamības aksiomu. Ja katrā punktā $x \in X$ eksistē galīga vai sanumurējama lokālā bāze $B(x)$, t.i., $\chi(X,\tau) \leq \aleph_o$, tad topoloģiskā telpa apmierina pirmo sanumurējamības aksiomu.

2.6. teorēma. Topoloģiskas telpas (X,τ) raksturs nepārsniedz telpas svaru, t.i.,

$$\chi(X,\tau) \leq s(X,\tau).$$

2.1. sekas. Ja topoloģiska telpa (X,τ) apmierina otro sanumurējamības aksiomu, tad tā apmierina arī pirmo sanumurējamības aksiomu.

2.1. uzdevums. Pieņemsim, ka X -patvaļīga netukša kopa, punkts $x \in X$. Apskatīsim kopas X apakškopu saimi

$$\tau_x = \{\emptyset, X, \{x\}\}.$$

Pierādīt, ka

1. τ_x ir topoloģija kopā X;
2. katra apakškopa $V \subset X$, kurai $x \in V$, ir punkta x apkārtne topoloģiskā telpā (X,τ_x);
3. kopa $\{x\}$ ir punkta x vaļēja apkārtne topoloģiskā telpā (X,τ_x);
4. katram punktam $y \in X$, kuram $y \neq x$, tikai kopa X ir šī punkta apkārtne topoloģiskā telpā (X,τ_x).

2.2. uzdevums. Pieņemsim, ka X -patvaļīga netukša kopa, $x \in X$. Apskatīsim kopas X apakškopu saimi

$$\tau = \{\emptyset, G \ / \ G \subset X, x \in G\}.$$

Pierādīt, ka

1. τ ir topoloģija kopā X;
2. katra punkta x apkārtne topoloģiskā telpā (X,τ) ir arī šī punkta vaļēja apkārtne.

2.3. uzdevums. Pieņemsim, ka X -patvaļīga netukša kopa, $x \in X$. Apskatīsim kopas X apakškopu saimi

$$\tau = \{X, G \ / \ G \subset X, x \in X \backslash G\}.$$

Pierādīt, ka

1. τ ir topoloģija kopā X;
2. topoloģiskā telpā (X,τ) katra punktam $y \in X$, kuram $y \neq x$, kopa $\{y\}$ ir punkta y vaļēja apkārtne, bet kopa $\{x,y\}$ ir punkta y apkārtne, kura nepieder x apkārtņu saimei $\mathcal{O}(x)$.

2.4. uzdevums. Pieņemsim, ka X -patvaļīga netukša kopa un katram punktam $x \in X$ eksistē kopas X apakškopu saime $B(x)$, kas apmierina 2.3. teorēmā uzskaitītās īpašības. Apskatīsim kopas X apakškopu saimi

$$\tau = \{\emptyset, G \ / \ G \subset X, \ \forall x \in G \ \exists U \in B(x) : \ U \subset G\}.$$

Pierādīt, ka

1. τ ir topoloģija kopā X;

2. topoloģiskā telpā (X, τ) katram punktam x apakškopu saime $B(x)$ ir lokālā bāze punktā x .

2.5. uzdevums. Pieņemsim, ka $\mathbb{R}$ ir reālo skaitļu kopa un katram punktam $x \in \mathbb{R}$ izveidosim apakškopu saimi

$$B(x) = \{[x; x+r) \ / \ r \ > \ 0\}.$$

Pierādīt, ka apakškopu saimei $\{B(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ izpildās 2.3. teorēmā uzskaitītās īpašības, un, saskaņā ar 2.4. uzdevumu, kopas $\mathbb{R}$ apakškopu saime

$$\tau_b = \{\emptyset, G \ / \ G \subset \mathbb{R}, \ \forall x \in G \ \exists r > 0 : \ U = [x; x+r) \subset G\},$$

ir topoloģija kopā $\mathbb{R}$. Topoloģisko telpu $(\mathbb{R}, \tau_b)$ sauc par *Zorgenfreija telpu* jeb *bultiņas topoloģisko telpu.*

2.6. uzdevums. Apskatīsim Zorgenfreija telpu $(\mathbb{R}, \tau_b)$ (skat. 2.5. uzdevumu).

1. Pierādīt, ka Zorgenfreija topoloģija τ_b ir stiprāka par parasto topoloģiju τ_{dab} kopā $\mathbb{R}$, t.i., $\tau_{dab} \subset \tau_b$. Minēt piemēru, kas parāda, ka neizpildās sakarība $\tau_b \subset \tau_{dab}$.
2. Pierādīt, ka telpā $(\mathbb{R}, \tau_b)$, ja $a \in \mathbb{R}$ un $b \in \mathbb{R}$,
   (a) intervāls $(a; b)$, kur $a \le b$, ir vaļēja kopa;
   (b) intervāli $(-\infty; a)$ un $[b; +\infty)$ ir vaļējas kopas;
   (c) $\{a\}$ ir slēgta, bet nav vaļēja kopa;
   (d) intervāls $[a; b)$, kur $a < b$, ir vienlaicīgi slēgta un vaļēja kopa;
3. Telpā $(\mathbb{R}, \tau_b)$ minēt vaļējas (slēgtas) kopas piemēru, kura nav slēgta (vaļēja) kopa.

2.7. uzdevums. Pieņemsim, ka $\mathbb{R}^2_+ = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x_2 > 0\}$ ir plaknes $\mathbb{R}^2$ augšējā pusplakne. Apzīmēsim:
$L = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ / \ x_2 = 0\}$ ir plaknes $\mathbb{R}^2$ abscisu ass,
$X = \mathbb{R}^2_+ \cup L$.
Katram kopas X punktam $x \in X$ apskatīsim apakškopu saimi $B(x) = \{\mathcal{V}(x; \epsilon)\}$, kura sastāv no punkta x vaļējām apkārtnēm

$$\mathcal{V}(x, \epsilon) = \begin{cases} \{x\} \cup U((x_1; \epsilon); \epsilon), \ \epsilon > 0, & ja \ x = (x_1; 0) \ \in L; \\ U(x; \epsilon), \ 0 < \epsilon \le x_2, & ja \ x = (x_1; x_2) \ \in \mathbb{R}^2_+. \end{cases} \tag{2.1}$$

Pierādīt, ka apakškopu saimei $B(x)$ izpildās 2.3. teorēmā uzskaitītās īpašības, un, saskaņā ar 2.4. uzdevumu, kopas X apakškopu saime

$$\tau_N = \{\emptyset, G \ / \ G \subset X, \ \forall x \in G \ \exists \epsilon > 0 : \ \mathcal{V}(x, \epsilon) \subset G\},$$

ir topoloģija kopā X.
Topoloģisko telpu (X, τ_N) sauc par *Nemicka plakni.*

2.8. uzdevums. Katrai no topoloģijām τ_i, kur $i = \overline{1, 6}$, no 1.17. uzdevumu, noteikt, vai taisnes $\mathbb{R}$ apakškopu saime A_j, kur $j = \overline{1, 7}$, ir lokālā bāze punktā 0.

1. $A_1 = \{\{0\}\}$;
2. $A_2 = \{(\epsilon; +\infty), \ \epsilon > 0\}$;
3. $A_3 = \{(-\epsilon; \epsilon), \ \epsilon > 0\}$;
4. $A_4 = \{[0; \epsilon), \ \epsilon > 0\}$;
5. $A_5 = \{(-1; 1)\}$;

6. $A_6 = \{(-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}),\ n \in \mathbb{N}\}$;
7. $A_7 = \{\mathbb{R}\}$.

2.9. uzdevums. Pieņemsim, ka X -patvaļīga netukša kopa un katram punktam $x \in X$ izveidosim divas vaļējo apkārtņu saimes $B_1(x)$ un $B_2(x)$, τ_1 un τ_2 ir šīm saimēm atbilstošās topoloģijas kopā X:

$$\tau_1 = \{\emptyset, G \ / \ G \subset X,\ \forall x \in G\ \exists U \in B_1(x) :\ U \subset G\};$$

$$\tau_2 = \{\emptyset, G \ / \ G \subset X,\ \forall x \in G\ \exists U \in B_2(x) :\ U \subset G\}.$$

Pierādīt, ka

1. topoloģija τ_2 ir stiprāka par τ_1 tad un tikai tad, ja katram punktam $x \in X$ un katrai kopai $U_1(x) \in B_1(x)$ eksistē tāda kopa $U_2(x) \in B_2(x)$, ka $U_2(x) \subset U_1(x)$;
2. kopas X apakškopu saimes $\{B_1(x)\}_{x \in X}$ un $\{B_2(x)\}_{x \in X}$ nosaka vienu un to pašu topoloģiju kopā X, tad un tikai tad, ja katram punktam $x \in X$, katrai kopai $U_1(x) \in B_1(x)$ un katrai kopai $U_2(x) \in B_2(x)$ eksistē tādas kopas $V_1(x) \in B_1(x)$ un $V_2(x) \in B_2(x)$, ka $V_1(x) \subset U_2(x)$ un $V_2(x) \in U_1(x)$.

2.10. uzdevums. Pārbaudīt, ka taisnes $\mathbb{R}$ apakškopu sistēmas B_i ir kaut kādas topoloģijas τ_i bāze ($i = \overline{1,5}$), pie tam $\tau_1 = \tau_{dab}$:

1. $B_1 = \{(a; b) \mid a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$;
2. $B_2 = \{[a; b) \mid a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$;
3. $B_3 = B_1 \cup \{U \setminus K \mid U \in B_1,\ K = \{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}\}$;
4. $B_4 = \{(a; +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$;
5. $B_5 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{a \mid a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{I}\}$;

2.11. uzdevums. Salīdzināt topoloģijas τ_i $(i = \overline{1,5})$ no 2.10. uzdevuma, τ_S, τ_r no 1.5. uzdevuma, kā arī ko-galīgo topologiju τ_k no 1.9. uzdevuma. Visas topoloģijas apskatīt kopā $\mathbb{R}$.

2.12. uzdevums. Pierādīt, ka

$$B_1^* = \{(a; b) \mid a, b \in \mathbb{Q},\ a < b\}$$

ir parastās topoloģijas τ_{dab} kopā $\mathbb{R}$ sanumurējama bāze.

2.13. uzdevums. Pierādīt, ka

$$B = \{U(a; r) \mid a \in \mathbb{Q}^n,\ r \in \mathbb{Q},\ r > 0\}$$

ir parastās topoloģijas τ_{dab} kopā $\mathbb{R}^n$ sanumurējama bāze.

2.14. uzdevums. Atrast minimālo bāzi topoloģijām τ_d, τ_{MN} un τ_S kopā $\mathbb{R}^n$ no 1.5. uzdevuma.

2.15. uzdevums. Pierādīt, ka topoloģijas τ_d, τ_{MN}, τ_S kopā $\mathbb{R}^n$ no 1.5. uzdevuma apmierina pirmo sanumurējamības aksiomu, bet neapmierina otro sanumurējamības aksiomu.

2.16. uzdevums. Pārbaudīt, kāda no sanumurējamības aksiomām izpildās telpā:

1. $(\mathbb{R}^2, \tau_d)$;

2. $(\mathbb{R}^2, \tau_a)$;
3. $(\mathbb{R}^2, \tau_{dab})$;
4. $(\mathbb{R}^2, \tau_r)$ (skat. 1.5. uzdevumu).

2.17. uzdevums. Pieņemsim, ka $\mathbb{N}$ -naturālo skaitļu kopa un τ_k ko-galīgā topoloģija kopā $\mathbb{N}$.

$$\tau_k = \{\emptyset,\ \mathbb{N},\ \mathbb{N} \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_s\} \mid a_i \in \mathbb{N}, i = \overline{1, s},\ s \in \mathbb{N}\}.$$

1. Pierādīt, ka apakškopu sistēma τ_k ir sanumurējama, tāpēc topoloģiskā telpa $(\mathbb{N}, \tau_k)$ apmierina otro sanumurējamības aksiomu.
2. Atrast topoloģiskās telpas $(\mathbb{N}, \tau_k)$ bāzi, kura nesakrīt ar τ_k.

2.18. uzdevums. Pieņemsim, ka X -patvaļīga netukša kopa un τ_k ko-galīgā topoloģija kopā X (skat. 1.9. uzdevumu). Pierādīt,

1. ka topoloģiskā telpa (X, τ_k) apmierina otro sanumurējamības aksiomu tad un tikai tad, ja X ir sanumurējama vai galīga kopa;
2. ja X ir nesanumurējama kopa, topoloģiskā telpa (X, τ_k) neapmierina ne pirmo, ne otro sanumurējamības aksiomu, pie tam kopas X nevienā punktā neeksistē sanumurējama lokāla bāze.

2.19. uzdevums. Pieņemsim, ka $\mathbb{N}$ -naturālo skaitļu kopa un τ_d diskrētā topoloģija kopā $\mathbb{N}$. Pierādīt, ka vienelementu kopu sistēma $B = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \ldots\}$ ir topoloģijas τ_d minimālā bāze.

2.20. uzdevums. Pieņemsim, ka X -patvaļīga netukša kopa. Atrast diskrētās topoloģijas τ_d kopā X minimālo bāzi.

2.21. uzdevums. Pieņemsim, ka X -patvaļīga netukša kopa. Atrast antidiskrētās topoloģijas τ_a kopā X visas iespējamās bāzes.

2.22. uzdevums. Parādīt, ka sistēma $P = \{(a; +\infty)\} \cup \{(-\infty; b)\}$, kur $a, b \in \mathbb{R}$, ir priekšbāze parastai topoloģijai τ_{dab} kopā $\mathbb{R}$.

2.23. uzdevums. Aplūkosim plaknes punktu kopu $\mathbb{R}^2$, kurā izveidota topoloģija, kuras priekšbāze ir visu plaknes taišņu kopa. Raksturot šīs topoloģijas elementus un noteikt, kas ir šī topoloģija.

2.24. uzdevums. Aplūkosim plaknes punktu kopu $\mathbb{R}^2$, kurā izveidota topoloģija τ_l, kuras priekšbāze ir visu fiksētai taisnei $l \in \mathbb{R}^2$ paralēlo plaknes taišņu saime.

1. Raksturot topoloģijas τ_l elementus.
2. Salīdzināt topoloģiju τ_l ar parasto topoloģiju τ_{dab} un 2.23. uzdevumā konstruēto topoloģiju kopā $\mathbb{R}^2$.
3. Pierādīt, ka topoloģiskā telpa $(\mathbb{R}^2, \tau_l)$ neapmierina otro sanumurējamības aksiomu.

2.25. uzdevums. Pierādīt, ka Zorgenfreija topoloģiskā telpa $(\mathbb{R}, \tau_b)$ no 2.5. uzdevuma apmierina pirmo sanumurējamības aksiomu, bet neapmierina otro sanumurējamības aksiomu.

2.26. uzdevums. Pieņemsim, ka X -patvaļīga nesanumurējama kopa un ρ -triviālā metrika kopā X (skat. 1.23. uzdevumu). Pierādīt, ka topoloģiskā telpa (X, τ_ρ), kur τ_ρ ir metriskā topoloģija, apmierina pirmo sanumurējamības aksiomu, bet neapmierina otro sanumurējamības aksiomu.

2.27. uzdevums. Pierādīt, ka Nemicka topoloģiskā telpa (X, τ_N) no 2.7. uzdevuma apmierina pirmo sanumurējamības aksiomu, bet neapmierina otro sanumurējamības aksiomu.

2.28. uzdevums. Ar B apzīmēsim kopu, kura sastāv no taisnes $\mathbb{R}$ visiem vaļējiem intervāliem parastajā topoloģijā un vēl šādām kopām

$$(\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}) \cap (-r; r),$$

kur $r > 0$. Pierādīt, ka saime B ir kādas topoloģijas kopā $\mathbb{R}$ bāze. (Šo topoloģiju apzīmēsim τ_{kur} un sauksim par *Kuratovska* topoloģiju.)

2.29. uzdevums. Pieņemsim, ka $X = \mathbb{R}^2$, katram punktam $x \in X$ apskatīsim kopu

$$U(x) = \{U(x, \epsilon) \setminus A\} \cup \{x\},$$

kur $\epsilon > 0$ un A ir vaļējā riņķa $U(x, \epsilon)$ vertikālā diametra punktu kopa. Pierādīt, ka

1. saime $\{U(x)\} \mid \epsilon > 0,\ x \in X\}$ ir kādas topoloģijas kopā $X = \mathbb{R}^2$ bāze (šo topoloģiju apzīmēsim $\ddot{\tau}$ un sauksim par *"taureņu"* topoloģiju);
2. katram punktam $x \in X$ saime $\{U(x)\} \mid \epsilon > 0,\ x \in X\}$ ir lokālā bāze šājā punktā x;
3. topoloģija $\ddot{\tau}$ ir stiprāka par parasto topoloģiju τ_{dab} kopā $\mathbb{R}^2$;
4. topoloģiskā telpa $(\mathbb{R}^2, \ddot{\tau})$ apmierina otro sanumurējamības aksiomu.

2.30. uzdevums. Izmainīsim "taureņu" topoloģiju $\ddot{\tau}$, skat. 2.29. uzdevumu. Katram punktam $x \in \mathbb{R}^2$ apskatīsim kopu

$$U'(x) = \{U(x, \epsilon) \setminus A'\} \cup \{x\},$$

kur $\epsilon > 0$ un A' ir vaļējā riņķa $U(x, \epsilon)$ horizontālā diametra punktu kopa. Pierādīt, ka

1. saime $\{U'(x)\} \mid \epsilon > 0,\ x \in \mathbb{R}^2\}$ ir kādas topoloģijas kopā $\mathbb{R}^2$ bāze (šo topoloģiju apzīmēsim $\ddot{\tau}'$ un sauksim par '*'apgriezto taureņu"* topoloģiju);
2. katram punktam $x \in \mathbb{R}^2$ saime $\{U'(x)\} \mid \epsilon > 0,\ x \in \mathbb{R}^2\}$ ir lokālā bāze šajā punktā x;
3. topoloģijas $\ddot{\tau}$ un $\ddot{\tau}'$ kopā $\mathbb{R}^2$ nevar salīdzināt;
4. kopu saime $\ddot{\tau} \cap \ddot{\tau}'$ ir parastā topoloģija kopā $\mathbb{R}^2$.

2.31. uzdevums. Pieņemsim, ka X -patvaļīga netukša kopa, bet $\mathcal{B} \subset P(X)$ - patvaļīga kopas X apakškopu saime. Apzīmēsim

$$B = \{U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n \mid U_1, U_2, \ldots, U_n \in \mathcal{B}\},$$

kur $n \in \mathbb{N}$, t.i., B ir saimes B elementu visu galīgo šķēlumu sistēma, savukārt $\widetilde{B} = \cup V_\alpha,\ V_\alpha \in B$ ir sisēmas B elementu visu iespējamo apvienojumu sistēma.

Pierādīt, ka kopu saime

1. $\tau = \{\emptyset, X, \widetilde{B}\}$ ir topoloģija kopā X;
2. $\{X, B\}$ ir topoloģijas $\tau = \{\emptyset, X, \widetilde{B}\}$ bāze kopā X;
3. $\{X, \mathcal{B}\}$ ir topoloģijas $\tau = \{\emptyset, X, \widetilde{B}\}$ priekšbāze kopā X.

2.32. uzdevums. Pieņemsim, ka kopa $X = \{a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \Delta\}$.

1. Pierādīt, ka saime $\{\{\Delta\}, \{a, \Delta\}, \{b, \Delta\}, \{c, \Delta\}, \{\alpha, b, c, \Delta\}, \{\beta, c, a, \Delta\}, \{\gamma, a, b, \Delta\}\}$ ir kādas topoloģijas τ_Δ kopā X bāze.

2. Norādīt, kādas vienelementu kopas topoloģiskajā telpā (X, τ_Δ) ir slēgtas.
3. Kāda ir kopu no topoloģijas τ_Δ un slēgtu kopu ģeometriskā jēga, ja pieņem, ka Δ apzīmē trijstūri plaknē, kura virsotnes ir α, β un γ, bet a, b un c ir atbilstošajām virsotnēm pretējās malas?

2.33. uzdevums. Apskatīsim kopu X, kas sastāv no 15 punktiem, kuri atbilst tetraedram un tetraedra 4 skaldnēm, 6 šķautnēm un 4 virsotnēm. Vadoties pēc 2.32. uzdevuma parauga, konstruēt topoloģisko telpu kopā X.

2.34. uzdevums. Topoloģisko telpu (X, τ) sauc par Lindelēva telpu (jeb telpa X, τ apmierina Lindelēva īpašību), ja no katra vaļeēju kopu sistēmas $\{G_\alpha,\ \alpha \in I\}$ apvienojuma $G = \bigcup\limits_{\alpha \in I} G_\alpha$ var izdalīt ne vairāk kā sanumurējamu apakšsistēmu $\{G_n,\ n \in K,\ K \subset \mathbb{N}\}$ ar apvienojumu G, t.i., $G = \bigcup\limits_{n \in K} G_n$.

Pierādīt, ka katra topoloģiska telpa (X, τ) ar otro sanumurējamības aksiomu ir Lindelēva telpa. Minēt Lindelēva telpas (X, τ) piemēru, kas neapmierina otro sanumurējamības aksiomu.

3. nodaļa

Punktu klasifikācija attiecībā pret kopu

Apskatīsim topoloģisku telpu (X, τ) un kopas X patvaļīgu apakškopu $A \subset X$.

3.1. definīcija. Punktu $x \in X$ sauc par **kopas** A **kontaktpunktu**, ja punkta x katra vaļēja apkārtne U šķeļas netukši ar kopu A:

$$U \cap A \neq \emptyset.$$

3.2. definīcija. Punktu $x \in X$ sauc par **kopas** A **robežpunktu**, ja punkta x katra vaļēja apkārtne U šķeļas netukši gan ar kopu A, gan tās papildinājumu:

$$U \cap A \neq \emptyset;$$

$$U \cap (X \setminus A) \neq \emptyset.$$

3.3. definīcija. Punktu $x \in X$ sauc par **kopas** A **iekšējo punktu**, ja punktam x eksistē tāda vaļēja apkārtne U, kas ietilpst kopā A:

$$U \subset A.$$

3.4. definīcija. Punktu $x \in X$ sauc par **kopas** A **izolēto punktu**, ja punktam x eksistē vaļēja apkārtne U, kuras šķēlums ar kopu A ir tieši pats punkts x:

$$U \cap A = \{x\}.$$

3.5. definīcija. Punktu $x \in X$ sauc par **kopas** A **ārienes punktu**, ja punktam x eksistē tāda vaļēja apkārtne U, kura nešķeļas ar kopu A:

$$U \cap A = \emptyset.$$

3.6. definīcija. Punktu $x \in X$ sauc par **kopas** A **akumulācijas punktu**, ja punkta x katra izdurta vaļēja apkārtne $\mathring{U}$ (šeit: $\mathring{U} = U \setminus \{x\}$, kur kopa U ir punkta x vaļēja apkārtne) šķeļas netukši ar kopu A:

$$\mathring{U} \cap A \neq \emptyset.$$

Katram jēdzienam pēc jēdziena definīcijas (no 3.7. definīcijas līdz 3.11. definīcijai) uzskaitīsim biežāk lietotos apzīmējumus.

