"Informatīvā un tehniskā aprīkojuma modernizācija matemātikas un tās pielietojumu studijām Daugavpils Universitātē"

Nr. 2006/0245/VPD1/ESF/PIAA/06/APK/3.2.3.2./0053/0065

DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE

Matemātikas katedra

Svetlana Atslēga, Felikss Sadirbajevs

Diferenciālvienādojumi
Fāzes portreti

2007

Priekšvārds

Piedāvātais mācību līdzeklis dod priekšstatu par fāzes plaknes metodi. Šī metode ir viena no parasto diferenciālvienādojumu pētīšanas kvalitatīvajām metodēm. Tā ir pielietojama divu dimensiju autonomu sistēmu pētīšanai un pamatojas uz sistēmu kritisko (nekustīgo) punktu rakstura analīzes. Lineārām sistēmām šī analīze ir algebriska. Tāpēc sākumā tiek sniegta nepieciešamā informācija par matricām, matricu īpašvērtībām, matricu līdzību. Apskatīti jautājumi par Eiklīda telpas $\mathbb{R}^2$ lineāriem pārveidojumiem. Detalizēti apskatīts jautājums par lineāru sistēmu reducēšanu uz kanoniskām formām. Samēra liels vingrinājumu skaits palīdz apgūt materiālu. Apskatītas nelineāras sistēmas, kurām var būt vairāki kritiskie (nekustīgie) punkti. Tiek aprakstīta nelineāro sistēmu lineārizācija kritiskā (nekustīgā) punkta apkārtnē. Skarts jautājums par kvadrātiskiem un kubiskiem oscilatoriem. Dota attiecīgo sistēmu atrisinājumu uzvedības mehāniskā interpretācija un, uz tā pamatā, konstruēti fāzes portreti.

Mācību līdzeklis ir paredzēts matemātikas un datorikas specialitātes studentiem. To var pozicionēt kā pirmo soli skaistajā matemātisko tēlu pasaulē, kas slēpjas aiz formālam sakarībām, kas tiek aprakstītas ar parastiem diferenciālvienādojumiem.

Mācību līdzeklis ir uzrakstīts Daugavpils Universitātes Matemātikas katedrā. Pateicamies kolēģiem, kas iedvesmoja un palīdzēja to īstenot, it īpaši Armandam Gricānam, kas pārskatīja manuskriptu un ievērojami uzlaboja tā noformējumu.

Mācību līdzeklī tika izmantota ESF projekta

"Informatīvā un tehniskā aprīkojuma modernizācija matemātikas un tās pielietojumu studijām Daugavpils Universitātē"
(Nr. 2006/0245/VPD1/ESF/PIAA/06/APK/3.2.3.2./0053/0065)

ietvaros iegādātā literatūra [3], [4], [6] un [7].

Ievads

Pirmās kārtas parasto diferenciālvienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2), \\ x_2' = f_2(x_1, x_2), \end{cases} \tag{0.1}$$

atrisinājumu uzvedības analīzē liela loma ir *fāzes plakņu* apskatei, t.i., līkņu, kas atbilst atrisinājumu trajektorijām, uzvedībai plaknē (x_1, x_2).

0.1. definīcija. Par sistēmas (0.1) stacionāro punktu sauc tādu punktu (z_1, z_2), ka $f_1(z_1, z_2) = 0$, $f_2(z_1, z_2) = 0$.

Fāzes plakņu analīze sākas ar lineāru homogēnu vienādojumu sistēmas

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{cases} \tag{0.2}$$

stacionāro punktu klasifikāciju. Sistēmu (0.2) var pārrakstīt matricu formā

$$X' = AX, \tag{0.3}$$

kur

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Ja izpildās nosacījums $\det A \neq 0$, tad vienīgais sistēmas (0.2) stacionārais punkts ir $(0, 0)$.

Šī jautājuma izklāstā pamatojamies uz grāmatas [2, 2. nodaļa] materiālu.

1. Lineāro autonomo diferenciālo sistēmu stacionāro punktu klasifikācija

Apskatīsim sistēmu (0.2), pieņemot, ka $\det A \neq 0$. Tad šīs sistēmas vienīgais stacionārs punkts ir punkts $(0, 0)$.