3.7. definīcija. Par kopas **slēgumu** sauc visu šīs kopas kontaktpunktu kopu.

Kopas A slēgumu apzīmē $cl\ A$, $\overline{A}$, $[A]$.

3.8. definīcija. Par kopas **robežu** sauc visu šīs kopas robežpunktu kopu.

Kopas A robežu apzīmē $Fr\ A$, $\gamma\ A$, δA.

3.9. definīcija. Par kopas **iekšieni** sauc visu šīs kopas iekšējo punktu kopu.

Kopas A iekšieni apzīmē $Int\ A$, A^0, $]A[$.

3.10. definīcija. Par kopas **ārieni** sauc visu šīs kopas ārējo punktu kopu.

Kopas A ārieni apzīmē $Ext\ A$.

3.11. definīcija. Par kopas **atvasināto kopu** sauc visu šīs kopas akumulācijas punktu kopu.

Kopas A atvasināto kopu apzīmē A^d, A'.

3.12. definīcija. Kopu A sauc par **visur blīvu**, ja $\overline{A} = X$.

3.13. definīcija. Kopu A sauc par **nekur neblīvu**, ja $Int\ \overline{A} = \emptyset$.

3.14. definīcija. Par topoloģiskās telpas (X, τ) **blīvumu** sauc par minimālās visur blīvās apakškopas apjomu.

Apzīmēsim

$$d(X, \tau) - \text{topoloģiskas telpas } (X, \tau) \text{ blīvums.}$$

3.15. definīcija. Ja $d(X, \tau) \leq \aleph_o$, tad topoloģisko telpu (X, τ) sauc par **separablu** telpu.

3.1. uzdevums. Pieņemsim, ka (X, τ) - topoloģiska telpa, $A \subset X$, $B \subset X$, bet λ ir topoloģiskas telpas (X, τ) visu slēgto apakškopu saime. Pierādīt šādas īpašības:

1. $\overline{\emptyset} = \emptyset$;
2. $\overline{X} = X$;
3. $A \subset \overline{A}$;
4. $\overline{A} = \cap\{F \mid F \in \lambda,\ F \supset A\}$;
5. Ja $A \subset B$, tad $\overline{A} \subset \overline{B}$;
6. $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$;
7. $A \in \lambda$ tad un tikai tad, ja $A = \overline{A}$.

3.2. uzdevums. Pieņemsim, ka (X, τ) - topoloģiska telpa, $A \subset X$, $B \subset X$, bet λ ir topoloģiskas telpas (X, τ) visu slēgto apakškopu saime. Pierādīt šādas īpašības:

1. $\overline{A} = A \setminus Fr\ A$;
2. $Fr\ A = \overline{A} \cap \overline{X \setminus A}$;
3. $Fr\ (X \setminus A) = FrA$;
4. $Fr\ \overline{A} \subset FrA$;
5. $Fr\ (IntA) \subset FrA$;
6. $A \in \tau$ (kopa A ir vaļēja) tad un tikai tad, ja $FrA = \overline{A} \setminus A$;

7. $A \in \lambda$ (kopa A ir slēgta) tad un tikai tad, ja $FrA = A \setminus intA$;
8. Kopa A ir vaļēja un slēgta tad un tikai tad, ja $FrA = \emptyset$.

3.3. uzdevums. Pieņemsim, ka (X, τ) - topoloģiska telpa, $A \subset X$, $B \subset X$. Pierādīt šādas īpašības:

1. $int\, \emptyset = \emptyset$;
2. $int\, X = X$;
3. $intA \subset A$;
4. $intA = \cup\{U \mid U \in \tau,\ U \subset A\}$;
5. Ja $A \subset B$, tad $intA \subset intB$;
6. $int(intA) = intA$;
7. $intA = X \setminus \overline{(X \setminus A)}$;
8. $A \in \tau$ (kopa A ir vaļēja) tad un tikai tad, ja $A = intA$.

3.4. uzdevums. Atrast dotās kopas slēgumu, iekšieni un robežu:

1. topoloģiskā telpā $(\mathbb{R}, \tau_{dab})$, kur τ_{dab} ir parastā topoloģija:
   (a) $(a; b)$, kur $a, b \in \mathbb{R}$ un $a < b$;
   (b) $[a; b]$, kur $a, b \in \mathbb{R}$ un $a < b$;
   (c) $[a; b)$, kur $a, b \in \mathbb{R}$ un $a < b$;
   (d) $[a; +\infty)$, kur $a \in \mathbb{R}$;
   (e) $(-\infty; a)$, kur $a \in \mathbb{R}$;
   (f) $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$;
   (g) $\{a\}$, kur $a \in \mathbb{R}$;
   (h) $\{a_1; a_2; \ldots a_k\}$, kas sastāv no galīga punktu skaita k un $a_i \in \mathbb{R}$, ja $i = \overline{1, k}$.
2. topoloģiskā telpā $(\mathbb{R}^2, \tau_{dab})$, kur τ_{dab} ir parastā topoloģija:
   (a) $A_1 = U(0; 1) \cup \{(1; -2)\}$;
   (b) $A_2 = \{(x; y) \mid x, y \in \mathbb{R},\ x^2 + y^2 = 1\}$;
   (c) A_3 ir patvaļīga kopas $\mathbb{R}^2$ galīga apakškopa;
   (d) $A_4 = \{(x; y) \mid x \in \mathbb{R},\ 0 < x < y,\ y = 0\}$;
   (e) $A_5 = CU(0; 2)$;
   (f) $A_6 = [0; 1] \times [0; 1]$;
   (g) $A_7 = [0; 1) \times [0; 1)$;
   (h) $A_8 = \{(x; y) \mid x \in \mathbb{Q},\ y \in \mathbb{R}\}$;
   (i) $A_9 = \{(x; y) \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$;
   (j) $A_{10} = \{(x; y) \mid x, y \in \mathbb{R},\ x > 0,\ y \neq 1\}$.
3. kopai $[0; 1]$ topoloģiskā telpā $(\mathbb{R}, \tau_{irr})$ (skat. 1.19. uzdevumu).

3.5. uzdevums. Topoloģiskā telpā $(\mathbb{R}^2, \tau_{dab})$, kur τ_{dab} ir parastā topoloģija, apskatīsim divas kopas

$$A = \{(x; y) \mid (x; y) \in \mathbb{R}^2,\ y = \sin\frac{1}{x},\ 0 < x \leq \pi\},$$

$$B = \{(x; y) \mid (x; y) \in \mathbb{R}^2,\ x = 0,\ -1 \leq y \leq 1\}.$$

Pārbaudīt, ka $\overline{A} = A \cup B$.

3.6. uzdevums. Katrā no sešām topoloģiskajām telpām $(\mathbb{R}^2, \tau_S)$, $(\mathbb{R}^2, \tau_{MN})$, $(\mathbb{R}^2, \tau_r)$, $(\mathbb{R}^2, \tau_{cr})$, $(\mathbb{R}^2, \tau_k)$, $(\mathbb{R}^2, \tau_d)$ (skat. 1.2. uzdevumu, 1.5. uzdevumu un 1.9. uzdevumu) noteikt kopas A slēgumu, iekšieni un robežu:

1. $A = \{a\}$ vienelementa kopa, kur $a \in \mathbb{R}^2$;
2. $A = \{U(a;r) \mid a \in \mathbb{R}^2,\ r > 0\}$ vaļēja lode;
3. $A = \{CB(a;r) \mid a \in \mathbb{R}^2,\ r > 0\}$ slēgtas lodes ar centru punktā $a \in \mathbb{R}^2$ un rādiusu r papildinājums;
4. $A = (0;1) \times \{0\}$.

3.7. uzdevums. Pierādīt, ka topoloģiskā telpā $(\mathbb{R}^2, \tau_r)$ (skat. 1.5. uzdevumu) katras apakškopas $A \subset \mathbb{R}^2$, kas nesatur koordinātu sākumpunktu, iekšiene $IntA = \emptyset$ (t.i., kopai A nav iekšējo punktu).

3.8. uzdevums. Topoloģijām kopā $\mathbb{R}^2$

1. τ_{MN};
2. τ_S;
3. τ_{dab};
4. τ_r.

aprakstīt visas iespējamās apakškopas $A \subset \mathbb{R}^2$, kuru robeža $FrA = \emptyset$: (skat. 1.5. uzdevumu).

3.9. uzdevums. Pierādīt, ka topoloģiskās telpas (X, τ_{MN}) apakškopas $A \subset X$ iekšiene $IntA = \emptyset$ tad un tikai tad, ja kopa A nešķeļas ar taisni MN un nesatur nevienu taisnei MN simetrisku punktu.

3.10. uzdevums. Pierādīt, ka topoloģiskās telpas (X, τ_k) apakškopas $A \subset X$ iekšiene

$IntA \neq \emptyset$ tad un tikai tad, ja kopa $A \in \tau_k$.

3.11. uzdevums. Pārbaudīt, vai topoloģiskā telpā (X, τ_d) patvaļīgai apakškopai $A \subset X$ izpildās šādas vienādības $IntA = \overline{A} = A$ un $FrA = \emptyset$?

3.12. uzdevums. Pierādīt, ka topoloģiskā telpā (X, τ) jebkurām apakškopām $A, B \subset X$ izpildās šādi apgalvojumi:

1.
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B};$$
$$(A \cup B)^d = A^d \cup B^d;$$
$$Int(A \cup B) \supset IntA \cup IntB;$$
$$Fr(A \cup B) \subset FrA \cup FrB;$$

2.
$$\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B};$$
$$(A \cap B)^d \subset A^d \cap B^d;$$
$$Int(A \cap B) = IntA \cap IntB;$$
$$Fr(A \cap B) \subset FrA \cup FrB;$$

3.

$$\overline{A} \setminus \overline{B} \subset \overline{A \setminus B};$$

$$A^d \setminus B^d \subset (A \setminus B)^d;$$

$$Int(A \setminus B) \subset IntA \setminus IntB;$$

$$Fr(A \setminus B) \subset FrA \cup FrB;$$

4. Ja $A \subset B$, tad

$$\overline{A} \subset \overline{B};$$

$$A^d \subset B^d;$$

$$IntA \subset IntB.$$

3.13. uzdevums. Topoloģiskā telpā $(\mathbb{R}, \tau_{dab})$ minēt tādas apakškopas $A \subset \mathbb{R}$ un $B \subset \mathbb{R}$, kuras pierāda, ka 3.12. uzdevuma apgalvojumos (1.-3.) zīmi $\subset$ vai $\supset$ nevar aizstāt ar vienādības zīmi.

3.14. uzdevums. Patvaļīgā topoloģiskā telpā (X, τ) minēt tādas apakškopas A un B, kurām no tā, ka $A \subset B$, neseko $FrA \subset FrB$.

3.15. uzdevums. Topoloģiskā telpā (X, τ) apskatīsim apakškopu saimi $\{A_i \mid i \in I,\ A_i \subset X\}$. Pierādīt, ka izpildās šādi apgalvojumi:

1.

$$\bigcup_{i \in I} \overline{A_i} \subset \overline{\bigcup_{i \in I} A_i};$$

$$\overline{\bigcap_{i \in I} A_i} \subset \bigcap_{i \in I} \overline{A_i};$$

2.

$$\bigcup_{i \in I} IntA_i \subset Int(\bigcup_{i \in I} A_i);$$

$$Int(\bigcap_{i \in I} A_i) \subset \bigcap_{i \in I} IntA_i;$$

3.

$$\bigcup_{i \in I} A_i^d \subset (\bigcup_{i \in I} A_i)^d;$$

$$(\bigcap_{i \in I} A_i)^d \subset \bigcap_{i \in I} A_i^d.$$

3.16. uzdevums. Topoloģiskā telpā $(\mathbb{R}, \tau_{dab})$ minēt tādas bezgalīga apjoma apakškopu saimes $\{A_i \mid i \in I,\ A_i \subset \mathbb{R}\}$, kurām neizpildās vienādības

1.

$$\bigcup_{i \in I} \overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i \in I} A_i};$$

2.

$$\bigcup_{i \in I} A_i^d = (\bigcup_{i \in I} A_i)^d;$$

3.
$$Int(\bigcap_{i\in I} A_i) = \bigcap_{i\in I} IntA_i.$$

3.17. uzdevums. Pieņemsim, ka (X,ρ) - metriska telpa, kur ρ ir triviālā metrika (skat. 1.23. uzdevumu). Apzīmēsim: $U(x,1)$ - vaļēja lode ar centru punktā $x\in X$ un rādiusu 1, bet $B(x,1)$ - slēgta lode ar centru punktā $x\in X$ un rādiusu 1. Pierādīt, ka

$$U(x,1)\subset B(x,1)$$

un

$$\overline{U(x,1)}\subset\overline{B(x,1)}=B(x,1),$$

taču $\overline{U(x,1)}\neq B(x,1)$.

3.18. uzdevums. Kopā X apskatīsim divas tādas topoloģijas τ_1 un τ_2, ka topoloģija τ_2 mazorē τ_1, t.i., $\tau_1\subset\tau_2$. Apskatīsim patvaļīgu kopu $A\subset X$ un atbilstoši šīs apakškopas slēgumu $\overline{A}_{(1)}$ un iekšieni $Int\ A_{(1)}$ topoloģijā τ_1, kā arī šīs kopas slēgumu $\overline{A}_{(2)}$ un iekšieni $Int\ A_{(2)}$ topoloģijā τ_2.

1. Noteikt, kurš no apgalvojumiem (a) un (b) par kopas A slēgumu ir spēkā:
   (a) $\overline{A}_{(1)}\subset\overline{A}_{(2)}$;
   (b) $\overline{A}_{(2)}\subset\overline{A}_{(1)}$.
2. Noteikt, kurš no apgalvojumiem (a) un (b) par kopas A iekšieni ir spēkā:
   (a) $Int\ A_{(1)}\subset Int\ A_{(2)}$;
   (b) $Int\ A_{(2)}\subset Int\ A_{(1)}$.

3.19. uzdevums. Pieņemsim, ka (X,τ) - topoloģiska telpa, $A\subset X$. Pierādīt, ka $A^d=\overline{A}$ tad un tikai tad, kad kopai A nav izolēto punktu.

3.20. uzdevums. Pieņemsim, ka (X,τ) - topoloģiska telpa, $A\subset X$. Pierādīt, ja kopai A nav izolēto punktu, tad arī kopas A slēgumam $\overline{A}$ nav izolēto punktu.

3.21. uzdevums. Pieņemsim, ka (X,τ) - topoloģiska telpa, $A\subset X$. Vai kopas A izolētais punkts var būt šīs kopas:

1. iekšējais punkts;
2. ārējais punkts;
3. robežpunkts?

Minēt atbilstošus piemērus.

3.22. uzdevums. Pierādīt, ka topoloģiskas telpas $(\mathbb{R}^2,\tau_{MN})$ (skat. 1.5. uzdevumu) punkts $x\in\mathbb{R}^2$ ir kopas $A=\mathbb{R}^2$ izolētais punkts tad un tikai tad, kad punkts x pieder taisnei MN.

3.23. uzdevums. Pierādīt, ka topoloģiskajā telpā $(\mathbb{R}^2,\tau_S)$ (skat. 1.5. uzdevumu) kopas $A=\mathbb{R}^2$ vienīgais izolētais punkts ir pats S.

3.24. uzdevums. Pierādīt, ka jebkurā topoloģiskā telpā, kura apmierina otro sanumurējamības aksiomu, katrai apakškopai var būt ne vairāk kā sanumurējami daudz izolēto punktu.

3.25. uzdevums. Topoloģiskā telpā $(\mathbb{R}^2,\tau_r)$ (skat. 1.5. uzdevumu) atrast visur blīvu kopu, kura satur tikai vienu punktu.

3.26. uzdevums. Pierādīt, ka topoloģiskā telpā (X,τ) jebkurai slēgtai kopai $A \subset X$ šādi trīs apgalvojumi ir ekvivalenti:

1. kopa A ir nekur neblīva, t.i., $Int\,\overline{A} = \emptyset$;
2. kopa $X \setminus A$ ir visur blīva, t.i., $\overline{X \setminus A} = X$;
3. kopai A nav iekšēju punktu, t.i., $Int\,A = \emptyset$.

Vai šie apgalvojumi izpildās patvaļīgai kopai $A \subset X$?

3.27. uzdevums. Pierādīt, ka topoloģiskā telpā (X,τ) kopa $A \subset X$ šķeļas ar katru kopas X visur blīvu apakškopu tad un tikai tad, kad $IntA \neq \emptyset$.

3.28. uzdevums. Pieņemsim, ka B ir topoloģiskās telpas (X,τ) bāze, $A \subset X$. Pierādīt, ka punkts $x \in \overline{A}$ tad un tikai tad, kad katrai kopai $V \in B$, kura satur punktu x, izpildās nosacījums $A \cap V \neq \emptyset$.

3.29. uzdevums. Pieņemsim, ka (X,τ) - topoloģiska telpa, $A \subset X$. Pierādīt, ja katra kopas A apakškopa ir slēgta telpā (X,τ), tad šajā telpā $A^d = \emptyset$ (t.i., kopai A nav akumulācijas punktu telpā (X,τ)).

3.30. uzdevums. Noteikt šādu topoloģisko telpu blīvumu:

1. (X,τ), kur $X = \{a,b,c\}$ un $\tau = \{\emptyset, X, \{a\}, \{a,c\}\}$;
2. $(\mathbb{R}, \tau_{dab})$;
3. $(\mathbb{R}, \tau_d)$.

3.31. uzdevums. Pierādīt, ka jebkura antidiskrētas topoloģiskas telpas (X,τ_a) apakškopa ir visur blīva, līdz ar to (X,τ_a) ir separabla telpa.

3.32. uzdevums. Pierādīt, ka diskrēta topoloģiska telpa (X,τ_d) ir separabla tad un tikai tad, ja kopa X ir ne vairāk kā sanumurējama.

3.33. uzdevums. Vai jebkura topoloģiska telpa (X,τ), kurai kopa X ir galīga vai sanumurējama, ir separabla?

3.34. uzdevums. Pieņemsim, ka $\mathcal{B}$ - priekšbāze topoloģiskai telpai (X,τ), $A \subset X$ ir fiksēta kopa un katrai kopai $V \in \mathcal{B}$ izpildās nosacījums $A \cap V \neq \emptyset$. Vai var apgalvot, ka šajā gadījumā A ir visur blīva kopa telpā (X,τ)?

3.35. uzdevums. Pierādīt, ka Zorgenfreija topoloģiskā telpa $(\mathbb{R},\tau_b)$ no 2.5. uzdevuma ir separabla telpa, kura neapmierina otro sanumurējamības aksiomu (tātad nav metrizējama telpa).

3.36. uzdevums. Pierādīt, ka topoloģiskā telpa $(X,\tau_\rho) = (X,\rho)$ no 3.17. uzdevuma nav separabla telpa un neapmierina otro sanumurējamības aksiomu.

3.37. uzdevums. Pierādīt, ka Nemicka topoloģiskā telpa $(\mathbb{R}^2,\tau_N)$ no 2.7. uzdevuma ir separabla telpa, kura neapmierina otro sanumurējamības aksiomu (tātad nav metrizējama telpa).

3.38. uzdevums. X - patvaļīga netukša kopa un τ_k ko-galīgā topoloģija kopā X (skat. 1.9. uzdevumu). Pierādīt, ka šīs telpas katra bezgalīga kopa ir visur blīva, līdz ar to (X,τ_k) ir separabla telpa.

3.39. uzdevums. Pierādīt, ka jebkura telpa, kas apmierina otro sanumurējamības aksiomu, ir separabla. Vai eksistē separabla topoloģiska telpa, kura neapmierina otro sanumurējamības aksiomu? Ja jā, tad minēt šādas telpas piemēru.

3.40. uzdevums. Pierādīt, ka metriska separabla telpa apmierina otro sanumurējamības aksiomu.

3.41. uzdevums. Pierādīt, ka topoloģiskā telpa $(\mathbb{R}^2, \ddot{\tau})$ no 2.29. uzdevuma ir separabla. Minēt kādu šīs telpas visur blīvu sanumurējamu apakškopu.

3.42. uzdevums. Pieņemsim, ka (X, τ) - topoloģiska telpa, kas apmierina otro sanumurējamības aksiomu, $A \subset X$. Pierādīt, ja A ir nesanumurējama kopas X apakškopa, tad eksistē tāds punkts $x \in A$, ka $x \in A^d$.

3.43. uzdevums. Pieņemsim, ka (X, τ_c) - ko-sanumurējama topoloģiska telpa (skat. 1.10. uzdevumu).

1. Noteikt, vai (X, τ_c)
   (a) apmierina pirmo sanumurējamības aksiomu;
   (b) apmierina otro sanumurējamības aksiomu;
   (c) ir separabla telpa?
2. Pierādīt, ka šīs telpas katra nesanumurējama apakškopa ir visur blīva.

3.44. uzdevums. Pieņemsim, ka $(\mathbb{R}, \tau_c)$ - topoloģiska telpa ar ko-sanumurējamo topoloģiju. Apskatīsim kopu $E = [0; 1] \subset \mathbb{R}$.

1. Vai E ir slēgta kopa telpā $(\mathbb{R}, \tau_c)$?
2. Noteikt kopu $\overline{E}$.
3. Noteikt kopu $Int\ (\mathbb{R} \setminus E)$.

3.45. uzdevums. Pieņemsim, ka (X, τ) - topoloģiska telpa. Slēgtu kopu $F \subset X$ sauc par kanoniski slēgtu, ja $F = \overline{Int\ F}$. Vaļēju kopu $G \subset X$ sauc par kanoniski vaļēju, ja $G = \ Int\ \overline{G}$.

1. Minēt vaļējas kopas, kura nav kanoniski vaļēja kopa, piemēru. Minēt slēgtas kopas, kura nav kanoniski slēgta kopa, piemēru.
2. Pierādīt, ka vaļējas kopas slēgums ir kanoniski slēgta kopa, bet slēgtas kopas iekšiene ir kanoniski vaļēja kopa.
3. Pierādīt, ka kanoniski vaļējas kopas papildinājums ir kanoniski slēgta kopa, bet kanoniski slēgtas kopas papildinājums ir kanoniski vaļēja kopa.
4. Pierādīt, ka galīga skaita kanoniski slēgtu kopu apvienojums ir kanoniski slēgta kopa.
5. Pierādīt, ka jebkurām divām kopām $A_1 \subset X$ un $A_2 \subset X$ kopa $\overline{Int\ A_1} \cap \overline{Int\ A_2}$ ir kanoniski slēgta. Vai arī jebkuru divu kanoniski slēgtu kopu šķēlums vienmēr ir kanoniski slēgta kopa?

3.46. uzdevums. Pieņemsim, ka (X, τ) - topoloģiska telpa, apakškopa $F \subset X$ ir slēgta kopa šajā telpā, bet apakškopa $G \subset X$ ir vaļēja kopa šajā telpā.

1) Pierādīt, ka kopa $\overline{G} \setminus G$ ir nekur neblīva kopa telpā (X, τ).
2) Pierādīt, ja $A \subset X$ ir nekur neblīva kopa šajā telpā, tad arī $\overline{A}$ ir nekur neblīva kopa telpā (X, τ).

3) Pierādīt, ka slēgta kopa $F \subset X$ ir nekur neblīva kopa telpā (X, τ), tad un tikai tad, ja $X \setminus F$ ir visur blīva kopa telpā (X, τ). Vai šis apgalvojums paliek spēkā, ja kopa F nav slēgta?

4) Pierādīt, ja vaļēja kopa G telpā (X, τ) ir nekur neblīva, tad $G = \emptyset$.

3.47. uzdevums. Pieņemsim, ka (X, ρ) -metriska telpa, attālums starp punktu $y \in X$ un kopu $A \subset X$:

$$d(y, A) = \inf_{x \in A} \rho(y, x).$$

Katrai kopai A $(A \subset X)$ noteiksim operatoru $\varphi : A \to \overline{A}$, kur

$$\overline{A} = \varphi(A) = \{y \in X \mid d(y, A) = 0\}.$$

Pierādīt, ka operators φ apmierina svarīgākās slēguma operatora īpašības:

1. $A \subset \varphi(A)$;
2. $\varphi(\varphi(A)) = \varphi(A)$;
3. $\varphi(A_1 \cup A_2) = \varphi(A_1) \cup \varphi(A_2)$, kur $A_1, A_2 \subset X$;
4. $\varphi(\emptyset) = \emptyset$.

3.48. uzdevums. Pieņemsim, ka X ir patvaļīga netukša kopa. $P(x)$ ir visu kopas X apakškopu sistēma, bet $\varphi :\ P(x) \to P(x)$ ir operators, kas apmierina īpašības:

1) katrai apakškopai $A \subset X :\ \ A \subset \varphi(A)$;
2) katrai apakškopai $A \subset X :\ \ \varphi\big(\varphi(A)\big) = \varphi(A)$;
3) visām apakškopām $A_1, A_2 \subset X :\ \ \varphi(A_1 \cup A_2) = \varphi(A_1) \cup \varphi(A_2)$;
1. $\varphi(\emptyset) = \emptyset$.

Apskatīsim kopu sistēmas

$$\lambda = \{A \in P(x) :\ \ \varphi(A) = A\} \ \text{ un } \ \tau = \{A \in P(x) :\ \ CA \in \lambda\}.$$

Pierādīt, ka

1. sistēma τ ir topoloģija kopā X,
2. sistēma λ ir šajā topologijā slēgta kopa sistēmu kopā X,
3. operators φ ir slēguma operators topoloģijā τ, t.i., katrai kopai $A \subset X :\ \ \varphi(A) = \overline{A}$.

3.49. uzdevums. Pieņemsim, ka X ir patvaļīga netukša kopa, $P(x)$ ir visu kopas X apakškopu sistēma : $\ P(x) \to P(x)$ ir operators, kas apmierina īpašības:

1) katrai apakškopai $A \subset X :\ \ \psi(A) \subset A$;
2) katrai apakškopai $A \subset X :\ \ \psi\big(\psi(A)\big) = \psi(A)$;
3) visām apakškopām $A_1, A_2 \subset X :\ \ \psi(A_1 \cap \psi A_2) = \psi(A_1) \cap \psi(A_2)$;
1. $\psi(X) = X$.

Pierādīt, ka

1. sistēma $\tau :\ \{A \subset X :\ \psi(A) = A\}$ ir topoloģija kopā X,
2. operators ψ ir iekšienes operators šajā topoloģijā τ, t.i., katrai apakškopai $A \subset X$: $\psi(A) = \mathrm{int} A$.

3.50. uzdevums. Pieņemsim, ka X -patvaļīga netukša kopa, B -kopas X fiksēta apakškopa, bet $P(B)$ ir kopas B visu iespējamo apakškopu saime. Apakškopu saime $\tau = \{X\} \cup P(B)$ ir topoloģija kopā X, skat. 1.8. uzdevumu. Pierādīt, ka topoloģiskā telpā (X, τ)

1. $\overline{B} = X$;
2. izolēto punktu kopa sakrīt ar kopu B, bet akumulācijas punktu kopa sakrīt ar kopu $X \setminus B$.

3.51. uzdevums. Pierādīt, ka kopa $A \subset X$ ir slēgta topoloģiskā telpā (X, τ) tad un tikai tad, ja $A^d \subset A$.

3.52. uzdevums. Minēt topoloģiskas telpas piemēru un apakškopu A, kurai neizpildās nosacījums $(A^d)^d \subset A^d$ (tātad kopa A^d nav slēgta).

3.53. uzdevums. Pieņemsim, ka (X, τ_ρ) - topoloģiska telpa ar metrisko topoloģiju, apakškopa $A \subset X$. Pierādīt, ka $(A^d)^d \subset A^d$ (tātad kopa A^d ir slēgta).

3.54. uzdevums. Apskatīsim šādas topoloģiskās telpas:

1. $(\mathbb{R}^2, \ddot{\tau})$ (skat. 2.29. uzdevumu);
2. $(\mathbb{R}^2, \tau_b)$ (skat. 2.5. uzdevumu);
3. $(\mathbb{R}^2, \tau_N)$ (skat. 2.7. uzdevumu).

Katrā no šīm telpām pierādīt, ka reālās plaknes apakškopa $A \subset \mathbb{R}^2$ ir

1. visur blīva tad un tikai tad, ja A ir visur blīva telpā $(\mathbb{R}^2, \tau_{dab})$;
2. nekur neblīva tad un tikai tad, ja A ir nekur neblīva telpā $(\mathbb{R}^2, \tau_{dab})$.

3.55. uzdevums. (X, τ) - topoloģiska telpa. Pierādīt, ka jebkuras apakškopas $A \subset X$ robeža $Fr\ A$ ir nekur neblīva kopa telpā (X, τ).

3.56. uzdevums. Topoloģiskajā telpā (X, τ_Δ) (skat. 2.32. uzdevumu) atrast vienelementa, divelementu utt. kopu slēgumu. Vai telpā (X, τ_Δ) kādai kopai eksistē izolētie punkti?

3.57. uzdevums. Pieņemsim, ka (X, τ) - topoloģiska telpa. Pierādīt, ja telpā (X, τ) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ un visiem indeksiem $n \in \mathbb{N}$ $x_n \in A$, tad $x \in \overline{A}$ (skat. 5. nodaļu).

3.58. uzdevums. Pieņemsim, ka X ir nesanumurējama kopa ($|X| > \aleph_0$), τ_c ir ko-sanumurējama topoloģija (skat. 1.10. uzdevumu) kopā X.

1. Pierādīt, ka telpā (X, τ_c) konverģē tikai stacionāras virknes.
2. Pieņemsim, ka $x_0 \in X$ un $A = X \setminus \{x_0\}$. Pierādīt, ka $x_0 \in \overline{A}$ un telpā (X, τ_c) neeksistē virkne (x_n), ka $x_n \in A$ un $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

3.59. uzdevums. Pierādīt, ka, ja topoloģiska telpa (X, τ) apmierina pirmo sanumurējamības aksiomu, tad $x_0 \in \overline{A}$ $(A \subset X)$ tad un tikai tad, ja eksistē tāda virkne (x_n), kur $x_n \in A$ visiem $n \in \mathbb{N}$, ka $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.

3.60. uzdevums. Pieņemsim, ka (X, τ) ir topoloģiska telpa, A ir kopas X apakškopa un apskatīsim kopu $\overline{A}^s = \{x \in X : \exists \text{ virkne } (x_n), x_n \in A, n \in \mathbb{N}, \text{ ka } \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x\}$ (ska. 5. nodaļu). Kopu $\overline{A}^s$ sauc par kopas A sekvenciālu slēgumu. Skaidrs, ka $A \subset \overline{A}^s$. Ja $A = \overline{A}^s$, tad kopu A sauc par sekvenciāli slēgtu telpā (X, τ).

Pierādīt, ka

1. jebkurai kopai $A \subset X$ izpildās sakarība $\overline{A}^s \subset \overline{A}$;
2. ja A ir slēgta kopa telpā (X, τ), tad A ir arī sekvenciāli slēgta kopa telpā (X, τ), t.i., $A = \overline{A} = \overline{A}^s$.

3.61. uzdevums. Pieņemsim, ka (X, τ) ir topoloģiska telpa (skat. 3.60. uzdevumu).

1. Konstruēt tādu topoloģiju kopā X un kopas X apakškopu A, ka $\overline{A} \not\subset \overline{A}^s$.
2. Pierādīt, ka, ja telpa (X, τ) apmierina pirmo sanumurējamības aksiomu, tad $\overline{A}^s = \overline{A}$, t.i., šajā telpā sekvenciāli slēgta kopa ir slēgta kopa.
3. Pierādīt, ka topoloģiskai telpai (X, τ), kas apmierina otro sanumurējamības aksiomu vai kurai topoloģija τ ir metriskā topoloģija, apakškopa A, $A \subset X$ būtu slēgta tad un tikai tad, ja kopa A ir sekvenciāli slēgta.

4. nodaļa

Topoloģiskas telpas apakštelpa

Apskatīsim topoloģisko telpu (X, τ), kopas X apakškopu M $(M \subset X)$ un apakškopu saimi

$$\tau_M = \{M \cap U,\ U \in \tau\}. \tag{4.1}$$

4.1. uzdevums. Apskatīsim topoloģisku telpu (X, τ) un apakškopu $M \subset X$. Pierādīt, ka apakškopu saime τ_M (skat. (4.1)) ir topoloģija kopā M.

4.1. definīcija. $\tau_M = \{M \cap U,\ U \in \tau\}$ sauc par topoloģiskās telpas (X, τ) **inducēto topoloģiju** kopā M.

4.2. definīcija. Kopu $M \subset X$ ar tajā inducēto topoloģiju τ_M sauc par topoloģiskās telpas (X, τ) **apakštelpu**.

Apzīmēsim

$$(M, \tau_M) - \text{topoloģiskās telpas } (X, \tau) \text{ apakštelpa, kur } M \subset X.$$

4.3. definīcija. Topoloģiskās telpas (X, τ) īpašība ir **mantojama**, ja tā saglabājas jebkurā telpas (X, τ) apakštelpā (M, τ_M).

4.2. uzdevums. Apskatīsim reālās taisnes apakškopu $A = [-2; 2] \subset \mathbb{R}$. Topoloģiskās telpas $(\mathbb{R}, \tau_{dab})$ apakštelpā (A, τ_A) noteikt, kuras no kopām B_i $(i = \overline{1,6})$ ir vaļējas un kuras slēgtas:

1. $B_1 = \{x \mid -1 < x < 1\}$;
2. $B_2 = \{x \mid -\frac{1}{2} < x \le -1\}$;
3. $B_3 = \{x \mid |x| \le 1\}$;
4. $B_4 = \{x \mid \frac{1}{2} \le |x| \le 2\}$;
5. $B_5 = \{x \mid 0 < x \le 2\}$;
6. $B_6 = \{x \mid x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}$.

4.3. uzdevums. Apskatīsim reālās taisnes apakškopu $A = [-2; 2] \subset \mathbb{R}$. Bultiņas topoloģiskās telpas $(\mathbb{R}, \tau_b)$ (skat. 2.5. uzdevumu) apakštelpā (A, τ_A) noteikt, kuras kopas B_i $(i = \overline{1,6})$ ir vaļējas un kuras slēgtas:

1. $B_1 = \{x \mid -1 < x < 1\}$;
2. $B_2 = \{x \mid -\frac{1}{2} < x \leq -1\}$;
3. $B_3 = \{x \mid |x| \leq 1\}$;
4. $B_4 = \{x \mid \frac{1}{2} \leq |x| \leq 2\}$;
5. $B_5 = \{x \mid 0 < x \leq 2\}$;
6. $B_6 = \{x \mid x = \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}\}$.

4.4. uzdevums. Apskatīsim reālās plaknes apakškopu $A \subset \mathbb{R}^2$.

1. Pierādīt, ka topoloģiskās telpas $(\mathbb{R}^2, \tau_{dab})$ apakštelpā (A, τ_A), ja
   (a) A ir patvaļīga taisne, tad topoloģija τ_A sakrīt ar parasto taisnes topoloģiju τ_{dab} kopā A;
   (b) A ir galīga kopa, tad topoloģija τ_A sakrīt ar diskrēto topoloģiju τ_d kopā A.
2. Ja $A = B(O; r)$ ir slēgta lode ar centru punktā $O(0; 0)$ un rādiusu $r > 0$, noteikt, kuras no kopām B_i $(i = \overline{1,4})$ ir vaļējas un kuras slēgtas topoloģiskās telpas $(\mathbb{R}^2, \tau_{dab})$ apakštelpā (A, τ_A):
   (a) $B_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \rho(x, O) \leq 1\}$;
   (b) $B_2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{2} \leq \rho(x, O) \leq 1\}$;
   (c) $B_3 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < \rho(x, O) \leq 2\}$;
   (d) $B_4 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \rho(x, O) < 1\}$.

4.5. uzdevums. Apskatīsim netukšu, ne vienelementa apakškopu $A \subset \mathbb{R}^2$. Pierādīt, ka topoloģiskās telpas $(\mathbb{R}^2, \tau_{MN})$ (skat. 1.5. uzdevumu) apakštelpā (A, τ_A):

1. τ_A ir diskrētā topoloģija tad un tikai tad, ja kopa A nesatur nevienu tādu punktu pāri, kuri ir simetriski pret taisni MN;
2. τ_A ir antidiskrētā topoloģija tad un tikai tad, ja kopa A sastāv tikai no diviem punktiem, kuri ir savstarpēji simetriski pret taisni MN.

4.6. uzdevums. Apskatīsim reālās plaknes apakškopu $A \subset \mathbb{R}^2$ un topoloģiskās telpas $(\mathbb{R}^2, \tau_r)$ (skat. 1.5. uzdevumu) apakštelpu (A, τ_A).

1. Ja A ir patvaļīga taisne, pierādīt, ka inducētā topoloģija τ_A sakrīt ar topoloģiju τ_S no 1.5. uzdevuma, kur S ir patvaļīgs taisnes A punkts.
2. Ja A ir riņķa līnija ar centru punktā $(0; 0)$ un patvaļīgu fiksētu pozitīvu rādiusu, raksturot inducēto topoloģiju τ_A.
3. Ja A ir galīga apakškopa, vai inducētā topoloģija τ_A sakrīt ar diskrēto topoloģiju?
4. Atrast nosacījumus, kad inducētā topoloģija τ_A sakrīt ar diskrēto topoloģiju, un, kad τ_A sakrīt ar antidiskrēto topoloģiju.

4.7. uzdevums. (X, τ) - topoloģiska telpa, $A \subset Y \subset X$. Pierādīt, ka

$$Int_X\, A \subset Int_Y\, A.$$

Vai ir pareizs apgalvojums $Int_X\, A \supset Int_Y\, A$?

($Int_X\, A$ ir kopas A iekšiene telpā (X, τ), bet $Int_Y\, A$ ir kopas A iekšiene telpas (X, τ) apakštelpā (Y, τ_Y)).

4.8. uzdevums. Pierādīt, ka otrā sanumurējamības aksioma ir mantojama īpašība. Vai arī pirmā sanumurējamības aksioma ir mantojama īpašība?

4.9. uzdevums. Pierādīt, ka separablas topoloģiskas telpas vaļēja apakškopa ir separabla apakštelpa.

4.10. uzdevums. Pierādīt, ja topoloģiskā telpa ir metrizējama, tad telpas separablitāte ir mantojama īpašība.

4.11. uzdevums. Pierādīt, ka separablai topoloģiskai telpai $(\mathbb{R}^2, \ddot{\tau})$ no 2.29. uzdevuma eksistē neseparablas apakštelpas.

4.12. uzdevums. Apskatīsim Nemicka topoloģisko telpu $(\mathbb{R}^2, \tau_N)$ no 2.7. uzdevuma. Pierādīt, ka

1. kopā $L \subset \mathbb{R}^2$ inducētā topoloģija $(\tau_N)_L$ sakrīt ar diskrēto topoloģiju;
2. apakštelpa $(L, (\tau_N)_L)$ nav separabla, kaut $(\mathbb{R}^2, \tau_N)$ ir separabla telpa.

4.13. uzdevums. Pieņemsim, ka (X, τ) - topoloģiska telpa, apakškopa $G \subset X$ ir vaļēja kopa, bet apakškopa $A \subset X$ ir visur blīva (nekur neblīva) kopa šajā telpā. Pierādīt, ka kopa $A \cap G$ ir visur blīva (nekur neblīva) kopa telpas (X, τ) apakštelpā (G, τ_G).

4.14. uzdevums. Pieņemsim, ka (X, τ) - topoloģiska telpa, $A \subset B \subset X$. Pierādīt, ja A ir visur blīva kopa apakštelpā (B, τ_B) un B ir visur blīva kopa telpā (X, τ), tad arī A ir visur blīva kopa telpā (X, τ).

5. nodaļa

Virknes konverğence topoloğiskās telpās

Apskatīsim patvaļīgu topoloğisku telpu (X, τ).

Saka, ka virkne (x_n), kur $x_n \in X$ un $n \in \mathbb{N}$, konverğē uz elementu $x \in X$, ja jebkurai kopai $U \in \tau(x)$ ($\tau(x)$ ir punkta x vaļējo apkārtņu saime) eksistē $N \in \mathbb{N}$, ka visiem $n \geq N$ virknes elements $x_n \in U$. Raksta $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

5.1. uzdevums. Raksturot konverğentas virknes un to robežas topoloğiskajā telpā $(\mathbb{R}, \tau)$, kur topoloğija

1. $\tau = \tau_a$ (antidiskrētā topoloğija);
2. $\tau = \tau_d$ diskrētā topoloğija;
3. $\tau = \tau_r$ (skat. 1.5. uzdevumu);
4. $\tau = \tau_{irr}$ (skat. 1.19. uzdevumu);
5. τ ir topoloğija, ko nosaka bāze, kas sastāv no intervāliem $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$;
6. $\tau = \tau_i$, $i = \overline{1,6}$ (skat. 1.17. uzdevumu).

5.2. uzdevums. Katrai no sešām topoloğijām τ_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ (skat. 1.7. uzdevumu) noteikt, vai dotās reālo skaitļu virknes konverğē atbilstošajā topoloğiskajā telpā $(\mathbb{R}, \tau_i)$:

1. $x_n = \frac{1}{n}$;
2. $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$;
3. $x_n = (-1)^n$
4. $x_n = n$;
5. $x_n = (-1)^n n$.

5.3. uzdevums. Atrast visas konverğentas skaitļu virknes un to robežas šādām topoloğijām τ reālo skaitļu kopā $\mathbb{R}$:

1. $\tau = \tau_a$;
2. $\tau = \tau_d$;
3. $\tau = \tau_r$

4. $\tau = \tau_{irr}$;
5. τ ir topoloģija, ko nosaka bāze, kura sastāv no visiem intervāliem $[n; n+1]$, $n \in \mathbb{N}$.
6. τ_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ (skat. 1.7. uzdevumu).

5.4. uzdevums. Pierādīt, ka konverğentas reālo skaitļu virknes topoloģiskā telpā $(\mathbb{R}, \tau_c)$ ir tās pašas kā topoloģiskā telpā $(\mathbb{R}, \tau_d)$, kaut ko-sanumurējamā topoloģija τ_c (skat. 1.10. uzdevumu) nesakrīt ar diskrēto topoloģiju τ_d (skat. 1.2. uzdevumu) reālo skaitļu kopā $\mathbb{R}$.

5.5. uzdevums. Pieņemsim, ka patvaļīgā kopā X dotas divas topoloģijas τ_1 un τ_2, topoloģiskā telpā (X, τ_1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, bet topoloģiskā telpā (X, τ_2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$. Minēt piemēru, lai $a \neq b$.

5.6. uzdevums. Minēt netriviālas topoloģiskas telpas (X, τ) piemēru (topoloģija τ nesakrīt ar antidiskrēto topoloģiju τ_a) un minēt tādu virkni kopā X, kurai ir vairākas dažādas robežas.

5.7. uzdevums. Minēt topoloģiskas telpas (X, τ) un tādas diverğentas virknes (x_n) piemēru šajā telpā, ka kopai $\{x_n / \ n \in \mathbb{N}\}$ eksistē viens vienīgs akumulācijas punkts telpā (X, τ).

5.8. uzdevums. Pieņemsim, ka X ir patvaļīga nesanumurējama kopa ar ko-sanumurējamo topoloģiju τ_c (skat. 1.10. uzdevumu). Pierādīt, ka topoloģiskā telpā (X, τ_c)

1. vienīgās konverğentās virknes ir stacionāras virknes;
2. ja punkts $x_0 \in X$ un kopa $A = X \backslash \{x_0\}$, tad
   (a) $x_0 \in \overline{A}$;
   (b) neviena no virknēm (x_n), $x_n \in A$, nekonverğē uz punktu x_0.

5.9. uzdevums. Pieņemsim, ka (X, τ) patvaļīga topoloģiska telpa, $A \subset X$ ir patvaļīga kopas X apakškopa, punkts $x_0 \in \overline{A}$. Parādīt, ja punktā x_0 eksistē sanumurējama lokāla apkārtņu sistēma, tad eksistē virkne (x_n), kuras punkti $x_n \in A$ un kuras robeža ir punkts x_0.