1.1. Nepieciešamas zināšanas par matricu teoriju

Apskatīsim kvadrātisku matricu A ar kārtu n.

Par *matricas A inverso matricu* sauc tādu matricu A^{-1}, ka $A\,A^{-1} = E$, kur

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ir *vienības matrica.*

Ja matricai A eksistē inversā matrica, tad matricu A sauc par *nesingulāru.* Ja $\det A \neq 0$, tad matrica A ir nesingulāra (un otrādi).

1.1. vingrinājums. Atrast matricu M^{-1}, ja $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Katra nesingulāra matrica A uzdod telpas $\mathbb{R}^n$ *lineāru pārveidojumu.*

Par *matricas A rakstursaknēm* sauc vienādojuma

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & \ldots & a_{n-1,n-1} - \lambda & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,n-1} & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

saknes.

Šī vienādojuma kreisā puse ir polinoms no λ, kuru sauc par *matricas A raksturīgo polinomu.*

Matricas A un J sauc par *līdzīgām*, ja eksistē tāda nesingulāra matrica M, ka $J = M^{-1}AM$. Līdzības īpašība ir savstarpēja (ja J ir līdzīga A, tad A ir līdzīga J). Līdzības īpašība sadala kvadrātisko matricu kopu klasēs.

Līdzīgām matricām ir vienādi raksturīgie polinomi un tātad tām ir vienas un tas pašas rakstursaknes [8, §33].

Kā zināms, kvadrātiska matrica uzdod lineāro pārveidojumu telpā $\mathbb{R}^n$. Visas līdzīgas matricas uzdod vienu un to pašu pārveidojumu, taču dažādās bāzēs.

Pieņemsim, ka kādā bāzē nedeģenerēta matrica A uzdod telpas lineāru pārveidojumu. Ja eksistē tāds nenulles vektors $\bar{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, ka $A\bar{u} =$

$\lambda\bar{u}$, tad saka, ka $\bar{u}$ ir *īpašvektors*, bet atbilstošo reālo skaitli λ sauc par *lineāra pārveidojuma īpašvērtību.* Ekvivalenti, īpašvektori un īpašvērtības tiek definētas ar atbilstību

$$(A - \lambda E)\bar{u} = 0. \tag{1.1}$$

Atbilstība (1.1) ir lineāra homogēna vienādojumu sistēma attiecībā pret $u_1, \ldots,$ u_n. Šai sistēmai eksistē netriviāli (nav vienādi ar nulli) atrisinājumi tad un tikai tad, ja $\det(A - \lambda E) = 0$. Vienādības kreisā puse ir matricas A raksturīgais polinoms. Tādēļ matricas A reālas rakstursaknes sakrīt ar lineārā pārveidojuma, kas uzdots ar matricas A palīdzību, īpašvērtībām.

Ja tiek dotas vienāda izmēra kvadrātiskās matricas A un J un ir jānoskaidro, vai tās ir līdzīgas, tad ir jāatrod tāda nesingulāra matrica M, ka

$$J = M^{-1}AM \quad \text{vai} \quad MJ = AM. \tag{1.2}$$

1.1. piemērs. Noskaidrot, vai matricas $J = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ un $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ir līdzīgas.

Atrisinājums. Meklēsim tādu nesingulāru matricu $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$, ka $MJ = AM$. Sareizinot M ar J un A ar M, iegūsim sistēmu

$$\begin{cases} 3m_{11} & = -2m_{11}, \\ m_{11} + 3m_{12} & = -2m_{12}, \\ 3m_{21} & = -2m_{21}, \\ m_{21} + 3m_{22} & = -2m_{22}. \end{cases}$$

Šīs sistēmas vienīgais atrisinājums ir $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ un tātad matricas J un A nav līdzīgas.

Cits atrisinājums. Atradīsim matricu J un A īpašvērtības un pārliecināsimies, ka tās nesakrīt. Tiešām, vienādojumiem $(3 - \lambda)^2 = 0$ un $(-2 - \lambda)^2 = 0$ ir dažādas saknes.

1.2. piemērs. Noskaidrot, vai matricas $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ un $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ ir līdzīgas.