5.10. uzdevums. Pierādīt, ka Eiklīda telpas $\mathbb{R}^n$ ar parasto topoloģiju τ_{dab} (skat. 1.5. uzdevumu) apakškopa $A \subset \mathbb{R}^n$ ir slēgta tad un tikai tad, ja katras telpā $(\mathbb{R}^n, \tau_{dab})$ konverğentas virknes (x_n), kur $x_n \in A$, robeža pieder kopai A.

6. nodaļa

Nepārtraukti, slēgti un vaļēji attēlojumi. Homeomorfisms

Apskatīsim topoloģiskas telpas (X, τ_X) un (Y, τ_Y).

6.1. definīcija. Attēlojumu $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ sauc par **nepārtrauktu punktā** $x_0 \in X$, ja katrai punkta $y_0 = f(x_0)$ vaļējai apkārtnei $U(y_0)$ eksistē tāda punkta x_0 vaļēja apkārtne $U(x_0)$, ka

$$f(U(x_0)) \subset U(y_0).$$

6.2. definīcija. Attēlojumu $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ sauc par **nepārtrauktu**, ja attēlojums f ir nepārtraukts katrā punktā $x \in X$.

6.1. teorēma. Šādi nosacījumi ir ekvivalenti attēlojumam $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$:

1. f ir nepārtraukts attēlojums ;
2. jebkuras telpā (Y, τ_Y) vaļējas kopas pirmtēls ir vaļēja kopa telpā (X, τ_X), t.i.,

$$\forall\, V \in \tau_Y \Rightarrow f^{-1}(V) \in \tau_X;$$

3. jebkuras telpā (Y, τ_Y) slēgtas kopas pirmtēls ir slēgta kopa telpā (X, τ_X), t.i.,

$$\forall\, V \in \lambda_Y \Rightarrow f^{-1}(V) \in \lambda_X;$$

4. jebkurai apakškopai $A \subset X$ izpildās nosacījums $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.

6.3. definīcija. Attēlojumu $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ sauc par **vaļēju**, ja jebkuras vaļējas kopas telpā (X, τ_X) attēls ir vaļēja kopa telpā (Y, τ_Y), t.i.,

$$\forall\, V \in \tau_X \Rightarrow f(V) \in \tau_Y.$$

6.4. definīcija. Attēlojumu $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ sauc par **slēgtu**, ja jebkuras slēgtas kopas telpā (X, τ_X) attēls ir slēgta kopa telpā (Y, τ_Y), t.i.,

$$\forall\, V \in \lambda_X \Rightarrow f(V) \in \lambda_Y.$$

6.5. definīcija. Attēlojumu $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ sauc par **homeomorfismu**, ja

1. f ir bijektīvs attēlojums;
2. f ir nepārtraukts attēlojums;
3. inversais attēlojums $f^{-1} : (Y, \tau_Y) \to (X, \tau_X)$ ir nepārtraukts.

6.2. teorēma. Ja attēlojums $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ ir nepārtraukts un bijektīvs, tad šādi nosacījumi ir ekvivalenti:

1. f ir homeomorfisms;
2. f ir vaļējs attēlojums;
3. f ir slēgts attēlojums.

6.6. definīcija. Topoloģiskas telpas (X, τ_X) un (Y, τ_Y) sauc par **homeomorfām**, ja eksistē attēlojums $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$, kas ir homeomorfisms.

6.1. uzdevums. Apskatīsim identisko attēlojumu $f : (X, \tau) \to (X, \widetilde{\tau})$, t.i., attēlojumam f katra punkta $x \in X$ attēls $f(x) = x$. Pierādīt, ka

1. f ir nepārtraukts attēlojums tad un tikai tad, ja topoloģija τ ir stiprāka par topoloģiju $\widetilde{\tau}$;
2. f ir homeomorfisms tad un tikai tad, ja topoloģijas sakrīt $\tau = \widetilde{\tau}$.

6.2. uzdevums. Apskatīsim reālo skaitļu kopu $\mathbb{R}$ un divas topoloģijas

$$\tau_1 = \{\emptyset; \mathbb{R}; \{1\}\},$$

$$\tau_2 = \{\emptyset; \mathbb{R}; \{2\}\}$$

kopā $\mathbb{R}$. Pierādīt, ka topoloģiskās telpas $(\mathbb{R}, \tau_1)$ un $(\mathbb{R}, \tau_2)$ ir homeomorfas, lai gan apskatītās topoloģijas nesakrīt $\tau_1 \neq \tau_2$.

6.3. uzdevums. Apskatīsim bijektīvu attēlojumu $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$. Pierādīt, ka inversais attēlojums $f^{-1} : (Y, \tau_Y) \to (X, \tau_X)$ ir nepārtraukts tad un tikai tad, ja

$f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ ir vaļējs attēlojums ($f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ ir slēgts attēlojums).

6.4. uzdevums. Apskatīsim attēlojumu $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$.

1. Pierādīt, ka attēlojums f ir nepārtraukts tad un tikai tad, kad katrai kopai A, $A \subset X$ izpildās nosacījums $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;
2. Vai ir patiess apgalvojums, ja f ir nepārtraukts attēlojums un punkts x ir kopas A, $A \subset X$, akumulācijas punkts telpā (X, τ_X), tad punkts $f(x)$ ir kopas $f(A)$ akumulācijas punkts telpā (Y, τ_Y)?

6.5. uzdevums. Apskatīsim attēlojumu

$$f : ((-1; 1), \tau_{ind}) \to (\mathbb{R}, \tau_{dab}),$$

kur attēlojumu f katram punktam $x \in (-1; 1)$ definē pēc formulas

$$f(x) = \frac{x}{1 - x^2},$$

bet τ_{ind} ir reālās taisnes $\mathbb{R}$ parastās topoloģijas τ_{dab} inducētā topoloģija intervālā $(-1; 1)$. Noskaidrot, vai attēlojums f ir homeomorfisms?

6.6. uzdevums. Apskatīsim patvaļīgu topoloģisku telpu (Y, τ_Y). Pierādīt, ka katram attēlojumam $f : X \to Y$ eksistē visvājākā topoloģija τ_X kopā X, kurai $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ ir nepārtraukts attēlojums. Pierādīt, ka topoloģiskā telpa (X, τ_X) ir diskrēta tad un tikai tad, ja jebkurš attēlojums $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ ir nepārtraukts attēlojums.

6.7. uzdevums. Apskatīsim patvaļīgu topoloģisku telpu (X, τ_X). Pierādīt, ka katram attēlojumam $f : X \to Y$ eksistē visstiprākā topoloģija τ_Y kopā Y, kurai $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ ir nepārtraukts attēlojums. Pierādīt, ka topoloģiskā telpa (Y, τ_Y) ir antidiskrēta tad un tikai tad, ja jebkurš attēlojums $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ ir nepārtraukts attēlojums.

6.8. uzdevums. Apskatīsim nepārtrauktu skaitlisku funkciju $f : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_{dab})$.

1. Pierādīt, ka topoloģiskā telpā (X, τ) jebkuriem skaitļiem
   (a) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $(\alpha \leq \beta)$ šādas kopas ir slēgtas:
   $$F_1 = \{x \in X \mid f(x) \leq \alpha\},$$
   $$F_2 = \{x \in X \mid f(x) \geq \alpha\},$$
   $$F_3 = \{x \in X \mid \alpha \leq f(x) \leq \beta\},$$
   (b) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $(\alpha < \beta)$ šādas kopas ir vaļējas:
   $$G_1 = \{x \in X \mid f(x) < \alpha\},$$
   $$G_2 = \{x \in X \mid f(x) > \alpha\},$$
   $$G_3 = \{x \in X \mid \alpha < f(x) < \beta\}.$$
   (c) Vai (a) un (b) punktos apskatītajām kopām izpildās sakarības $\overline{G_1} = F_1$, $\overline{G_2} = F_2$ un $\overline{G_3} = F_3$?
2. Pierādīt, ja kāda punkta $x_0 \in X$ attēls $f(x_0) = \alpha \neq 0$, tad eksistē punkta x_0 tāda apkārtne $V(x_0)$, ka visiem punktiem $x \in V(x_0)$ attēls $f(x) \neq 0$ ($f(x) > 0$, ja $\alpha > 0$, un $f(x) < 0$, ja $\alpha < 0$).

6.9. uzdevums. Apskatīsim nepārtrauktas skaitliskas funkcijas $f, g : (X, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau_{dab})$.

1. Pierādīt, ka topoloģiskā telpā (X, τ) šādas kopas ir
   (a) slēgtas:
   $$F_1 = \{x \in X \mid f(x) \leq g(x)\},$$
   $$F_2 = \{x \in X \mid f(x) \geq g(x)\},$$
   $$F_3 = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\};$$
   (b) vaļējas:
   $$G_1 = \{x \in X \mid f(x) < g(x)\},$$
   $$G_2 = \{x \in X \mid f(x) > g(x)\}.$$
2. Vai izpildās sakarības $\overline{G_1} = F_1$ un $\overline{G_2} = F_2$?

6.10. uzdevums. Apskatīsim divas kopas $X = Y = \mathbb{R}$. Pieņemsim, ka kopā Y dota topoloģija τ_S, kur punkts $S = 0$, bet kopā X - parastā topoloģija τ_{dab} (skat. 1.5. uzdevumu).

1. Pierādīt, ka katrā punktā $x \in X = \mathbb{R}$ funkcija $y = x + 3$ ir pārtraukta.
2. Noteikt, vai funkcijas $y = x^3$ un $y = \cos x$ ir nepārtrauktas.

3. Minēt tādas nepārtrauktas funkcijas piemēru, kura nav konstanta.

6.11. uzdevums. Apskatīsim divas kopas $X = Y = \mathbb{R}$. Pieņemsim, ka kopā X dota topoloģija τ_S, kur $S = 0$, bet kopā Y dota parastā topoloģija τ_{dab} (skat. 1.5. uzdevumu).

1. Pierādīt, ka jebkura pāra funkcija $f : (X, \tau_S) \to (Y, \tau_{dab})$ ir nepārtraukta. Pierādīt, ka šāds apgalvojums ir spēkā pat, ja kopā Y dota patvaļīga topoloģija.
2. Noteikt, vai jebkura nepāra funkcija $g : (X, \tau_S) \to (Y, \tau_{dab})$ ir nepārtraukta.

6.12. uzdevums. Pieņemsim, ka kopā $\mathbb{R}$ dota topoloģija τ_S, kur punkts $S = 0$ (skat. 1.5. uzdevumu).

1. Pierādīt, ka jebkura pāra un jebkura nepāra funkcija $f : (\mathbb{R}, \tau_S) \to (\mathbb{R}, \tau_S)$ ir nepārtraukta.
2. Atrast nepārtrauktības kritēriju funkcijai
$$f : (\mathbb{R}, \tau_S) \to (\mathbb{R}, \tau_S).$$

6.13. uzdevums. Pieņemsim, ka kopā $X = \mathbb{R}$ dota patvaļīga topoloģija τ, bet kopā $Y = \mathbb{R}$ dota topoloģija τ_{irr} (skat. 1.19. uzdevumu).

1. Pierādīt, ka jebkura funkcija $f : (X, \tau) \to (Y, \tau_{irr})$, kuras vērtības ir racionāli skaitļi (t.i., $f(x) \in \mathbb{Q}$, $x \in X$), ir nepārtraukta.
2. Ja $\tau = \tau_{dab}$, minēt nepārtrauktas funkcijas piemēru, kuras vērtības ir gan racionāli, gan iracionāli skaitļi.
3. Noteikt, vai ir nepārtrauktas šādas funkcijas
$$f : (\mathbb{R}, \tau_{dab}) \to (\mathbb{R}, \tau_{irr}) :$$
   (a) $f(x) = [x]$ (šeit $[x]$ ir reāla skaitļa x veselā daļa);
   (b) $f(x) = x^2 + x - 3$;
   (c) $f(x) = \cos x$;
   (d) $f(x) = \sqrt{2}x$;
   (e) $f(x) = sign x$.

6.14. uzdevums. Apskatīsim funkciju
$$f : (\mathbb{R}, \tau_{irr}) \to (\mathbb{R}, \tau_{irr}).$$
(Topoloģiju τ_{irr} skat. 1.5. uzdevumā).

1. Pierādīt, ka funkcija f ir nepārtraukta tad un tikai tad, ja izpildās implikācija:
   ja funkcijas vērtība ir iracionāls skaitlis, tad arī atbilstošā argumenta vērtība ir iracionāls skaitlis, t.i., ja $f(x) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, tad $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.
2. Noteikt, vai funkcija $f(x) = x^n$, kur $n > 1$ un $n \in \mathbb{N}$, ir nepārtraukta.

6.15. uzdevums. Atrast kaut kādu nepārtrauktības kritēriju funkcijai f:

1. $f : (\mathbb{R}, \tau_{dab}) \to (\mathbb{R}, \tau_{irr})$;
2. $f : (\mathbb{R}, \tau_{irr}) \to (\mathbb{R}, \tau_{dab})$.

6.16. uzdevums. Apskatīsim funkciju

$$f : (\mathbb{R}, \tau_{dab}) \to (\mathbb{R}, \tau_k)$$

(šeit: τ_k ir Zariska jeb ko-galīgā topoloģija, skat. 1.9. uzdevumu).

1. Atrast nepārtrauktības kritēriju funkcijai f.
2. Pierādīt, ka jebkurš polinoms $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_i \in \mathbb{R}$, ir nepārtraukta funkcija.
3. Pierādīt, ka funkcija $f(x) = \cos x$ ir nepārtraukta.

6.17. uzdevums. Pieņemsim, ka X ir patvaļīga bezgalīga kopa. Apskatīsim Zariska topoloģisko telpu (X, τ_k) (skat. 1.9. uzdevumu) un parasto topoloģiju τ_{dab} kopā $Y = \mathbb{R}$. Pierādīt, ka funkcija

$$f : (X, \tau_k) \to (\mathbb{R}, \tau_{dab})$$

ir nepārtraukta funkcija tad un tikai tad, ja f ir konstanta funkcija.

6.18. uzdevums. Pieņemsim, ka $X = Y = (\mathbb{R}, \tau_k)$ ir reālo skaitļu taisnes ar Zariska topoloģiju.

1. Minēt kādas nepārtrauktas funkcijas $f : X \to Y$ un kādas pārtrauktas funkcijas $g : X \to Y$ piemēru.
2. Vai ir spēkā apgalvojums, ka katra stingi monotona funkcija $f : X \to Y$ ir nepārtraukta, bet katra periodiska funkcija $f : X \to Y$ ir pārtraukta?
3. Atrast nepārtrauktības kritēriju funkcijai

$$f : (\mathbb{R}, \tau_k) \to (\mathbb{R}, \tau_k).$$

6.19. uzdevums. Noteikt, vai ir nepārtrauktas šādas funkcijas

$$f : (\mathbb{R}, \tau_r) \to (\mathbb{R}, \tau_r)$$

(topoloģiju τ_r skat. 1.5. uzdevumā):

1. $f(x) = x^2$;
2. $f(x) = \cos x$.

6.20. uzdevums. Noteikt, vai attēlojums

$$f : (\mathbb{R}, \tau_r) \to (\mathbb{R}, \tau_S),$$

kur punkts $S = 0$, (topoloģijas τ_r un τ_S skat. 1.5. uzdevumā) ir nepārtraukts, ja funkcija $f(x) = \cos x$.

6.21. uzdevums. Noteikt, vai attēlojums

$$f : (\mathbb{R}, \tau_S) \to (\mathbb{R}, \tau_r),$$

kur punkts $S = 0$, (topoloģijas τ_r un τ_S skat. 1.5. uzdevumā) ir nepārtraukts, ja funkcija $f(x) = \sin x$.

6.22. uzdevums. Pieņemsim, ka X ir reālo skaitļu kopa ar parasto topoloģiju τ_{dab}, bet Y ir reālo skaitļu kopa ar Zorgenfreija topoloģiju τ_b (skat. 2.5. uzdevumā).

1. Noteikt, vai dotās funkcijas $f : X \to Y$ ir nepārtrauktas punktā $x = 0$:
   (a) $y = f(x) = x^2$;
   (b) $y = f(x) = x^3$;
   (c) $y = f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0; \\ 1, & x \neq 0. \end{cases}$
2. Atrast nepārtrauktības kritēriju funkcijai $f : (\mathbb{R}, \tau_{dab}) \to (\mathbb{R}, \tau_b)$.
3. Noteikt, vai dotās funkcijas $g : Y \to X$ ir nepārtrauktas punktā $y = 0$:
   (a) $x = g(y) = \operatorname{sign} y$;
   (b) $x = g(y) = [y]$ (šeit $[y]$ reālā skaitļa y veselā daļa).
4. Atrast nepārtrauktības kritēriju funkcijai $f : (\mathbb{R}, \tau_b) \to (\mathbb{R}, \tau_{dab})$.

6.23. uzdevums. Reālo skaitļu kopā $\mathbb{R}$ apskatīsim topoloģiju τ_4, kuras bāze ir sistēma

$$B_4 = \{(a; +\infty) \mid a \in \mathbb{R}\}$$

(skat. 2.10. uzdevumu).

1. Noteikt, vai dotās funkcijas $f : (\mathbb{R}, \tau_{dab}) \to (\mathbb{R}, \tau_4)$ ir nepārtrauktas punktā $x = 0$:
   (a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$
   (b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & x \neq 0; \\ 1, & x = 0. \end{cases}$
   (c) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ c, & x \in \mathbb{I} \text{ (šeit c ir fiksēts reāls skaitlis).} \end{cases}$
2. Atrast nepārtrauktības kritēriju funkcijai

$$f : (\mathbb{R}, \tau_{dab}) \to (\mathbb{R}, \tau_4).$$

6.24. uzdevums. Apskatīsim funkciju

$$f : (\mathbb{R}, \tau_{dab}) \to (\mathbb{R}, \tau_{dab}),$$

kuras analītiskā izteiksme ir

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}.$$

Pierādīt, ka f ir nepārtraukts attēlojums, taču nav ne vaļējs, ne slēgts attēlojums.

6.25. uzdevums. Apskatīsim tādu funkciju $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, ka katram punktam $(x_1; x_2) \in \mathbb{R}^2$ attēls $f((x_1; x_2)) = x_1$. Pierādīt, ja

1. funkcija

$$f : (\mathbb{R}^2, \tau_{dab}) \to (\mathbb{R}, \tau_{dab}),$$

   tad f ir nepārtraukts un vaļējs attēlojums, bet nav slēgts attēlojums.
2. funkcija

$$f : (\mathbb{R}^2, \tau_c) \to (\mathbb{R}, \tau_k),$$

   tad f ir vaļējs attēlojums, bet nav slēgts un nav nepārtraukts attēlojums.

(Parasto topoloģiju τ_{dab} skat. 1.5. uzdevumā, ko-galīgo topoloģiju τ_k skat. 1.9. uzdevumā un ko-sanumurējamo topoloģiju τ_c skat. 1.10. uzdevumā.)

6.26. uzdevums. Apskatīsim funkciju

$$f : (\mathbb{R}, \tau_{dab}) \to ([0; 1], \tau_{ind}),$$

kur

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ x, & 0 \leq x \leq 1; \\ 1, & x \geq 1, \end{cases}$$

bet τ_{ind} ir taisnes $\mathbb{R}$ parastās topoloģijas τ_{dab} inducētā topoloģija kopā $[0; 1]$. Pierādīt, ka f ir nepārtraukts un slēgts attēlojums, bet nav vaļējs attēlojums.

6.27. uzdevums. Apskatīsim funkciju

$$f : (\mathbb{R}, \tau_b) \to (\{0; 1\}, \tau_1),$$

kur

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1, & x \geq 0, \end{cases}$$

bet topoloģija $\tau_1 = \{\emptyset, \{0; 1\}, \{0\}\}$ un τ_b ir Zorgenfreija topologija (skat. 2.5. uzdevumu). Pierādīt, ka f nav vaļējs, nav slēgts un nav nepārtraukts attēlojums.

6.28. uzdevums. Pierādīt, ka slēgtu (vaļēju) attēlojumu kompozīcija ir slēgts (vaļējs) attēlojums.

6.29. uzdevums. Apskatīsim funkciju

$$f : (\mathbb{R}, \tau_b) \to (\mathbb{R}, \tau_b),$$

kuras analītiskā izteiksme ir

$$f(x) = ax, \ x \in \mathbb{R}$$

(šeit a ir fiksēts reāls skaitlis). Pierādīt, ka

1. attēlojums f ir homeomorfisms, ja a ir reāls pozitīvs skaitlis;
2. attēlojums f pat nav nepārtraukts attēlojums, ja a ir reāls negatīvs skaitlis.

6.30. uzdevums. Apskatīsim funkciju

$$f : (\mathbb{R}, \tau) \to (\mathbb{R}, \tau),$$

kuras analītiskā izteiksme ir

$$f(x) = ax, \ x \in \mathbb{R}$$

(šeit a ir fiksēts reāls skaitlis). Noteikt, vai f ir nepārtraukts attēlojums un homeomorfisms, ja

1. $\tau = \tau_{dab}$ (parastā topoloģija),
2. $\tau = \tau_d$ (diskrētā topoloģija),
3. $\tau = \tau_a$ (antidiskrētā topoloģija),
4. $\tau = \tau_k$ (ko-galīgā topoloģija).

6.31. uzdevums. Apskatīsim funkciju

$$f : (\mathbb{N}, \tau_k) \to (\mathbb{R}, \tau_{dab}).$$

Pierādīt, ka f ir nepārtraukts attēlojums tad un tikai tad, ja f ir konstants attēlojums.

6.32. uzdevums. Pierādīt, ka no visiem attēlojumiem, kas reālo skaitļu taisni ar parasto topoloģiju attēlo par diskrētu topoloģisku telpu, tikai konstants attēlojums ir nepārtraukts.

6.33. uzdevums. Apskatīsim šādas topoloģiskas telpas $(\mathbb{R}, \tau_d)$, $(\mathbb{R}, \tau_a)$, $(\mathbb{R}, \tau_k)$, $(\mathbb{R}, \tau_b)$, $(\mathbb{R}, \tau_{dab})$, kur τ_d ir diskrētā topoloģija, τ_a - antidiskrētā topoloģija, τ_k - ko-galīgā topoloģija, τ_b - bultiņas topoloģija, bet τ_{dab} ir parastā topoloģija kopā $\mathbb{R}$. Ievērosim, ka

$$\tau_a \subset \tau_b \subset \tau_{dab} \subset \tau_k \subset \tau_d.$$

Apskatīsim identiskos attēlojumus $f_i(x) = id(x) = x$, kur $i = \overline{1,8}$, kas kopu $\mathbb{R}$ attēlo sevī:

$$(\mathbb{R}, \tau_d) \xrightarrow{f_1} (\mathbb{R}, \tau_b) \xrightarrow{f_2} (\mathbb{R}, \tau_{dab}) \xrightarrow{f_3} (\mathbb{R}, \tau_k) \xrightarrow{f_4} (\mathbb{R}, \tau_a);$$

$$(\mathbb{R}, \tau_d) \xleftarrow[f_8]{} (\mathbb{R}, \tau_b) \xleftarrow[f_7]{} (\mathbb{R}, \tau_{dab}) \xleftarrow[f_6]{} (\mathbb{R}, \tau_k) \xleftarrow[f_5]{} (\mathbb{R}, \tau_a).$$

Pierādīt, ka attēlojumi f_1, f_2, f_3, f_4 un to kompozīcijas ir nepārtraukti, savukārt, attēlojumi f_5, f_6, f_7, f_8 un to kompozīcijas nav nepārtraukti attēlojumi.

6.34. uzdevums. Pieņemsim, ka $Y = (Y, \tau_Y)$ ir patvaļīga topoloģiska telpa, X ir patvaļīga netukša kopa, bet $f : X \to Y$ ir patvaļīgs attēlojums.

1. Pierādīt, ka apakškopu saime

$$\tau = \{f^{-1}(V) \;/\; V \in \tau_Y\}$$

   ir topoloģija kopā X (šo topoloģiju kopā X sauc par *iniciālo topoloģiju*).
2. Pierādīt, ka iniciālā topoloģija $\tau = \{f^{-1}(V) \;/\; V \in \tau_Y\}$ ir visvājākā starp visām topoloģijām τ_X kopā X, kurām attēlojums $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ ir nepārtraukts.
3. Kopā $X = \mathbb{R}$ konstruēt iniciālo topoloģiju, ja $Y = (\mathbb{R}, \tau_{dab})$ un attēlojums:
   (a) $f(x) = x^2$;
   (b) $f(x) = \sin x$;
   (c) $f(x) = \operatorname{sign} x$;
   (d) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{I}. \end{cases}$

6.35. uzdevums. Pieņemsim, ka $Y_\alpha = (Y, \tau_\alpha)$, kur $\alpha \in I$, ir patvaļīgu topoloģisku telpu saime, X ir patvaļīga netukša kopa, bet $f_\alpha : X \to Y_\alpha$, kur $\alpha \in I$, ir patvaļīgu attēlojumu saime. Pierādīt, ka eksistē tāda visvājākā topoloģija kopā X, kurā visi attēlojumi f_α, kur $\alpha \in I$, ir nepārtraukti (šo topoloģiju kopā X sauc par *vispārināto iniciālo topoloģiju*).

6.36. uzdevums. Pieņemsim, ka $X = (X, \tau_X)$ ir patvaļīga topoloģiska telpa, Y ir patvaļīga netukša kopa, bet $f : X \to Y$ ir patvaļīgs attēlojums.

1. Pierādīt, ka apakškopu saime

$$\tau = \{G \;/\; G \in Y, f^{-1}(G) \in \tau_X\}$$

   ir topoloģija kopā Y (šo topoloģiju kopā Y sauc par *finālo topoloģiju*).
2. Pierādīt, ka finālā topoloģija $\tau = \{G \;/\; G \in Y, f^{-1}(G) \in \tau_X\}$ ir visstiprākā no visām tām topoloģijām τ_Y kopā Y, kurām attēlojums $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ ir nepārtraukts.
3. Kopā $Y = \mathbb{R}$ konstruēt finālo topoloģiju, ja $X = (\mathbb{R}, \tau_{dab})$ un attēlojums:

(a) $f(x) = x^2$;

(b) $f(x) = \sin x$;

(c) $f(x) = \operatorname{sign} x$;

(d) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{I}. \end{cases}$

6.37. uzdevums. Pieņemsim, ka $X_\alpha = (X, \tau_\alpha)$, kur $\alpha \in I$, ir patvaļīgu topoloģisku telpu saime, Y ir patvaļīga netukša kopa, bet $f_\alpha : X_\alpha \to Y$, kur $\alpha \in I$, ir patvaļīgu attēlojumu saime. Pierādīt, ka eksistē tāda visstiprākā topoloģija kopā Y, kurā visi attēlojumi f_α, kur $\alpha \in I$, ir nepārtraukti (šo topoloģiju kopā X sauc par *vispārināto finālo topoloģiju*).

6.38. uzdevums. Vai vispārinātā iniciālā (vispārinātā finālā) topoloģija kļūs stiprāka vai vājāka, ja tiks paplašināta attēlojumu $f_\alpha : X \to Y$, kur $\alpha \in I$, saime $\{f_\alpha, \alpha \in I\}$?

6.39. uzdevums. Pieņemsim, ka kopa $X = Y = \mathbb{R}$. Noskaidrot, kuri no attēlojumiem $f(x)$ ir homeomorfismi:

1. $f : (X, \tau_k) \to (Y, \tau_k)$, ja $f(x) = x^3$;
2. $f : (X, \tau_{irr}) \to (Y, \tau_{irr})$, ja $f(x) = x^3$;
3. $f : (X, \tau_r) \to (Y, \tau_r)$, ja $f(x) = \operatorname{tg} x$;
4. $f : (X, \tau_S) \to (Y, \tau_S)$, ja $f(x) = \operatorname{tg} x$ un punkts $S = 0$.

6.40. uzdevums. Pieņemsim, ka $f : X \to Y$ ir patvaļīgs bijektīvs nepārtraukts telpas (X, τ_X) attēlojums par telpu (Y, τ_Y). Pierādīt, ka šādi trīs nosacījumi ir ekvivalenti:

1. f ir vaļējs attēlojums;
2. f ir slēgts attēlojums;
3. f ir homeomorfs attēlojums.

6.41. uzdevums. Konstruēt nehomeomorfas topoloģiskas telpas X un Y, katra no kurām būtu homeomorfa otras telpas kādai apakštelpai.

6.42. uzdevums. Konstruēt nehomeomorfas topoloģiskas telpas X un Y, katru no kurām, izmantojot bijektīvu nepārtrauktu funkciju, var attēlot par otru telpu.

6.43. uzdevums. Pierādīt, ka jebkura metriska telpa ir homeomorfa metriskai telpai ar galīgu diametru. (Norādījums, skat. 1.25. uzdevumu, izmantot attēlojumu $id : (X, \rho) \to (X, \rho^*)$, t.i., $id(x) = x$ katram punktam $x \in X$).

6.44. uzdevums. Attēlojumu $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ sauksim par sekvencionāli nepārtrauktu, ja katrai virknei (x_n) ($x_n \in X$ un $n \in N$), kuras robeža $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, šīs virknes attēlu robeža $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

1. Pierādīt, ka attēlojums $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ ir sekvencionāli nepārtraukts tad un tikai tad, ja jebkuras telpas Y sekvencionāli slēgtas apakškopas B pirmtēls $f^{-1}(B)$ ir sekvencionāli slēgta apakškopa telpā (X, τ_X) (skat. 3.60. uzdevumu).
2. Pierādīt, ja attēlojums $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ ir nepārtraukts, tad šis attēlojums ir arī sekvencionāli nepārtraukts.
3. Pierādīt, ja topoloģiskā telpa (X, τ_X) apmierina pirmo sanumurējamības aksiomu, un attēlojums $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ ir sekvencionāli nepārtraukts, tad šis attēlojums ir nepārtraukts.

4. Pierādīt, ja topoloģiskā telpa (X, τ_X) apmierina pirmo sanumurējamības aksiomu vai telpa (X, τ_X) ir metriska telpa ($\tau_X = \tau_\rho$ metriskā topoloģija), tad attēlojums $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ ir nepārtraukts, tad un tikai tad, ja šis attēlojums ir sekvencionāli nepārtraukts.

6.45. uzdevums. Pieņemsim, ka $f : X \to Y$ ir patvaļīgs slēgts attēlojums, $\Phi \subset Y$ un $F = f^{-1}(\Phi)$, bet U ir patvaļīga vaļēja kopa telpā X, kura satur kopu F. Pierādīt, ka telpā Y eksistē tāda vaļēja kopa V, ka $\Phi \subset V$ un $f^{-1}(V) \subset U$.

6.46. uzdevums. Pierādīt, ka attēlojums $f : X \to Y$ ir slēgts tad un tikai tad, ja katram punktam $y \in Y$ un katrai kopas $f^{-1}(y)$ apkārtnei U eksistē tāda punkta y apkārtne V, kurai $f^{-1}(V) \subset U$.

6.47. uzdevums. Vai eksistē topoloģiska telpa, kuras jebkurš vaļējs attēlojums uz citu topoloģisku telpu ir slēgts?

6.48. uzdevums. Pierādīt, ka attēlojums $f : X \to Y$ ir vaļējs tad un tikai tad, ja

1. katrai kopai $B \subset Y$ ir spēkā apgalvojums $f^{-1}(\overline{B}) \subset \overline{f^{-1}(B)}$;
2. katrai kopai $B \subset Y$ ir spēkā apgalvojums $f^{-1}(FrB) \subset Fr[f^{-1}(B)]$. (Šeit $\overline{B}$ ir kopas B slēgums, bet FrB ir kopas B robeža).

6.49. uzdevums. Pieņemsim, ka $f : X \to Y$ ir vaļējs attēlojums, kas topoloģisko telpu X attēlo uz topoloģisko telpu Y. Kopa $X' = f^{-1}(Y')$ ir apakškopas $Y' \subset Y$ pirmtēls ar attēlojumu f. Pierādīt, ka attēlojums $f' : X' \to Y'$ ir vaļējs attēlojums, ja $f' = f\big|_{X'}$ ir attēlojuma f sašaurinājumskopā X'.

6.50. uzdevums. Pierādīt, ka attēlojums $f : X \to Y$ ir vaļējs tad un tikai tad, ja topoloģiskās telpas X katras bāzes kopas attēls ar f ir vaļēja kopa topoloģiskā telpā Y.

6.51. uzdevums. Pieņemsim, ka $f : X \to Y$ ir nepārtraukts vaļējs attēlojums, kas topoloģisko telpu X attēlo uz topoloģisko telpu Y. Pierādīt, ka telpas Y svars nepārsniedz telpas X svaru.

6.52. uzdevums. Pieņemsim, ka $f : X \to Y$ ir vaļējs attēlojums, apakškopa $X' \subset X$ un katram punktam $y \in Y$ pirmtēls $f^{-1}(y) = X' \cap f^{-1}(y)$. Pierādīt, ka attēlojuma f sašaurinājums kopā X' $f' = f\big|_{X'} : X' \to Y$ ir vaļējs attēlojums.

6.53. uzdevums. Pieņemsim, ka X ir patvaļīga topoloģiska telpa, bet X' patvaļīga apakškopa $X' \subset X$. Pierādīt, ka inducētā topoloģija kopā X' ir vismazākā no visām iespējamajām topoloģijām kopā X', kurai attēlojums $id : X' \to X$ ir nepārtraukts (šeit $id : X \to X'$ ir identiskais attēlojums), kurš katram punktam $x \in X'$ piekārto to pašu punktu, t.i., $id(x) = x$.

6.54. uzdevums. Pieņemsim, ka kopa $X \subset \mathbb{R}^2$ ir kvadrāts ar savu robežu, bet kopa $Y \subset \mathbb{R}$ ir viena no kvadrāta malām, attēlojums $f : X \to Y$ ir kopas X projekcija uz Y. Pierādīt, ka $f : (X, \tau_{dab}) \to (Y, \tau_{dab})$, kur τ_{dab} ir parastā topoloģija, ir nepārtraukts, vaļējs un slēgts attēlojums.

6.55. uzdevums. Pieņemsim, ka kopa X ir kvadrāts bez savas robežas, bet kopa Y ir viena no kvadrāta malām (nogrieznis bez galapunktiem), attēlojums $f : X \to Y$ ir kopas X projekcija uz Y. Pierādīt, ka $f : (X, \tau_{dab}) \to (Y, \tau_{dab})$, kur τ_{dab} ir parastā topoloģija, ir nepārtraukts, vaļējs, bet nav slēgts attēlojums.

6.56. uzdevums. Pieņemsim, ka X un Y ir patvaļīgas topoloģiskas telpas, $f : X \to Y$ ir patvaļīgs attēlojums, bet $Y' \subset Y$ ir patvaļīga telpas Y apakštelpa, kurai $f(X) \subset Y'$. Pierādīt, ja

1. attēlojums $f : X \to Y$ ir nepārtraukts, tad arī $f : X \to Y'$ ir nepārtraukts attēlojums;
2. attēlojums $f : X \to Y$ ir vaļējs, tad arī $f : X \to Y'$ ir vaļējs attēlojums;
3. attēlojums $f : X \to Y$ ir slēgts, tad arī $f : X \to Y'$ ir slēgts attēlojums.

6.57. uzdevums. Pieņemsim, ka X un Y ir patvaļīgas topoloģiskas telpas, $f : X \to Y$ ir nepārtraukts attēlojums, bet $X' \subset X$ ir patvaļīga telpas X apakštelpa, $Y' = f(X')$ un $f' = f\big|_{X'}$. Vai pareizi ir šādi apgalvojumi?

1. $f' : X' \to Y'$ ir nepārtraukts attēlojums;
2. Ja X' ir slēgta telpas X apakškopa un $f : X \to Y$ ir slēgts attēlojums, tad arī $f' : X' \to Y'$ ir slēgts attēlojums;
3. Ja X' ir vaļēja kopas X apakškopa un $f : X \to Y$ ir vaļējs attēlojums, tad arī $f' : X' \to Y'$ ir vaļējs attēlojums.

7. nodaļa

Sakarīgas un lineāri sakarīgas telpas

Apskatīsim topoloģisko telpu (X, τ) un patvaļīgu apakškopu $A \subset X$. Ar λ apzīmēsim topoloģiskās telpas (X, τ) visu slēgto apakškopu saimi.

7.1. definīcija. Topoloģisko telpu (X, τ) sauc par **nesakarīgu**, ja eksistē tādas netukšas vaļējas kopas $U \in \tau$ un $V \in \tau$, kurām izpildās nosacījumi:

1. $X = U \cup V$;
2. $U \cap V = \emptyset$.

7.2. definīcija. Topoloģisko telpu (X, τ) sauc par **sakarīgu**, ja šī telpa nav nesakarīga.

7.3. definīcija. Topoloģiskas telpas (X, τ) kopu A sauc par **sakarīgu**, ja telpas (X, τ) attiecīgā apakštelpa (A, τ_A) ir sakarīga.

7.1. teorēma. Topoloģiskā telpa (X, τ) ir nesakarīga tad un tikai tad, ja

1. eksistē tādas netukšas slēgtas kopas $U \in \lambda$ un $V \in \lambda$, kurām izpildās nosacījumi:
$$X = U \cup V \text{ un } U \cap V = \emptyset.$$
2. eksistē netukša un no pašas kopas X atšķirīga apakškopa, kas ir vienlaicīgi slēgta un vaļēja, t.i., eksistē kopa $U \subset X$, ka:
$$U \in \tau;\ U \in \lambda;$$
$$U \neq \emptyset;\ U \neq X.$$

7.4. definīcija. Topoloģisko telpu (X, τ) sauc par **lineāri sakarīgu**, ja jebkuriem diviem punktiem $x_1 \in X$ un $x_2 \in X$ eksistē tāds nepārtraukts attēlojums $f : ([0; 1], \tau_{dab}) \to (X, \tau)$, ka
$$f(0) = x_1 \text{ un } f(1) = x_2.$$

7.2. teorēma. Lineāri sakarīga topoloģiska telpa ir sakarīga.

7.5. definīcija. Par **punkta** $x \in X$ **sakarīgo komponenti** sauc lielāko sakarīgo kopu $K_x \subset X$, kurai $x \in K_x$, t.i., ja $A \subset X$, $x \in A$, A-sakarīga kopa telpā (X, τ), tad $A \subset K_x$.

7.6. definīcija. Par **telpas** (X, τ) **sakarīgo komponenti** sauc lielāko netukšo sakarīgo apakškopu $K \subset X$, t.i., ja $A \subset X$, A-sakarīga kopa telpā (X, τ), $A \cap K \neq \emptyset$, tad $A \subset K$.

7.7. definīcija. Par punkta $x \in X$ lineāri sakarīgo komponenti sauc lielāko lineāri sakarīgo kopu $L_x \subseteq X$, kurai $x \in L_X x$, t.i., ja $A \subset X$, $x \in A$, A - lineāri sakarīga kopa telpā (X, τ), tad $A \subset L_x$.

7.1. uzdevums. Noskaidrot, vai šādas topoloģiskās telpas ir sakarīgas:

1. $(\mathbb{R}, \tau_d)$ (skat. 1.2. uzdevumu);
2. $(\mathbb{R}, \tau_b)$ (skat. 2.5. uzdevumu);
3. $(\mathbb{R}, \tau_{irr})$ (skat. 1.19. uzdevumu);
4. $(\mathbb{R}, \tau_{cr})$ (skat. 1.5. uzdevumu).

7.2. uzdevums. Pierādīt, ka topoloģiskās telpas $(\mathbb{R}^2, \tau_{MN})$ un $(\mathbb{R}^2, \tau_S)$ ir nesakarīgas (skat. 1.5. uzdevumu).

7.3. uzdevums. Pierādīt, ka topoloģiska telpa (X, τ) ir nesakarīga tad un tikai tad, ja eksistē netukša no kopas X atšķirīga apakškopa A, $A \subset X$, kurai nav robežas, t.i., $FrA = \emptyset$.

7.4. uzdevums. Izmantojot 7.3. uzdevuma apgalvojumu, pierādīt, ka topoloģiskā telpa $(\mathbb{R}^n, \tau_r)$ ir sakarīga.

7.5. uzdevums. Pieņemsim, ka (X, τ) ir patvaļīga topoloģiska telpa. Pierādīt, ka sakarīgas apakškopas $A \subset X$ slēgums $\overline{A}$ arī ir sakarīga kopa.

7.6. uzdevums. Pieņemsim, ka (X, τ) ir patvaļīga topoloģiska telpa. Pierādīt, ja šajā telpā eksistē sakarīga visur blīva apakškopa $A \subset X$, tad pati telpa (X, τ) ir sakarīga.

7.7. uzdevums. Minēt piemēru, ka topoloģiskas telpas (X, τ) sakarīgas apakškopas $A \subset X$ iekšiene $IntA$ ne vienmēr ir sakarīga kopa.

7.8. uzdevums. Minēt piemēru, ka topoloģiskas telpas (X, τ) sakarīgas apakškopas $A \subset X$ robeža FrA ne vienmēr ir sakarīga kopa.

7.9. uzdevums. Noskaidrot, vai topoloģiskās telpas $(\mathbb{R}, \tau_{dab})$ (skat. 1.5. uzdevumu) racionālo skaitļu apakškopa $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ir sakarīga kopa?

7.10. uzdevums. Pieņemsim, ka X -patvaļīga nesanumurējama kopa un τ_k ko-galīgā topoloģija kopā X (skat. 1.9. uzdevumu). Pierādīt, ka (X, τ_k) ir sakarīga telpa.

7.11. uzdevums. Pieņemsim, ka $S^0 = \{-1; 1\}$ ir nulldimensionāla sfēra topoloģiskā telpā $(\mathbb{R}, \tau_{dab})$. Pierādīt, ka topoloģiskā telpā (X, τ) ir nesakarīga tad un tikai tad, ja eksistē nepārtraukts sirjektīvs attēlojums $f : X \to S^0$.

7.12. uzdevums. Izmantojot 7.11. uzdevuma apgalvojumu, pierādīt, ka jebkurš nogrieznis $[a; b]$, kur $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$, ir sakarīga kopa topoloģiskā telpā $(\mathbb{R}, \tau_{dab})$.

7.13. uzdevums. Pieņemsim, ka (X, τ) ir patvaļīga topoloģiska telpa, $A \subset X$ patvaļīga apakškopa, bet $B \subset X$ sakarīga apakškopa. Pierādīt, ja $B \cap A \neq \emptyset$ un $B \cap (X \backslash A) \neq \emptyset$, tad $B \cap FrA \neq \emptyset$.

7.14. uzdevums. Noskaidrot, kuras no dotajām topoloģiskajām telpām ir lineāri sakarīgas:

1. (X, τ_1), kur kopa $X = \{a; b\}$ un topoloģija $\tau_1 = \{\emptyset; X; \{a\}\}$;
2. $(\mathbb{R}, \tau_{dab})$ (skat. 1.5. uzdevumu);
3. $(\mathbb{R}, \tau_a)$ (skat. 1.1. uzdevumu);
4. $(\mathbb{R}, \tau_r)$ (skat. 1.5. uzdevumu);
5. $(\mathbb{R}, \tau_k)$ (skat. 1.9. uzdevumu);
6. $(\mathbb{R}, \tau_{irr})$ (skat. 1.19. uzdevumu).

7.15. uzdevums. Minēt tādas sakarīgas telpas piemēru, kura nav lineāri sakarīga telpa.

7.16. uzdevums. Pieņemsim, ka (X, τ) ir topoloģiska telpa un punkti $a, b \in X$, $a \neq b$. Pierādīt, ka šo punktu atbilstošās sakarīgās komponentes K_a un K_b vai nu nešķeļas, vai nu sakrīt.

7.17. uzdevums. Pieņemsim, ka (X, τ) ir sakarīga topoloģiska telpa un katram punktam $x \in X$ eksistē lineāri sakarīga apkārtne U ($x \in U$, $U \in \tau$). Pierādīt, ka topoloģiska telpa (X, τ) ir lineāri sakarīga topoloģiska telpa.

7.18. uzdevums. Izmantojot 7.17. uzdevuma apgalvojumu, pierādīt, ka topoloģiskā telpā $(\mathbb{R}^n, \tau_{dab})$ jebkurai vaļējai kopai G, $G \subset \mathbb{R}^n$, sakarīgums un lineārais sakarīgums ir ekvivalentas īpašības, tai skaitā telpa $(\mathbb{R}^n, \tau_{dab})$ ir vienlaicīgi sakarīga un lineāri sakarīga.

7.19. uzdevums. Vai vienmēr topoloģiskas telpas sakarīgā komponente (punkta sakarīgā komponente) ir

1. slēgta kopa;
2. vaļēja kopa?

7.20. uzdevums. Atrast sakarīgo komponenti šādām topoloģiskām telpām:

1. (X, τ_1), kur kopa $X = \{a; b; c\}$ un topoloģija $\tau_1 = \{\emptyset; X; \{a\}; \{b; c\}\}$;
2. $(\mathbb{R}, \tau_{dab})$ (skat. 1.5. uzdevumu);
3. $(\mathbb{R}, \tau_a)$ (skat. 1.1. uzdevumu);
4. $(\mathbb{R}, \tau_r)$ (skat. 1.5. uzdevumu);
5. $(\mathbb{R}, \tau_k)$ (skat. 1.9. uzdevumu).