Atrisinājums. Meklēsim tādu nesingulāru matricu $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$, ka $AM = MB$. Sareizinot divas matricas, iegūsim:

$$AM = \begin{pmatrix} m_{11} + 2m_{21} & m_{12} + 2m_{22} \\ 2m_{21} & 2m_{22} \end{pmatrix}, \quad MB = \begin{pmatrix} m_{11} & 2m_{12} \\ m_{21} & 2m_{22} \end{pmatrix}.$$

Pielīdzinot vienādus elementus, iegūstam sistēmu

$$\begin{cases} m_{11} + 2m_{21} = m_{11}, \\ m_{12} + 2m_{22} = 2m_{12}, \\ 2m_{21} = m_{21}, \\ 2m_{22} = 2m_{22}. \end{cases}$$

Pēdēja rinda ir identitāte. No pārējām trim iegūstam, ka $m_{21} = 0$, $2m_{22} = m_{12}$, m_{11} - jebkurš skaitlis, kas nav vienāds ar nulli (ja $m_{11} = 0$, tad matrica M ir deģenerēta). Piemēram, $m_{11} = 1$, $m_{22} = 1$ un $m_{12} = 2$. Viegli pārbaudīt, ka matricai $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ izpildās vienādība $AM = MB$ un tāpēc matricas A un B ir līdzīgas.

1.2. Mainīgo lineārs pārveidojums

Ja $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$ un

$$X = MY,$$

kur M ir nesingulāra 2×2 matrica, tad saka, ka ir dots plaknes lineārs pārveidojums. Lai iegūtu vienkāršāku sistēmu, izmanto mainīgo pārveidojumu diferenciālvienādojumos.

1.3. piemērs. Pierakstīt sistēmu

$$\begin{cases} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_1 \end{cases} \tag{1.3}$$

ar mainīgo (y_1, y_2) palīdzību, izmantojot plaknes lineāro pārveidojumu ar matricu $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Atrisinājums. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ir sistēmas (1.3) koeficientu matrica. Iegūsim:

$$AX = A(MY) = AMY \Rightarrow MY' = AMY \Rightarrow Y' = M^{-1}AMY.$$

Ņemot vērā, ka $M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (sk. 1.1. vingrinājumu), sistēma (1.3) tiek pārveidota formā

$$\begin{cases} y_1' &= & y_1, \\ y_2' &= & -y_2. \end{cases} \tag{1.4}$$

1.2. vingrinājums. Pierakstīt sistēmu

$$\begin{cases} x_1' &= & 3x_1 - x_2, \\ x_2' &= & x_1 + x_2 \end{cases} \tag{1.5}$$

vektoru formā $X' = AX$, kur $X = \mathit{col}\,(x_1, x_2)$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, vai mainīgo (y_1, y_2) formā, pielietojot plaknes $X = MY$ lineāro pārveidojumu ar matricu $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1.1. piezīme. Apzīmējumu $X = col\,(x_1, x_2)$ izmanto tad, kad $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ neērti pierakstīt stabiņa veidā.

1.4. piemērs. Dots plaknes $X = MY$ lineārs pārveidojums ar pārveidojuma matricu $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Izvērstā formā

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

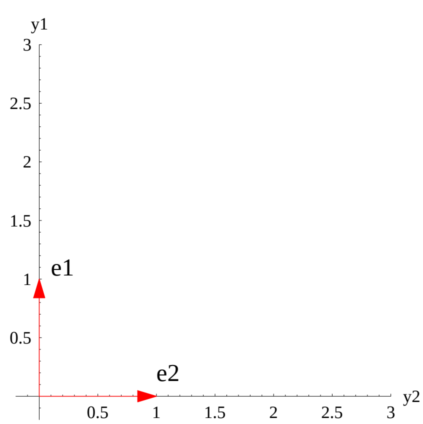
Kā izskatīsies jaunās koordinātu asis (y_1, y_2) vecajās (x_1, x_2)?