7.21. uzdevums. Apskatīsim topoloģiskās telpas $(\mathbb{R}^2, \tau_{dab})$ apakštelpu (E, τ_E) ar inducēto topoloģiju τ_E, ja $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n \cup \{A\} \cup \{B\}$, kur kopa

$M_n = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : \ f(x) \in [0; 1], y = \frac{1}{n}\}$, $(n \in \mathbb{N})$ un $A = (0; 0)$, $B = (1; 0)$ ir kopas $\mathbb{R}^2$ punkti. Atrast kopas E punktu sakarīgās komponentes.

7.22. uzdevums. Pieņemsim, ka (X, τ) ir patvaļīga topoloģiska telpa, punkts $x \in X$, bet K_x un L_x ir attiecīgi punkta x sakarīgā komponente un lineāri sakarīgā komponente.

1. Pierādīt, ka kopa K_x ir vienmēr slēgta, taču ne vienmēr kopa L_x ir slēgta.
2. Pierādīt, ka vienmēr spēkā ir nosacījums $L_x \subset K_x$, taču ne vienmēr paliek spēkā nosacījums $K_x \subset L_x$.
3. Ja topoloģiskās telpas (X, τ) katram punktam eksistē lineāri sakarīga apkārtne, tad jebkura lineāri sakarīgā komponente L_x ir vienlaicīgi vaļēja un slēgta kopa un $L_x = K_x$.

7.23. uzdevums. Pieņemsim, ka $\{X_\alpha, \alpha \in I\}$ ir topoloģiskas telpas (X, τ) sakarīgu (lineāri sakarīgu) kopu sistēma. Pierādīt, ka, ja šķēlums $\bigcap\limits_{\alpha} X_\alpha \neq \emptyset$, tad apvienojums $\bigcup\limits_{\alpha} X_\alpha$ ir sakarīga (lineāri sakarīga) kopa telpā (X, τ).

7.24. uzdevums. Pieņemsim, ka $f : X \to Y$ ir nepārtraukts sirjektīvs attēlojums, kas attēlo topoloģisko telpu (X, τ_X) par topoloģisko telpu (Y, τ_Y). Pierādīt, ka, ja topoloģiska telpa (X, τ_X) ir sakarīga (lineāri sakarīga), tad topoloģiska telpa (Y, τ_Y) arī ir sakarīga (lineāri sakarīga).

7.25. uzdevums. Pieņemsim, ka $f : X \to Y$ ir nepārtraukts attēlojums, kas attēlo topoloģisku telpu (X, τ_X) topoloģiskā telpā (Y, τ_Y). Pierādīt, ka, ja A ir topoloģiskas telpas (X, τ_X) sakarīga (lineāri sakarīga) kopa, tad kopa $f(A)$ arī ir sakarīga (lineāri sakarīga) topoloģiskā telpā (Y, τ_Y).

7.26. uzdevums. Pierādīt, ka topoloģiska telpa (X, τ) ir sakarīga tad un tikai tad, ja topoloģiskā telpā (X, τ) ir tikai no viena sakarīgā komponente.

7.27. uzdevums. Pieņemsim, ka topoloģiska telpa (X, τ) apmierina īpašību, ka katra punkta $a \in X$ sakarīgā komponente sastāv tikai no viena punkta, t.i., $K_a = \{a\}$. Šajā gadījumā topoloģisku telpu (X, τ) sauc par pilnīgi nesakarīgu telpu. Pierādīt, ka topoloģiskas telpas $(\mathbb{R}, \tau_{dab})$ apakštelpa $(\mathbb{Q}, \tau_{dab})$ ($\mathbb{Q}$ ir racionālo skaitļu kopa, ir reālo skaitļu kopa) apmierina šādas īpašības:

1. $(\mathbb{Q}, \tau_{dab})$ nav diskrēta telpa;
2. $(\mathbb{Q}, \tau_{dab})$ ir pilnīgi nesakarīga telpa.

7.28. uzdevums. Pierādīt, ka topoloģiska telpa (X, τ) ir sakarīga tad un tikai tad, ja jebkuriem diviem punktiem $x_1 \in X$ un $x_2 \in X$ eksistē topoloģiskas telpas (X, τ) sakarīga kopa A, kas satur šos punktus x_1 un x_2.

7.29. uzdevums. Topoloģiskas telpas (X, τ) kopas A un B sauc par atdalītām viena no otras, ja $\overline{A} \cap B = \emptyset$ un $A \cap \overline{B} = \emptyset$. Pierādīt, ka topoloģiska telpa (X, τ) ir nesakarīga tad un tikai tad, kad kopu X var izteikt kā divu netukšu, vienu no otras atdalītu kopu apvienojumu.

7.30. uzdevums. Pieņemsim, ka A un B ir divas netukšas slēgtas kopas topoloģiskā telpā (X, τ), kurām šķēlums $A \cap B$ un apvienojums $A \cup B$ ir sakarīgas kopas telpā (X, τ). Pierādīt, ka A un B ir sakarīgas kopas telpā (X, τ).

7.31. uzdevums. Atrast kontrpiemēru, kas parāda, ka 7.30. uzdevuma apgalvojums nav patiess, ja kopas A un B nav slēgtas kopas, bet šķēlums $A \cap B$ un apvienojums $A \cup B$ ir sakarīgas kopas.

8. nodaļa

Atdalāmības aksiomas, funkcionālā atdalāmība

Apskatīsim topoloģisko telpu (X, τ). Par kopas $F \subset X$ vaļēju apkārtni sauksim kopu

$$U(F) = \{G \in \tau,\ G \supset F\}.$$

Punkta $x \in X$ vaļējas apkārtnes jēdzienu skat. 2.1. definīciju.

8.1. definīcija. Topoloģisko telpu (X, τ) sauc par T_0 **telpu** jeb **Kolmogorova telpu**, ja jebkuriem punktiem $x,\ y \in X$ $(x \neq y)$ eksistē vai nu punkta x vaļēja apkārtne $U(x)$, kas nesatur punktu y, vai nu punkta y vaļēja apkārtne $U(y)$, kas nesatur punktu x:

$$\exists U(x) \not\ni y \text{ vai } \exists U(y) \not\ni x.$$

8.2. definīcija. Topoloģisko telpu (X, τ) sauc par T_1 **telpu** jeb **Freše telpu**, ja jebkuriem punktiem $x,\ y \in X$ $(x \neq y)$ eksistē punkta x vaļēja apkārtne $U(x)$, kas nesatur punktu y, un eksistē punkta y vaļēja apkārtne $U(y)$, kas nesatur punktu x:

$$\exists U(x) \not\ni y \text{ un } \exists U(y) \not\ni x.$$

8.3. definīcija. Topoloģisko telpu (X, τ) sauc par T_2 **telpu** jeb **Hausdorfa telpu**, ja jebkuriem punktiem $x,\ y \in X$ $(x \neq y)$ eksistē punkta x vaļēja apkārtne $U(x)$ un punkta y vaļēja apkārtne $U(y)$, kas nešķeļas:

$$\exists U(x) \text{ un } \exists U(y) : U(x) \cap U(y) = \emptyset.$$

8.4. definīcija. Topoloģisko telpu (X, τ) sauc par T_3 **telpu**, ja jebkuram punktam $x \in X$ un jebkurai slēgtai kopai $F \subset X$, kur $x \notin F$, eksistē punkta x vaļēja apkārtne $U(x)$ un kopas F vaļēja apkārtne $U(F)$, kas nešķeļas:

$$\exists U(x) \text{ un } \exists U(F) : U(x) \cap U(F) = \emptyset.$$

8.5. definīcija. Topoloģisko telpu (X, τ) sauc par T_4 **telpu**, ja jebkurām slēgtām kopām $F, G \subset X$, kur $F \cap G = \emptyset$, eksistē kopas F vaļēja apkārtne $U(F)$ un kopas G vaļēja apkārtne $U(G)$, kas nešķeļas:

$$\exists U(F) \text{ un } \exists U(G) : U(F) \cap U(G) = \emptyset.$$

T_0, T_1, T_2, T_3 un T_4 telpas definīcijas sauc arī par atdalāmības aksiomām.

8.6. definīcija. Topoloģisko telpu (X, τ) sauc par **regulāru telpu**, ja (X, τ) ir T_1 un T_3 telpa.

8.7. definīcija. Topoloģisko telpu (X, τ) sauc par **normālu telpu**, ja (X, τ) ir T_1 un T_4 telpa.

8.1. teorēma. Normāla telpa $\Rightarrow$ regulāra telpa $\Rightarrow T_2$ telpa $\Rightarrow T_1$ telpa $\Rightarrow T_0$ telpa.

8.8. definīcija. Topoloģiskas telpas (X, τ) apakškopas A un B ($A \subset X$, $B \subset X$) sauc par **funkcionāli atdalītām kopām**, ja eksistē nepārtraukta skaitliska funkcija $f : X \to [0; 1]$, kurai $0 \leq f(x) \leq 1$, ja $x \in X$, bet $f(x) = 0$, ja $x \in A$, un $f(x) = 1$, ja $x \in B$.

8.9. definīcija. Topoloģisko telpu (X, τ) sauc par $T_{3\frac{1}{2}}$ **telpu**, ja jebkurš punkts $x_0 \in X$ un jebkura slēgta kopa $F \subset X$, kurai $F \neq \emptyset$ un $x_0 \notin F$, ir funkcionāli atdalītas kopas, t.i., eksistē nepārtraukta skaitliska funkcija $f : X \to [0; 1]$, ka $f(x_0) = 0$ un $f(F) = \{1\}$, $f(X) \subset [0; 1]$.

8.10. definīcija. Topoloģisko telpu (X, τ) sauc par **pilnīgi regulāru telpu** jeb **Tihonova telpu**, ja (X, τ) ir T_1 un $T_{3\frac{1}{2}}$ telpa.

8.2. teorēma. (Mazā Urisona lemma) T_1 topoloģiska telpa (X, τ) ir normāla telpa tad un tikai tad, ja jebkurai slēgtai kopai $F \subset X$ un jebkurai vaļējai kopai $U \subset X$, kurai $F \subset U$, eksistē vaļēja kopa $V \subset X$, ka $F \subset V$, $V \in \tau$, kurai ir spēkā iekļaušana $\overline{V} \subset U$.

8.3. teorēma. (Lielā Urisona lemma) Ja A un B ir normālas topoloģiskas telpas (X, τ) divas slēgtas kopas ($A \subset X$, $B \subset X$, $A \cap B = \emptyset$), tad kopas A un B ir funkcionāli atdalītas kopas.

8.4. teorēma. (Pirmā Urisona metrizācijas teorēma) Topoloģiska telpa (X, τ), kas apmierina otro sanumurējamības aksiomu, ir metrizējama tad un tikai tad, ja (X, τ) ir normāla telpa.

8.1. uzdevums. Apskatīsim kopu $X_1 = \{a, b\}$ un $X_2 = \{a, b, c\}$, kā arī atbilstošās topoloģijas $\tau_1 = \{\emptyset, X_1, \{a\}\}$ un $\tau_2 = \{\emptyset, X_2, \{a\}\}$. Pierādīt, ka topoloģiskā telpa (X_1, τ_1) ir T_0 un T_4 telpa, taču nav T_1, T_2, T_3 telpa, nav regulāra un nav normāla telpa. Pierādīt, ka topoloģiskā telpa (X_2, τ_2) ir tikai T_4 telpa, taču nav T_0, T_1, T_2, T_3 telpa, nav regulāra un nav normāla telpa.

8.2. uzdevums. Pārbaudīt, kādas atdalāmības aksiomas apmierina šādas topoloģiskas telpas, kur $\mathbb{R}$ ir reālo skaitļu kopa:

1. $(\mathbb{R}, \tau_{dab})$ (skat. 1.5. uzdevumu);
2. $(\mathbb{R}, \tau_a)$ (skat. 1.1. uzdevumu);
3. $(\mathbb{R}, \tau_{irr})$ (skat. 1.19. uzdevumu);
4. $(\mathbb{R}, \tau_r)$ (skat. 1.5. uzdevumu);
5. $(\mathbb{R}, \tau_{cr})$ (skat. 1.5. uzdevumu);
6. $(\mathbb{R}, \tau_k)$ (skat. 1.9. uzdevumu).

8.3. uzdevums. Pieņemsim, ka X ir bezgalīga kopa un τ_k ir ko-galīgā topoloģija kopā X. Pierādīt, ka topoloģiska telpa (X, τ_k) ir T_1 telpa, bet nav T_2, T_3, T_4. Pierādīt, ka topoloģiska telpa (X, τ_k) ir **antihausdorfa** telpa, t.i., jebkuriem punktiem $x_1, x_2 \in X$ ($x_1 \neq x_2$) un jebkurām šo punktu vaļējām apkārtnēm $U_1(x_1) \in \tau_k$ un $U_2(x_2) \in \tau_k$ šķēlums $U_1(x_1) \cap U_2(x_2) = \emptyset$.

8.4. uzdevums. Pārbaudīt, ka topoloģiska telpa $(\mathbb{R}, \tau_{MN})$ un $(\mathbb{R}, \tau_S)$ (skat. 1.5. uzdevumu) ir T_3 un T_4 telpa, bet nav T_1 un T_2 telpa.

8.5. uzdevums. Pierādīt, ka atdalāmības aksioma T_2 ir mantojama, t.i., ja topoloģiska telpa (X, τ) ir T_2 telpa, tad jebkura tās apakštelpa (A, τ_A) arī ir T_2 telpa. Pierādīt, ka mantojamas ir atdalāmības aksiomas T_0, T_1, T_3 un T_4, kā arī īpašība būt regulārai telpai.

8.6. uzdevums. Pierādīt, ka īpašība būt normālai topoloģiskai telpai nav mantojama.

8.7. uzdevums. Pierādīt, ka normālas topoloģiskas telpas slēgta apakškopa ir normāla telpa.

8.8. uzdevums. Pierādīt, ka jebkura metriska telpa ir normāla telpa.

8.9. uzdevums. Pierādīt, ka regulāra topoloģiska telpa ar sanumurējamu bāzi ir normāla telpa.

8.10. uzdevums. Pierādīt, ja topoloģiska telpa vienlaicīgi ir T_0, T_3, tad tā ir regulāra telpa.

8.11. uzdevums. Pieņemsim, ka X ir racionālo skaitļu kopa no intervāla $[0;1]$, $A \subset X$ ir to skaitļu kopa, kurus var izteikt kā $\frac{k}{2^n}$, bet $B \subset X$ ir to skaitļu kopa, kurus var izteikt kā $\frac{k}{3^n}$, kur $k \in \mathbb{Z}$ un $n \in \mathbb{N}$. Apakškopu sistēma $\mathcal{B}$ sastāv no visiem iespējamajiem intervāliem $(a;b)$, $(a;b) \subset X$, un attiecīgi to šķēlumiem $A \cap (a;b)$, $B \cap (a;b)$. Pierādīt, ka sistēma $\mathcal{B}$ ir kādas topoloģijas τ kopā X bāze. Pierādīt, ka telpa (X,τ) ir Hausdorfa, bet nav regulāra telpa.

8.12. uzdevums. Pierādīt, ka Nemicka plakne ir regulāra telpa, bet nav normāla telpa (skat. 2.7. uzdevumu).

8.13. uzdevums. Pierādīt, ja Hausdorfa telpā (X,τ) neizolēto punktu kopa ir galīga, tad (X,τ) ir normāla telpa.

8.14. uzdevums. Pierādīt, ka topoloģiska telpa (X,τ_X) ir Hausdorfa telpa tad un tikai tad, ja jebkuriem diviem punktiem $x_1, x_2 \in X$ $(x_1 \neq x_2)$ eksistē tāda nepārtraukta funkcija f, kas telpu (X,τ_X) attēlo par Hausdorfa telpu (Y,τ_Y), kurai $f(x_1) \neq f(x_2)$.

8.15. uzdevums. Pierādīt, ja f ir injektīva nepārtraukta funkcija, kas telpu (X,τ_X) attēlo par Hausdorfa telpu (Y,τ_Y), tad topoloģiska telpa (X,τ_X) arī ir Hausdorfa telpa.

8.16. uzdevums. Pierādīt, ka topoloģiska telpa (X,τ) ir T_0 telpa tad un tikai tad, ja jebkuriem diviem punktiem $x_1, x_2 \in X$ $(x_1 \neq x_2)$ vai nu $x_1 \notin \overline{\{x_2\}}$, vai arī $x_2 \notin \overline{\{x_1\}}$.

8.17. uzdevums. Pierādīt, ka topoloģiska telpa (X,τ) ir T_1 telpa tad un tikai tad, ja jebkuram punktam $x \in X$ ir spēkā vienādība $\bigcap\limits_{U(x)\in\tau} U(x) = \{x\}$, kur $U(x)$ ir punkta $x \in X$ vaļēja apkārtne.

8.18. uzdevums. Pierādīt, ka katra T_1 topoloģiska telpa (X,τ) apmierina šādas īpašības:

1. ja kopa $A \subset X$ un punkts $x \in A^d$, tad jebkurai punkta x vaļējai apkārtnei $U(x) \in \tau$ kopa $U(x) \cap A$ ir bezgalīga;
2. ja kopa $A \subset X$ ir galīga kopa, tad A ir slēgta kopa;
3. ja kopa $A \subset X$, tad A^d ir slēgta kopa;
4. ja kopa $A \subset X$ un punkts $x \in A$, tad x ir kopas A izolētais punkts tad un tikai tad, kad kopa $\{x\}$ ir vaļēja.

8.19. uzdevums. Pierādīt, ka topoloģiska telpa (X,τ) ir Hausdorfa telpa tad un tikai tad, ja jebkuram punktam $x \in X$ ir spēkā vienādība $\bigcap\limits_{U(x)\in\tau} \overline{U(x)} = \{x\}$, kur $U(x)$ ir punkta $x \in X$ vaļēja apkārtne.

8.20. uzdevums. Pierādīt, ka T_1 topoloģiska telpa (X,τ) ir regulāra telpa tad un tikai tad, ja jebkurai punkta $x \in X$ vaļējai apkārtnei $U(x)$ eksistē punkta $x \in X$ tāda vaļēja apkārtne $V(x)$, ka $\overline{V(x)} \subset U(x)$. Pierādīt, ka apgalvojums paliek spēkā, ja nosacījumu, ka (X,τ) ir T_1 topoloģiska telpa nomaina ar nosacījumu, ka (X,τ) ir T_0 topoloģiska telpa.

8.21. uzdevums. Pierādīt, ka T_1 topoloģiska telpa (X,τ) ir normāla telpa tad un tikai tad, ja katrai slēgtai kopai $F \subset X$ un katrai kopas F vaļējai apkārtnei $U(F)$ eksistē kopas F tāda vaļēja apkārtne $V(F)$, ka $\overline{V(F)} \subset U(F)$.

8.22. uzdevums. Pierādīt, ka regulāra Lindelēva topoloģiska telpa (skat. 2.34. uzdevumu) ir normāla telpa.

8.23. uzdevums. Pierādīt, ka $(\mathbb{R}, \tau_b)$ (skat. 2.5. uzdevumu) ir normāla topoloģiska telpa.

8.24. uzdevums. Pierādīt, ja (X,τ) ir Hausdorfa topoloģiska telpa un $\tau \subset \tau'$, tad arī (X,τ') ir Hausdorfa telpa. Minēt piemēru, kas parāda, ka dotais apgalvojums ne vienmēr ir spēka, ja Hausdorfa telpas vietā apskata regulāru telpu (norādījums: apskatīt telpu $(\mathbb{R}, \tau_{dab})$ un $(\mathbb{R}, \tau_{kur})$, skat. 2.28. uzdevumu).

8.25. uzdevums. Pierādīt, ka jebkurā normālā topoloģiskā telpā katras galīgas sistēmas, kas sastāv no pa pāriem nešķeļošām slēgtām kopām, kopas var atdalīt ar pa pāriem nešķeļošām vaļējām apkārtnēm. Pierādīt, ka dotais apgalvojumas nav spēkā, ja apskata bezgalīgas sistēmas, kas sastāv no pa pāriem nešķeļošām slēgtām kopām.

8.26. uzdevums. Pierādīt, ka tikai konstants attēlojums $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$, kur (X, τ_X) ir antihausdorfa telpa, bet (Y, τ_Y) ir Hausdorfa topoloģiska telpa, ir nepārtraukts (skat. 8.3. uzdevumu).

8.27. uzdevums. Pieņemsim, ka f un g ir nepārtraukti attēlojumi, kas patvaļīgu topoloģisko telpu (X, τ_X) attēlo par Hausdorfa topoloģisko telpu (Y, τ_Y). Pierādīt,

1. ja visur blīvā kopā D telpā (X, τ_X) attēlojumi sakrīt $f(x) = g(x)$, tad jebkuriem punktiem $x \in X$ attēlojumi sakrīt $f(x) = g(x)$;
2. ka kopa $F = \{x \in X \;/\; f(x) = g(x)\}$ ir slēgta telpā (X, τ_X). Vai šis apgalvojums ir spēkā patvaļīgai topoloģiskai telpai (Y, τ_Y)?

8.28. uzdevums. Pārbaudīt, vai atdalāmības aksiomas paliek spēkā nepārtrauktu attēlojumu gadījumā (norādījums: apskatīt attēlojumu, kas telpu $(\mathbb{R}, \tau_{dab})$ attēlo par telpu $(\mathbb{R}, \tau_{(a,+\infty)})$, kur topoloģija $\tau_{(a,+\infty}$ sastāv no $\emptyset$, $\mathbb{R}$ un visiem iespējamajiem intervāliem $(a, +\infty)$, kur $a \in \mathbb{R}$).

8.29. uzdevums. Vai Hausdorfa topoloģiskas telpas attēls ar vaļēju attēlojumu ir Hausdorfa telpa?

8.30. uzdevums. Pierādīt, ka normālas topoloģiskas telpas attēls ar nepārtrauktu slēgtu attēlojumu ir normāla telpa.

8.31. uzdevums. Pierādīt, ka, ja topoloģiskas telpas (X,τ) apakškopas A un B ir funkcionāli atdalītas ($A \subset X$, $B \subset X$), tad eksistē tādas vaļējas kopas U, $V \in \tau$, ka $U \supset A$, $V \supset B$ un $U \cap V = \emptyset$.

8.32. uzdevums. Pierādīt, ka, ja topoloģiskas telpas (X,τ) apakškopas A un B ir funkcionāli atdalītas ($A \subset X$, $B \subset X$), tad jebkuriem reāliem skaitļiem a un b ($a < b$) eksistē tāda nepārtraukta skaitliska funkcija $f : X \to [a; b]$, ka visiem $x \in A$ attēls $f(x) = a$, visiem $x \in B$ attēls $f(x) = b$ un visiem $x \in X$ attēls $a \leq f(x) \leq b$.

8.33. uzdevums. Neizmantojot lielo Urisona teorēmu, pierādīt, ka katra metriska telpa ir pilnīgi regulāra topoloģiska telpa.

8.34. uzdevums. Pierādīt, ka katra pilnīgi regulāra topoloģiska telpa ir regulāra telpa.

8.35. uzdevums. Pierādīt, ka katra normāla topoloģiska telpa ir pilnīgi regulāra telpa.

8.36. uzdevums. Pierādīt, ka katras pilnīgi regulāras topoloģiskas telpas apakštelpa ir pilnīgi regulāra telpa.

8.37. uzdevums. Pierādīt, ka T_1 topoloģiska telpa (X, τ) ir pilnīgi regulāra telpa tad un tikai tad, ja jebkuram punktam $x_0 \in X$ un jebkurai apkārtnei $U_0 = U(x_0) \in \tau$ $(U_0 \neq X)$ eksistē tāda nepārtraukta skaitliska funkcija $f : X \to [0; 1]$, ka $f(x_0) = 0$ un $f(X \setminus U_0) = 1$.

8.38. uzdevums. Pierādīt, ka topoloģiska telpa (X, τ) ar otro sanumurējamības aksiomu ir metrizējama telpa tad un tikai tad, ja (X, τ) ir regulāra telpa.

9. nodaļa

Kompaktas telpas

Apskatīsim topoloģisko telpu (X, τ) un patvaļīgu apakškopu $A \subset X$. Ar λ apzīmēsim topoloģiskās telpas (X, τ) visu slēgto apakškopu saimi.

9.1. definīcija. Apakškopu saimi $\mathcal{U} = \{U_\alpha \;/\; \alpha \in I;\; U_\alpha \subset X, \}$ sauc par **telpas** (X, τ) **pārklājumu**, ja

$$\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha = X.$$

9.2. definīcija. Telpas (X, τ) pārklājumu $\mathcal{U} = \{U_\alpha \;/\; \alpha \in I;\; U_\alpha \subset X, \}$ sauc par **vaļēju pārklājumu**, ja katram $\alpha \in I$ apakškopa $U_\alpha \in \tau$.

9.3. definīcija. Telpas (X, τ) pārklājumu $\mathcal{U} = \{U_\alpha \;/\; \alpha \in I;\; U_\alpha \subset X, \}$ sauc par **slēgtu pārklājumu**, ja katram $\alpha \in I$ apakškopa $U_\alpha \in \lambda$.

9.4. definīcija. Par telpas (X, τ) pārklājuma $\mathcal{U}$ **apakšpārklājumu** sauc sistēmas $\mathcal{U}$ apakšsistēmu $\mathcal{U}'$, kas arī ir kopas X pārklājums.

9.5. definīcija. Topoloģisko telpu (X, τ) sauc par **kompaktu telpu**, ja no jebkura telpas (X, τ) vaļēja pārklājuma var izdalīt galīgu apakšpārklājumu.

9.6. definīcija. Topoloģisko telpu (X, τ) sauc par **sanumurējami kompaktu telpu**, ja no jebkura telpas (X, τ) sanumurējama vaļēja pārklājuma var izdalīt galīgu apakšpārklājumu.

Skaidrs, ka katra kompakta telpa ir sanumurējami kompakta telpa, bet ne katra sanumurējami kompakta telpa ir kompakta.

9.7. definīcija. Kopu $A \subset X$ sauc par **kompaktu (sanumurējami kompaktu) kopu**, ja apakštelpa (A, τ_A) ir kompakta (sanumurējami kompakta) telpa, kur τ_A ir inducētā topoloģija.

9.8. definīcija. Topoloģisko telpu (X, τ) sauc par **fināli kompaktu** telpu, ja no katra telpas X vaļēja pārklājuma var izdalīt ne vairāk kā sanumurējamu apakšpārklājumu.

Skaidrs, ka topoloģiska telpa ir fināli kompakta telpa tad un tikai tad, ja tā ir Lindelēva telpa (skat. 2.34. uzdevumu), katra kompakta telpa ir fināli kompakta telpa.

9.9. definīcija. Kopas X apakškopu sistēmu $\{F_\alpha\}$ (sanumurējamu sistēmu $\{F_n, n \in \mathbb{N}\}$) sauc par **centrētu** (**sanumurējami centrētu**), ja jebkurš šīs sistēmas elementu galīgs šķēlums ir netukša kopa.

9.1. uzdevums. Pierādīt, ka topoloģiskās telpas $(\mathbb{R}^2, \tau_{MN})$ jebkura bezgalīga apakškopa nav kompakta. Vai šāds apgalvojums ir spēkā topoloģiskai telpai $(\mathbb{R}^2, \tau_S)$ (skat. 1.5. uzdevumu)?

9.2. uzdevums. Apskatīsim topoloģisko telpu $(\mathbb{R}^2, \tau_{cr})$ (skat. 1.5. uzdevumu). Pierādīt, ka jebkura plaknes apakškopa, kas satur nulles punktu $O(0;0)$, ir kompakta kopa šajā telpā.

9.3. uzdevums. Apskatīsim topoloģisko telpu $(\mathbb{R}^2, \tau_{dab})$ un šīs telpas apakštelpu $(\mathbb{Q}, \tau_{\mathbb{Q}})$ ar plaknes $\mathbb{R}^2$ parastās topoloģijas τ_{dab} inducēto topoloģiju $\tau_{\mathbb{Q}}$ racionālo skaitļu kopā $\mathbb{Q}$. Pierādīt, ka jebkura $\mathbb{Q}$ apakškopa A, kuras iekšiene nav tukša kopa telpā $\mathbb{Q}$, nav kompakta kopa.

9.4. uzdevums. Pieņemsim, ka X ir patvaļīga nesanumurējama kopa un τ_k ir ko-galīga topoloģija kopā X (skat. 1.9. uzdevumu). Pierādīt, ka (X, τ_k) ir kompakta telpa.

9.5. uzdevums. Apskatīsim topoloģisko telpu $(\mathbb{R}^n, \tau_r)$ un patvaļīgu apakškopu $F \subset \mathbb{R}^n$ (skat. 1.5. uzdevumu). Pierādīt kopas F kompaktības kritēriju: kopa F ir kompakta tad un tikai tad, ja F ir ierobežota kopa vai arī, ja F ir neierobežota kopa, kurai eksistē tāds punkts $x \in F$, ka

$$\rho(O, x) = \sup_{y \in F} \{\rho(O, y)\},$$

kur punkts $O \in \mathbb{R}^n$ ir kopas $\mathbb{R}^n$ nulle, bet attālumu starp punktiem O un $y = (y_1, y_2 \ldots, y_n)$, $y \in \mathbb{R}^n$, kur $y_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1, n}$ nosaka sakarība

$$\rho(O, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

9.6. uzdevums. Apskatīsim topoloģisko telpu $(\mathbb{R}, \tau_{irr})$ un patvaļīgu apakškopu $F \subset \mathbb{R}$ (skat. 1.19. uzdevumu). Atrast kopas F kompaktības kritēriju!

9.7. uzdevums. Apskatīsim topoloģisko telpu (X, τ) un patvaļīgu apakškopu A, $A \subset X$. Apakškopu saimi $\mathcal{U} = \{U_\alpha \ / \ \alpha \in I;\ U_\alpha \subset X,\}$ sauc par kopas A vaļēju pārklājumu, ja $\bigcup_{\alpha \in I} U_\alpha \supset A$ un $U_\alpha \in \tau$. Topoloģiskas telpas (X, τ) kopa A ir kompakta (sanumurējami kompakta) kopa tad un tikai tad, ja no kopas A jebkura vaļēja pārklājuma (jebkura sanumurējama vaļēja pārklājuma) var izdalīt galīgu apakšpārklājumu.

9.8. uzdevums. Apskatīsim topoloģisko telpu (X, τ) un patvaļīgas apakškopas A, B, kur $A \subset B \subset X$. Pierādīt, ja kopa A ir kompakta kopa topoloģiskas telpas (X, τ) apakštelpā (B, τ_B), tad kopa A ir kompakta kopa arī topoloģiskā telpā (X, τ)

9.9. uzdevums. Pierādīt, ka topoloģiska telpa ir kompakta (sanumurējami kompakta) tad un tikai tad, ja jebkurai šīs telpas slēgtu kopu centrētai sistēmai (sanumurējami centrētai sistēmai) eksistē vismaz viens kopīgs punkts.

9.10. uzdevums. Pierādīt, ja (X, τ) ir patvaļīga kompakta (sanumurējami kompakta) telpa, tad jebkurai kopas X bezgalīgai apakškopai A telpā (X, τ) eksistē vismaz viens akumulācijas punkts.

9.11. uzdevums. Pierādīt, ka

1. topoloģiska telpa (X, τ) ir sanumurējami kompakta telpa tad un tikai tad, ja jebkurai kopas X bezgalīgai apakškopai A telpā (X, τ) eksistē vismaz viens akumulācijas punkts;

2. T_1 topoloģiska telpa (X,τ) ir sanumurējami kompakta telpa, tad un tikai tad, ja katrai telpas X elementu virknei eksistē vismaz viens akumulācijas punkts, t.i., katrai virknei (x_n), $x_n \in X$ $(n \in \mathbb{N})$ eksistē punkts $x_0 \in X$, ka katrai punkta x_0 apkārtnei pieder bezgalīgi daudz dotās virknes elementu.

9.12. uzdevums. Pierādīt, ka patvaļīga metriska telpa (X,ρ) ir kompakta telpa tad un tikai tad, ja jebkurai kopas X bezgalīgai apakškopai eksistē vismaz viens akumulācijas punkts telpā $(X,\tau)=(X,\rho)$.

9.13. uzdevums. Pierādīt, ka kompaktas (sanumurējami kompaktas) topoloģiskas telpas slēgta kopa ir kompakta (sanumurējami kompakta) kopa. Minēt piemēru, ka kompaktas telpas kompakta apakškopa nav slēgta.

9.14. uzdevums. Pierādīt, ka kompaktas (sanumurējami kompaktas) topoloģiskas telpas patvaļīgas slēgtu kompaktu kopa sistēmas šķēlums ir kompakta (sanumurējami kompakta) kopa.

9.15. uzdevums. Pieņemsim, ka E ir patvaļīga bezgalīga kopa, a un b $(a \neq b)$ ir divi tādi patvaļīgi elementi, ka $a \notin E$ un $b \notin E$, un $X = E \cup \{a,b\}$. Apskatīsim kopas X apakškopu sistēmu

$$\tau = \{\emptyset\} \cup X \cup \{E_\alpha \mid E_\alpha \subset E\} \cup \{G_\alpha \mid G_\alpha \subset X, X \setminus G_\alpha \text{ ir galīga kopa}\}.$$

Pierādīt, ka

1. sistēma τ ir topoloģija kopā X;
2. kopas $A = E \cup \{a\}$ un $B = E \cup \{b\}$ ir kompaktas kopas telpā (X,τ);
3. kopu A un B šķēlums nav kompakta kopa telpā (X,τ).

9.16. uzdevums. Pierādīt, ja (X,τ) ir Hausdorfa topoloģiska telpa,

1. A $(A \subset X)$ ir telpas (X,τ) kompakta kopa un punkts $a \in X \setminus A$, tad eksistē tāda kopas A apkārtne $U(A)$ un punkta a apkārtne $U(a)$, ka $U(A) \cap U(a) = \emptyset$;
2. tad kopa A ir telpas (X,τ) kompakta kopa tad un tikai tad, ja kopa A ir slēgta kopa telpā (X,τ).

9.17. uzdevums. Pierādīt, ja (X,τ) ir Hausdorfa topoloģiska telpa un A ir telpas (X,τ) kompaktas kopas B apakškopa $A \subset B \subset X$, tad kopa A ir telpas (X,τ) **relatīvi kompakta** kopa, t.i., kopas A slēgums $\overline{A}$ ir kompakta kopa telpā (X,τ).

9.18. uzdevums. Pierādīt, ka katra kompakta Hausdorfa topoloģiska telpa ir regulāra telpa.

9.19. uzdevums. Pierādīt, ka katra kompakta Hausdorfa topoloģiska telpa ir normāla telpa.

9.20. uzdevums. Pieņemsim, ka $f : (X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ ir topoloģiskas telpas (X,τ_X) sirjektīvs nepārtraukts attēlojums par telpu (Y,τ_Y). Pierādīt, ja topoloģiska telpa (X,τ_X) ir kompakta (sanumurējami kompakta) telpa,

1. tad (Y,τ_Y) arī ir kompakta (sanumurējami kompakta) topoloģiska telpa;
2. un (Y,τ_Y) ir Hausdorfa topoloģiska telpa, tad attēlojums $f : (X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ ir slēgts attēlojums.

9.21. uzdevums. Pieņemsim, ka $f : (X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ ir topoloģiskas telpas (X,τ_X) bijektīvs nepārtraukts attēlojums par telpu (Y,τ_Y). Pierādīt, ja topoloģiska telpa (X,τ_X) ir kompakta telpa un (Y,τ_Y) ir Hausdorfa topoloģiska telpa, tad attēlojums $f : (X,\tau_X) \to (Y,\tau_Y)$ ir homeomorfisms.

9.22. uzdevums. Pieņemsim, ka $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ ir topoloģiskas telpas (X, τ_X) nepārtraukts attēlojums par topoloģisku telpu (Y, τ_Y). Pierādīt, ja kopa $A \subset X$ ir topoloģiskas telpas (X, τ_X) kompakta kopa (sanumurējami kompakta kopa), tad kopa $f(A)$ ir telpas (Y, τ_Y) kompakta kopa (sanumurējami kompakta kopa).

9.23. uzdevums. Pierādīt, ka katra topoloģiskas telpas kompaktā kopā nepārtraukta reāla funkcija ir ierobežota un sasniedz savu minimālo un maksimālo vērtību.

9.24. uzdevums. Pierādīt, ka topoloģiska telpa ir kompakta tad un tikai tad, ja topoloģiska telpa ir gan sanumurējami kompakta, gan arī fināli kompakta telpa.

9.25. uzdevums. Pierādīt, ka fināli kompaktas topoloģiskas telpas (X, τ) slēgta apakškopa A ir fināli kompakta kopa, t.i., telpas (X, τ) apakštelpa (A, τ_A) ir fināli kompakta telpa.

9.26. uzdevums. Pierādīt, ka topoloģiska telpa, kas apmierina otro sanumurējamības aksiomu, ir fināli kompakta telpa, bet sanumurējami kompakta topoloģiska telpa, kas apmierina otro sanumurējamības aksiomu, ir kompakta telpa.

9.27. uzdevums. Pieņemsim, ka topoloģiskas telpas (X, τ) pārklājums $\mathcal{W}$ ir ievilkts topoloģiskas telpas (X, τ) pārklājumā $\mathcal{U}$, t.i., katrai kopai $V \in \mathcal{W}$ eksistē tāda kopa $U \in \mathcal{U}$, ka $V \subset U$. Pierādīt, ja telpas (X, τ) pārklājumam $\mathcal{W}$ eksistē galīgs (sanumurējams) apakšpārklājums, tad arī pārklājumam $\mathcal{U}$ var atrast galīgu (sanumurējamu) apakšpārklājumu.

9.28. uzdevums. Pierādīt, ka topoloģiska telpa ir fināli kompakta telpa tad un tikai tad, ja katrā šīs telpas vaļējā pārklājumā var ielikt sanumurējamu pārklājumu.

9.29. uzdevums. Pierādīt, ka topoloģiskas telpas (X, τ), kas apmierina otro sanumurējamības aksiomu, katrā šīs telpas vaļējā pārklājumā var ielikt sanumurējamu pārklājumu, tātad telpa (X, τ) ir fināli kompakta telpa.

9.30. uzdevums. Pieņemsim, ka X ir patvaļīga nesanumurējama kopa un τ_c ir ko-sanumurējama topoloģija kopā X (skat. 1.10. uzdevumu). Pierādīt, ka (X, τ_c) nav kompakta telpa, telpā (X, τ_c) neeksistē sanumurējama bāze, (X, τ_c) nav separabla, bet ir fināli kompakta telpa.

9.31. uzdevums. Pierādīt, ka nesanumurējama bezgalīga kopa ar diskrēto topoloģiju nav ne kompakta, ne fināli kompakta telpa.

9.32. uzdevums. Pierādīt, ka topoloģiska telpa $(\mathbb{R}, \tau_b)$ (skat. 2.5. uzdevumu) ir fināli kompakta un separabla telpa, bet nav kompakta un neapmierina otro sanumurējamības aksiomu.

9.33. uzdevums. Pierādīt, ka katra fināli kompakta regulāra topoloģiska telpa ir normāla telpa.

9.34. uzdevums. Pieņemsim, ka $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ ir topoloģiskas telpas (X, τ_X) sirjektīvs nepārtraukts attēlojums par telpu (Y, τ_Y). Pierādīt, ja topoloģiska telpa (X, τ_X) ir fināli kompakta telpa, tad (Y, τ_Y) arī fināli kompakta topoloģiska telpa.

9.35. uzdevums. Pieņemsim, ka $f : (X, \tau_X) \to (Y, \tau_Y)$ ir topoloģiskas telpas (X, τ_X) nepārtraukts attēlojums par topoloģisku telpu (Y, τ_Y). Pierādīt, ja kopa $A \subset X$ ir topoloģiskas telpas (X, τ_X) fināli kompakta kopa, tad kopa $f(A)$ ir telpas (Y, τ_Y) fināli kompakta kopa.

9.36. uzdevums. Topoloģisku telpu (X, τ) sauc par **sekvenciāli kompaktu** telpu, ja katrai tās elementu virknei (x_n), $x_n \in X$ $(n \in \mathbb{N})$, eksistē konverģenta apakšvirkne (x_{n_k}) $(k \in \mathbb{N})$. Pierādīt, ka katra kompakta topoloģiska telpa ir sekvenciāli kompakta telpa.

9.37. uzdevums. Pierādīt, ka katra T_1 sekvenciāli kompakta topoloģiska telpa ir sanumurējami kompakta telpa.

9.38. uzdevums. Pierādīt, ka katra T_1 sanumurējami kompakta topoloģiska telpa, kas apmierina pirmo sanumurējamības aksiomu, ir sekvenciāli kompakta telpa.

9.39. uzdevums. Topoloģisku telpu (X, τ) sauc par **kompaktu telpu Kantora nozīmē**, ja katrai dilstošai netukšu slēgtu kopu virknei (F_n), $F_n \subset X$:

$$F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_n \supset \ldots,$$

eksistē vismaz viens kopīgs punkts, t.i., $\bigcap_n F_n \neq \emptyset$. Pierādīt, ka katra sekvencionāli kompakta topoloģiska telpa ir kompakta telpa Kantora nozīmē, bet katra kompakta topoloģiska telpa Kantora nozīmē ir sanumurējami kompakta topoloģiska telpa.

9.40. uzdevums. Pierādīt, ka T_1 topoloģiskai telpai (X, τ), kas apmierina otro sanumurējamības aksiomu, šādi apgalvojumi ir ekvivalenti:

1. (X, τ) ir kompakta topoloģiska telpa;
2. (X, τ) ir sanumurējami kompakta topoloģiska telpa;
3. (X, τ) ir sekvenciāli kompakta topoloģiska telpa;
4. (X, τ) ir kompakta topoloģiska telpa Kantora nozīmē.

10. nodaļa

Topoloģisko telpu reizinājums

10.1. Topoloģisko telpu galīgs reizinājums

Apskatīsim patvaļīgu topoloģisku telpu $X_1,\ X_2,\ \ldots, X_n$ galīgu sistēmu, kur indeksam $i = \overline{1,n}$ atbilstošā topoloģiskā telpa $X_i = (X_i, \tau_i)$. Pieņemsim, ka kopa $X \ = \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$ ir kopu X_i $(i = \overline{1,n})$ Dekarta reizinājums.

10.1. definīcija. Par topoloģisko telpu $X_1, X_2, \ldots, X_n$ **reizinājumu** sauc kopu $X \ = \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$ ar **reizinājuma topoloģiju** $\tau = \prod\limits_{i=1}^{n} \tau_i$, kuras bāzi veido visi iespējamie telpās X_i, $i = \overline{1,n}$, vaļēju kopu reizinājumi, t.i., bāzi veido kopas $\mathcal{G} = \prod\limits_{i=1}^{n} \mathcal{G}_i$, kur kopa $\mathcal{G}_i \in \tau_i$, $i = \overline{1,n}$.

10.1. piezīme. Ja $U_1,\ U_2,\ \ldots, U_n$ ir atbilstošo telpu $X_1,\ X_2,\ \ldots, X_n$ vaļējas kopas, tad šo kopu reizinājums $U = \prod\limits_{i=1}^{n} U_i$ ir vaļēja kopa topoloģiskā telpā (X, τ), kur $X = \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$ un $\tau = \prod\limits_{i=1}^{n} \tau_i$. Tomēr ne katra topoloģiskas telpas $X = \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$ vaļēja kopa U ir izsakāma ar reizinājumu $U = \prod\limits_{i=1}^{n} U_i$, kur U_i ir kāda telpā X_i vaļēja kopa. Piemēram, vaļējs riņķis $K \subset \mathbb{R}^2$ ir vaļēja kopa topoloģiska telpā $(\mathbb{R}^2, \tau_{dab})$, kopu K var izteikt kā vaļēju taisnstūru apvienojumu, tomēr katrā no abām telpām $(\mathbb{R}, \tau_{dab})$ nav tādu vaļēju kopu U un V, ka $K = U \times V$.

10.1. teorēma. Sistēma $\mathcal{G} \ = \prod\limits_{i=1}^{n} \mathcal{G}_i$, kur katram indeksam $i = \overline{1,n}$ kopa $\mathcal{G}_i \subset X_i$ un $\mathcal{G}_i \in \tau_i$, ir kopas $X \ = \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$ kādas topoloģijas τ bāze (skat. 10.1. uzdevumu).

10.2. definīcija. Topoloģisko telpu X un Y reizinājuma $X \times Y$ dabisko attēlojumu, kurš definēts ar formulu

$$P_1 = X \times Y \longrightarrow X,\ P_1((x,y)) = x,$$

un dabisko attēlojumu, kurš definēts ar formulu

$$P_2 = X \times Y \longrightarrow Y,\ P_2((x,y)) = y,$$

sauc par reizinājuma $X \times Y$ **projektoriem** (**projekcijām**) jeb **projicēšanas attēlojumiem** attiecīgi par reizinātāju X un reizinātāju Y.