Atrisinājums. Pieņemsim, ka jaunajās koordinātās (y_1, y_2) y_1 ass ir vertikāla, bet y_2 ass ir horizontāla. Pieņemsim, ka $\bar{e}_1 = (1, 0)$ un $\bar{e}_2 = (0, 1)$ ir atbilstošie vienības vektori plaknē (y_1, y_2). Plaknē (x_1, x_2) vektoriem $\bar{e}_1 = (1, 0)$ un $\bar{e}_2 = (0, 1)$ atbilst vektori

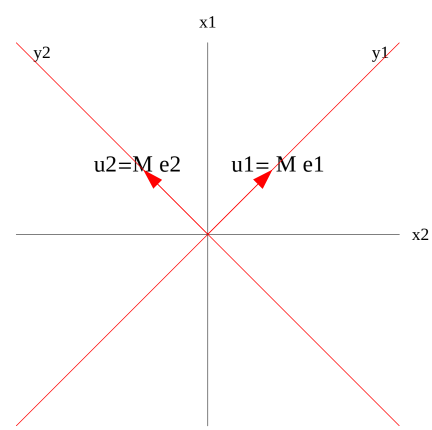
$$\bar{u}_1 = M\bar{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

un

$$\bar{u}_2 = M\bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$



1.1. zīm.



1.2. zīm.

1.3. Līdzības pārveidojumi

Par matricas A *līdzības pārveidojumu* sauc pārveidojumu $M^{-1}AM$, kurš dod matricu J līdzīgu matricai A.

1.3. vingrinājums. Atrast līdzības pārveidojumu, kas matricu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ pārveido matricā $J = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1.4. Kanoniskās formas

Apskatīsim šādas matricas:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad \text{(c)} \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}, \quad \text{(d)} \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix},$$

kur visi elementi ir reālie skaitļi un $\lambda_1 > \lambda_2$, $\beta > 0$.

1.1. teorēma. *[2.2.1 apgalvojums no [2]] Pieņemsim, ka A ir 2×2 matrica ar reāliem elementiem, bet λ_1 un λ_2 ir raksturvienādojuma*

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

saknes. Tad:

1) *ja raksturvienādojuma diskriminants D ir pozitīvs, tad eksistē divas rakstursaknes $\lambda_1 > \lambda_2$ un tāda nesingulāra matrica M, ka $J = M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$;*
2) *ja diskriminants D ir vienāds ar nulli, tad $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ un eksistē tāda nesingulāra matrica M, ka $J = M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ vai $J = M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$;*
3) *ja diskriminants D ir negatīvs, tad $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ ($\beta > 0$) un eksistē tāda nesingulāra matrica M, ka $J = M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$.*

Tādā veidā no jebkuras nesingulāras matricas A ar nesingulāru pārveidojumu $M^{-1}AM$ var iegūt vienu no augstāk minētajiem tipiem (a), (b), (c), (d).

Lai noteiktu, kādā kansoniskā formā tiek pārveidota matrica $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, vajag atrast tās īpašvērtības λ_1 un λ_2, tādēļ nepieciešams sastādīt raksturvienādojumu

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

vai

$$\lambda^2 - \operatorname{tr} A\lambda + \det A = 0, \tag{1.6}$$

kur $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22}$ (no vārda trace - pēda), $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Pierādījums. *Apskatīsim 1. gadījumu.* Pieņemsim, ka raksturvienādojuma $\det(A - \lambda E) = 0$ diskriminants

$$D = (\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} \tag{1.7}$$

ir pozitīvs. Tad raksturvienādojuma saknes ir

$$\lambda_1 = \frac{\operatorname{tr} A + \sqrt{D}}{2} > \lambda_2 = \frac{\operatorname{tr} A - \sqrt{D}}{2}. \tag{1.8}$$

Pieņemsim, ka $\bar{u} = (u_1, u_2)$ un $\bar{v} = (v_1, v_2)$ ir īpašvektori, kuri atbilst raksturīgām saknēm (īpašvērtībām) λ_1 un λ_2:

$$A\bar{u} = \lambda_1 \bar{u}, \quad A\bar{v} = \lambda_2 \bar{v}$$

vai

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 u_1 \\ \lambda_1 u_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_2 v_1 \\ \lambda_2 v_2 \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