Kopu

$$P_1^{-1}(x) = \{x \times Y, x \in X\}$$

sauc par **slāni virs** punkta x, bet kopu

$$P_2^{-1}(y) = \{X \times y, y \in Y\}$$

sauc par **slāni virs** punkta y reizinājumā $X \times Y$.

10.1. uzdevums. Apskatīsim divas topoloģiskas telpas (X_1, τ_1) un (X_2, τ_2). Pārbaudīt, ka kopu saime

$$G = \{U \times V \ / \ U \in \tau_1, V \in \tau_2\}$$

ir kopā $X_1 \times X_2$ reizinājuma topologijas bāze.

10.2. uzdevums. Apskatīsim gan kopā X_1 divas topoloģijas τ_1^* un τ_1 ($\tau_1^* \leq \tau_1$), gan kopā X_2 divas topoloģijas τ_2^* un τ_2 ($\tau_2^* \leq \tau_2$). Salīdzināt telpu (X_1, τ_1) un (X_2, τ_2) reizinājuma topoloģiju $\tau_1 \times \tau_2$ ar telpu (X_1, τ_1^*) un (X_2, τ_2^*) reizinājuma topoloģiju $\tau_1^* \times \tau_2^*$.

10.3. uzdevums. Pierādīt, ka topoloģiskas telpas $(\tau_{dab}, \mathbb{R}^2)$ parastā topoloģija τ_{dab} reālo skaitļu plaknē $\mathbb{R}^2$ sakrīt ar reizinājuma topoloģiju topoloģiskās telpas $(\tau_{dab}, \mathbb{R})$ reizinājumam ar topoloģisko telpu $(\tau_{dab}, \mathbb{R})$.

10.4. uzdevums. Pierādīt, ja B_i, $i = \overline{1,2}$, ir attiecīgi topoloģiskās telpas X_i, $i = \overline{1,2}$, bāze, tad kopu saime

$$\{U \times V \ / \ U \in B_1, V \in B_2\}$$

ir kādas reizinājuma topoloģijas kopā $X_1 \times X_2$ bāze.

10.5. uzdevums. Pierādīt, ka parastā topoloģija τ_{dab} telpā $\mathbb{R}^n$ sakrīt gan ar metrisko topoloģiju τ_ρ kopā $\mathbb{R}^n$, kur ρ ir standarta metrika kopā $\mathbb{R}^n$ (skat. 1.5. uzdevumu), gan ar reizinājuma topoloģiju kopā, ko iegūst savstarpēji sareizinot n (galīgā skaitā) topoloģiskas telpas $(\mathbb{R}, \tau_{dab})$.

10.6. uzdevums. Katrā no abām topoloģijām $\tau_1 = \tau_d \times \tau_{dab}$ un $\tau_2 = \tau_S \times \tau_{irr}$ reālo skaitļu plaknē $\mathbb{R}^2$ atrast slēgumu, iekšieni un robežu

1. vienelementa kopai $\{a\}$, kur $a \in \mathbb{R}^2$;
2. vaļējai lodei $U(a, r)$, kuras centrs $a \in \mathbb{R}^2$ un rādiuss $r > 0$;
3. slēgtas lodes papildinājumam $CB(a, r)$, kur centrs $a \in \mathbb{R}^2$ un rādiuss $r > 0$;
4. kopai $(0; 1) \times \{0\}$.

10.7. uzdevums. Pierādīt, ka topoloģisku telpu X un Y reizinājuma projektori (skat. 10.2. definīciju) ir nepārtraukti vaļēji attēlojumi, bet nav slēgti attēlojumi (skat. 6.54. un 6.55. uzdevumus).

10.8. uzdevums. Pierādīt, ka topoloģisku telpu X un Y reizinājuma $X \times Y$ topoloģija ir visvājākā topoloģija no visām tām telpas $X \times Y$ topoloģijām, kurām projektori P_1 un P_2 ir nepārtraukti attēlojumi.

10.9. uzdevums. Pieņemsim, ka X un Y ir topoloģiskas telpas, bet x_0 ir fiksēts telpas X punkts. Pierādīt, ka attēlojuma P_2 sašaurinājums $P_2|_{x_0 \times Y} : x_0 \times Y \longrightarrow Y$ ir homeomorfs attēlojums par telpu Y.

10.10. uzdevums. Apskatīsim topoloģiskas telpas (X, τ_X) un (Y, τ_Y), kā arī patvaļīgas apakškopas $A \subset X$ un $B \subset Y$. Pierādīt, ka topoloģisko telpu reizinājumā $X \times Y$ ir spēkā vienādības

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B},$$

$$Int(A \times B) = IntA \times IntB,$$

$$Fr(A \times B) = (FrA \times \overline{B}) \cup (\overline{A} \times FrB).$$

10.11. uzdevums. Pierādīt, ka topoloģiskā telpa (X, τ_X) ir Hausdorfa telpa tad un tikai tad, ja kopā $X \times X$ ar reizinājuma topoloģiju diagonāle $\Delta = \{(x; y) \in X \times X \ / \ x = y\}$ ir slēgta kopa.

10.12. uzdevums. Izmantojot 10.11. uzdevumu, pierādīt 8.27. 1) uzdevumu, ja f un g ir nepārtraukti attēlojumi, kas patvaļīgu topoloģisko telpu (X, τ_X) attēlo Hausdorfa topoloģiskā telpā (Y, τ_Y), un kopa $D = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ ir visur blīva telpā (X, τ_X), tad jebkuriem punktiem $x \in X$ ir spēkā vienādība $f(x) = g(x)$.

10.13. uzdevums. Izmantojot 10.11. uzdevumu, pierādīt, ja f un g ir nepārtraukti attēlojumi, kas topoloģisko telpu (X, τ_X) attēlo Hausdorfa topoloģiskā telpā (Y, τ_Y), tad kopa

$$F = \{x \in X \ / \ f(x) = g(x)\}$$

ir slēgta kopa telpā (X, τ_X). Vai šāds apgalvojums ir spēkā patvaļīgai topoloģiskai telpai (Y, τ_Y) (skat. arī 8.27. 2) uzdevumu)?

10.14. uzdevums. Pieņemsim, ka X un Y ir topoloģiskas telpas, bet $X \times Y$ ir šo topoloģisko telpu reizinājums. Pierādīt, ja abas topoloģiskās telpas X un Y

1. apmierina otro sanumurējamības aksiomu, tad arī topoloģiskā telpa $X \times Y$ apmierina otro sanumurējamības aksiomu;
2. ir separablas telpas, tad arī topoloģiskā telpa $X \times Y$ ir separabla telpa;
3. ir sakarīgas telpas, tad arī topoloģiskā telpa $X \times Y$ ir sakarīga telpa;
4. ir lineāri sakarīgas telpas, tad arī topoloģiskā telpa $X \times Y$ ir lineāri sakarīga telpa;
5. ir kompaktas telpas, tad arī topoloģiskā telpa $X \times Y$ ir kompakta telpa.

10.15. uzdevums. Pierādīt, ka Hausdorfa topoloģisko telpu galīgs reizinājums ir Hausdorfa telpa, un regulāru telpu galīgs reizinājums ir regulāra telpa.

10.16. uzdevums. Apskatīsim Zorgenfreija topoloģisko telpu $(\mathbb{R}, \tau_b)$ no 2.5. uzdevuma. Pierādīt, ka telpa

1. $(\mathbb{R}, \tau_b)$ ir fināli kompakta telpa un normāla telpa;
2. $(\mathbb{R}, \tau_b) \times (\mathbb{R}, \tau_b)$ nav normāla telpa un nav fināli kompakta telpa.

10.17. uzdevums. Pieņemsim, ka X un Y ir topoloģiskas telpas un $X \times Y$ ir to reizinājums. Pierādīt, ja Y ir Hausdorfa topoloģisko telpa, tad attēlojuma $f : X \to Y$ grafiks

$$\Gamma_f = \{(x, y) = (x, f(x)) \ / \ x \in X\}$$

ir slēgta kopa telpā $X \times Y$.

10.2. Topoloģisko telpu patvaļīgs reizinājums

Apskatīsim topoloģisku telpu $X_\alpha = (X_\alpha, \tau_\alpha)$, kur $\alpha \in I$, patvaļīgu sistēmu. Šī sistēma $\{X_\alpha = (X_\alpha, \tau_\alpha)\}$ var būt gan galīga, ja indeksu kopa I ir galīga, gan bezgalīga, ja indeksu kopa I ir bezgalīga, t.i., sanumurējama vai nesanumurējama. Pieņemsim, ka $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ ir telpu X_α, $\alpha \in I$, Dekarta reizinājums, t.i.,

$$X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha = \{f : I \longrightarrow \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha \quad / \quad \forall \alpha \in I : f(\alpha) \in X_\alpha\}.$$

10.3. definīcija. Par topoloģisku telpu X_α ($\alpha \in I$) **reizinājumu** sauc kopu $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ ar **reizinājuma topoloģiju** τ, kuras bāzi veido visi iespējamie vaļējo kopu $\mathcal{G}_\alpha$ ($\alpha \in I$) reizinājumi $\mathcal{G} = \prod_{\alpha \in I} \mathcal{G}_\alpha$, kur tikai galīgam skaitam indeksu α kopa $\mathcal{G}_\alpha \in \tau_\alpha$ un $\mathcal{G}_\alpha \subset X_\alpha$ (galīgam skaitam indeksu η vaļējās kopas var brīvi izvēlēties), bet pārējiem indeksiem α vaļējām kopām $\mathcal{G}_\alpha$ jāsakrīt ar kopu X_α, t.i, $\mathcal{G}_\alpha = X_\alpha$. Topoloģiju τ sauc par topoloģiju τ_α, $\alpha \in I$, **Tihonova reizinājumu** vai **Tihonova topoloģiju** un apzīmē

$$\tau = \prod_{\alpha \in I} \tau_\alpha,$$

bet topoloģisko telpu (X, τ) sauc par topoloģisko telpu sistēmas $\{(X_\alpha, \tau_\alpha), \alpha \in I\}$ Tihonova reizinājumu.

10.4. definīcija. Topoloģisko telpu $X_\alpha = (X_\alpha, \tau_\alpha)$, kur $\alpha \in I$, reizinājuma

$$(X, \tau) = (\prod_{\alpha \in I} X_\alpha, \prod_{\alpha \in I} \tau_\alpha)$$

dabisko attēlojumu

$$P_{\alpha_0} : \prod_{\alpha \in I} X_\alpha \longrightarrow X_{\alpha_0}, P_{\alpha_0}(x) = x_{\alpha_0},$$

kurš jebkuram punktam $x \in \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ definēts ar formulu sauc par **projektoru** (**projekciju**) jeb **projicēšanas attēlojumu** par reizinātāju X_{α_0}, (šeit indekss $\alpha_0 \in I$).

10.2. teorēma. (Tihonova) Kompaktu topoloģisku telpu reizinājums ir kompakta topoloģiska telpa.

10.5. definīcija. Par topoloģisko telpu X_α ($\alpha \in I$) reizinājuma $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ **kastes topoloģiju** sauc topoloģiju τ, kuras bāzi veido visu iespējamo kopu $\prod_{\alpha \in I} \{\mathcal{G}_\alpha \ / \ \mathcal{G}_\alpha \in \tau_\alpha\}$ sistēma, bet topoloģisko telpu (X, τ) sauc par topoloģisko telpu sistēmas $\{(X_\alpha, \tau_\alpha), \alpha \in I\}$ kastes reizinājumu.

Skaidrs, ja indeksu kopa I ir galīga, tad kastes topoloģija un telpas kastes reizinājums apmierina 10.1. definīciju un 10.3. definīciju.

10.18. uzdevums. Pierādīt, ka

1. Tihonova topoloģija τ ir vājākā no kopas $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ topoloģijām, kurām visi projektori $P_\alpha = X \longrightarrow X_\alpha$, kur $\alpha \in I$, ir nepārtraukti attēlojumi;

2. katram indeksam $\alpha \in I$ projektors $P_\alpha = X \longrightarrow X_\alpha$ ir telpas X vaļējs attēlojums telpā X_α.

10.19. uzdevums. Pierādīt, ka antidiskrētu topoloģisku telpu reizinājums ir antidiskrēta telpa.

10.20. uzdevums. Pierādīt, ja katra telpa X_n, kur $n \in \mathbb{N}$, apmierina otro sanumurējamības aksiomu (pirmo sanumurējamības aksiomu), tad šo telpu reizinājums $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ arī apmierina otro sanumurējamības aksiomu (pirmo sanumurējamības aksiomu). Vai ir spēkā apgrieztais apgalvojums?

10.21. uzdevums. Pierādīt, ka 10.20. uzdevuma apgalvojums nav spēkā, ja apskata patvaļīgu telpu X_α ($\alpha \in I$ un indeksu kopa I ir nesanumurējama) reizinājumu $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$. Proti, Tihonova reizinājums $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ apmierina otro sanumurējamības aksiomu tad un tikai tad, ja katram indeksam $\alpha \in I$ telpa X_α apmierina otro sanumurējamības aksiomu un visiem indeksiem $\alpha \in I$, izņemot sanumurējamu indeksu apakškopu I', $I' \subset I$, telpa X_α ir antidiskrēta.

10.22. uzdevums. Pierādīt, ja visas topoloģiskās telpas X_n, kur $n \in \mathbb{N}$, ir separablas, tad reizinājums $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ arī ir separabla telpa. Vai ir spēkā apgrieztais apgalvojums?

10.23. uzdevums. Pierādīt, ja katram indeksam $\alpha \in I$ kopa F_α, $F_\alpha \subset X_\alpha$ ir slēgta topoloģiskā telpā X_α, tad kopu reizinājums $F = \prod_{\alpha \in I} F_\alpha$ ir slēgta kopa topoloģisko telpu reizinājumā $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$.

10.24. uzdevums. Pierādīt, ja katram indeksam $\alpha \in I$ kopa E_α, $E_\alpha \subset X_\alpha$ ir blīva topoloģiskā telpā X_α, tad kopu reizinājums $E = \prod_{\alpha \in I} E_\alpha$ ir blīva kopa topoloģisko telpu reizinājumā $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$.

10.25. uzdevums. Pierādīt, ja katram indeksam $\alpha \in I$ kopa E_α ir topoloģiskas telpas X_α apakškopa, tad topoloģisko telpu reizinajumā $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ ir spēkā sakarības

$$\overline{\prod_{\alpha \in I} E_\alpha} = \prod_{\alpha \in I} \overline{E_\alpha}$$

un

$$int(\prod_{\alpha \in I} E_\alpha) \subset \prod_{\alpha \in I} int(E_\alpha).$$

Pierādīt, ka vienādība

$$int(\prod_{\alpha \in I} E_\alpha) = \prod_{\alpha \in I} int(E_\alpha)$$

ir spēka tad un tikai tad, ja katram $\alpha \in I$, izņemot tikai galīgu skaitu indeksu α, kopa $E_\alpha = X_\alpha$.

10.26. uzdevums. Pierādīt, ja katram indeksam $\alpha \in I$ topoloģiska telpa X_α ir homeomorfa, tad reizinājums $X = \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ arī ir homeomorfa topoloģiska telpa.

10.27. uzdevums. Pieņemsim, ka X, Y un Z ir topoloģiskas telpas. Pierādīt, ja attēlojums $f : X \times Y \to Z$ ir nepārtraukts, tad gan katram $y_0 \in Y$ attēlojums $f_{y_0} = f(x, y_0) : X \to Z$ ir nepārtraukts, gan katram $x_0 \in X$ attēlojums $f_{x_0} = f(x_0, y) : Y \to Z$ ir nepārtraukts.

10.28. uzdevums. Pierādīt, ka 10.27. uzdevuma apgrieztais apgalvojums nav spēkā: ja katram punktam $x \in X$ un katram punktam $y \in Y$ attiecīgi attēlojumi f_x un f_y ir nepārtraukti, tad nevar apgalvot, ka attēlojums $f : X \times Y \to Z$ ir nepārtraukts.

10.29. uzdevums. Pierādīt, ka 10.15. uzdevuma apgalvojums ir spēkā, ja runa iet par patvaļīgu reizinājumu, t.i., topoloģisko telpu reizinājumu ar Tihonova topoloģiju.

10.30. uzdevums. Pierādīt, ja reizinājums $X = \prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ ir T_0, T_1 vai T_2 telpa, tad to pašu atdalāmības aksiomu apmierina katrs no reizinātājiem X_α, kur indeksi $\alpha \in I$; ja reizinājums X ir normāla telpa, tad katrs no reizinātājiem X_α, kur $\alpha \in I$, arī ir normāla telpa.

10.31. uzdevums. Pieņemsim, ka $\{X_\alpha = (X_\alpha, \tau_\alpha)\}$ ir topoloģisku telpu sistēma, kur katram indeksam $\alpha \in I$ τ_α ir ko-galīgā topoloģija, bet $X = (\prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha, \tau)$ ir telpu X_α, kur $\alpha \in I$, reizinājums ar reizinājuma topoloģiju τ. Pierādīt, ja indeksu kopa I ir

1. galīga kopa, tad τ arī ir ko-galīgā topoloģija,
2. bezgalīga kopa un katram indeksam $\alpha \in I$ kopa X_α satur vairāk nekā vienu elementu, tad τ nav ko-galīgā topoloģija.

10.32. uzdevums. Pieņemsim, ka $X_\alpha = (X_\alpha, \tau_\alpha)$ katram indeksam $\alpha \in I$ ir separabla telpa, bet $X = \prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ ir topoloģisku telpu patvaļīgs reizinājums. Pierādīt, ka telpas X visu savstarpēji nešķeļošu vaļēju kopu sistēma ir ne vairāk kā sanumurējama.

10.33. uzdevums. Pierādīt, ka kastes topoloģija kopā $X = \prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ ir stiprāka par Tihonova topoloģiju.

10.34. uzdevums. Pierādīt, ka katram indeksam $\alpha \in I$ projektors $p_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$ ir nepārtraukts un vaļējs attēlojums, ja $X = \prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ ir telpu X_α kastes reizinājums. Noskaidrot, vai kastes topoloģija ir stiprākā no kopas $X = \prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ topoloģijām, kurām visi projektori p_α, $\alpha \in I$, ir vaļēji attēlojumi.

10.35. uzdevums. Pieņemsim, ka indeksu kopa I ir bezgalīga, $\{X_\alpha, \alpha \in I\}$ ir topoloģisku telpu sistēma, pie tam katra topoloģiska telpa X_α ($\alpha \in I$) nav antidiskrēta.

1. Pierādīt, ka ir ekvivalenti šādi apgalvojumi:
   (a) katram indeksam $\alpha \in I$ telpa X_α ir diskrēta telpa;
   (b) telpa $X = \prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ ar kastes topoloģiju ir diskrēta topoloģiska telpa;
   (c) telpa $X = \prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ ar kastes topoloģiju neapmierina pirmo sanumurējamības aksiomu;
2. Pierādīt,ja katram indeksam $\alpha \in I$ telpā X_α eksistē vismaz divas vaļējas kopas, kuru šķēlums ir tukša kopa, tad telpa $X = \prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ ar kastes topoloģiju nav separabla.
3. Pierādīt, ka telpa $X = \prod\limits_{\alpha \in I} X_\alpha$ ar kastes topoloģiju apmierina otro sanumurējamības aksiomu.

10.36. uzdevums. Pieņemsim, ka indeksu kopa $I = \mathbb{N}$, kopa $X_n = \mathbb{R}$, katram indeksam $n \in \mathbb{N}$ ir reālo skaitļu kopa ar parasto topoloģiju un kopa $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{R} = \mathbb{R}^{\aleph_0}$. Pierādīt, ka

1. telpa X ar Tihonova topoloģiju apmierina otro sanumurējamības aksiomu un tāpēc ir separabla telpa;
2. telpa X ar kastes topoloģiju neapmierina ne pirmo, ne otro sanumurējamības aksiomu un nav separabla telpa.

LITERATŪRA

[1] A. Šostaks, M. Zandere. Topoloģijas elementi. 1. d. - R.: LVU, 1977; 2.d. - R.: LVU, 1978.

[2] E. Ģingulis. Ievads topoloģijā. Liepāja, 1998.

[3] T. Adamson. A General Topology Workbook, Birkhauser, 1996.

[4] M.D. Crossley. Essential Topology, Springer, 2005.

[5] J.R.Munkres. Topology. Prentice Hall, 2000.

[6] S. Willard. General Topology, Dover Publications, 2004.

[7] Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М., "Наука", 1974.

[8] Александрян Р.А., Мирзаханян Э.А. Общая топология. Основные конструкции. М., "Высшая школа", 1979.

[9] Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М., "Наука", 1974.

[10] Болтянский В.Г., Ефремомич В.А. Наглядная топология, Наука, 1982.

[11] Болтянский В.Г., Ефремович В.А. Очерк основных идей топологии. Математическое просвещение. Нов.серия. 1957-58-59-61. Вып. 2, 3, 4, 6.

[12] Борисович Ю.Т., Близняков Н.М., Израилевич Я.А., Фоменко Т.Н. Введение в топологию, Высшая школа, 1980.

[13] Бурбаки Н. Общая топология, основные структуры. М., "Наука", 1968.

[14] Келли Дж.Л. Общая топология. М., "Наука", 1974.

[15] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1976.

[16] Кононов С.Г. и др. Топология. - Минск: Вышейшая школа, 1990.

[17] Косневски Ч. Начальный курс алгебраической топологии. - М.: Мир, 1983.

[18] Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика. - М., 1967.

[19] Куратовский К. Топология. Т.1. - М.: Мир, 1966; т. 2. - 1969.

[20] Лосик М.В. Сборник задач по топологии. Саратовский государственный университет, 2002.

[21] Райков Д.А. Многомерный математи-ческий анализ. - М.: Высшая школа, 1989.

[22] Рохлин В.А., Фукс Д.Б. Начальный курс топологии. Геометрические главы. - М.: Наука, 1977.

[23] Синюков Н.С., Матвеенко Т.Н. Тополо-гия. - Киев: Вища школа, 1984.

[24] Стинрод Н., Чинн У. Первые понятия топологии. - М.: Мир, 1967.

[25] Федорчук В.В., Филипов В.В. Общая топология. Основные конструкции. М., Издательство МГУ, 1988.

[26] Энгелькинг Р. Общая топология, М.: Мир, 1986.