Sastādīsim matricu $M = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$. Šī matrica ir nesingulāra, jo pretējā gadījumā $\det M = 0$, bet tas nozīmē, ka matricas stabiņi vai, kas ir tas pats, vektori $\bar{u}$ un $\bar{v}$ ir lineāri atkarīgi. Parādīsim, ka tas tā nav. Ja $\bar{u}$ un $\bar{v}$ ir lineāri atkarīgi, tad var atrast tādu skaitli $p \neq 0$, ka $\bar{v} = p\bar{u}$. Tad $A\bar{v} = pA\bar{u}$ un $A\bar{v} = \lambda_2 \bar{v} = p\lambda_2 A\bar{u}$. No šejienes $A\bar{u} = \lambda_2 \bar{u}$. No citas puses $A\bar{u} = \lambda_1 \bar{u}$. Atņemot no iepriekšpēdējās vienādības pēdējo vienādību, iegūstam

$$A(\bar{u} - \bar{u}) = A\Theta = \Theta = (\lambda_2 - \lambda_1)\bar{u},$$

kur $\Theta = \mathit{col}\,(0, 0)$. Iegūtā pretruna pierāda, ka vektori $\bar{u}$, $\bar{v}$ ir lineāri neatkarīgi un matricai M eksistē inversā matrica.

Parādīsim, ka $MJ = AM$, kur $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Tas nozīmē, ka matricu A ar nesingulāru pārveidojumu var novest formā J.

Tad

$$MJ = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 u_1 & \lambda_2 v_1 \\ \lambda_1 u_2 & \lambda_2 v_2 \end{pmatrix}.$$

No otras puses

$$AM = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix} = (\text{izmantojot } (1.9)) = \begin{pmatrix} \lambda_1 u_1 & \lambda_2 v_1 \\ \lambda_1 u_2 & \lambda_2 v_2 \end{pmatrix}.$$

1. gadījums ir pierādīts.

Apskatīsim 2. gadījumu. Raksturvienādojuma diskriminants

$$D = (\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} \tag{1.10}$$

ir vienāds ar nulli un vienādojumam ir viena divkārša sakne, kuru apzīmēsim ar λ_0.

Apskatīsim divas iespējas. Ja $A = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$ ir diagonāles matrica, tad jebkurai nesingulārai matricai M izpildas $MJ = AM$, kur $J = A$.

Pieņemsim, ka A nav diagonāles matrica. Tad jebkura matrica $M_1 = \begin{pmatrix} u_1 & m_{12} \\ u_2 & m_{22} \end{pmatrix}$, kur $\bar{u} = (u_1, u_2)$ ir matricas A īpašvektors, bet elementi m_{12} un m_{22} tiek izvēlēti tā, ka M_1 ir nesingulāra matrica, kurai piemīt īpašība: matricu reizinājums $M_1^{-1}AM_1 = \begin{pmatrix} \lambda_0 & C \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$, kur C ir kāda konstante. Pierādijums atrodams [2, § 2.2]. Tad matricai $M = M_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$ piemīt īpašība: $M^{-1}AM = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$. Tādējādi matrica M ir meklējamā.

Apskatīsim 3. gadījumu. Raksturvienādojuma diskriminants

$$D = (\operatorname{tr} A)^2 - 4 \det A = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} \tag{1.11}$$

ir negatīvs un raksturvienādojumam ir divas kompleksi saistītas saknes $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ un $\lambda_2 = \alpha - \beta i$, kur

$$\alpha = \frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}), \quad \beta = \frac{1}{2}\sqrt{-4a_{12}a_{21} - (a_{11} - a_{22})^2}. \tag{1.12}$$

Ievērosim, ka no nosacījuma $D < 0$ seko $4a_{12}a_{21} < 0$. Tad abi skaitļi a_{12} un a_{21} ir atšķirīgi no nulles.

Spriežot kā [2, § 2.2] var secināt, ka matrica $M = \begin{pmatrix} a_{11} - \alpha & -\beta \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix}$ ir meklējamā, t.i., tā apmierina sakarību $AM = M \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$. To var pierādīt arī ar tiešiem skaitļojumiem.

Tiešām, matricas AM pirmais elements ir

$$a_{11}(a_{11}-\alpha)+a_{12}a_{21} = a_{11}\big(a_{11}-\frac{1}{2}(a_{11}+a_{22})\big)+a_{12}a_{21} = \frac{1}{2}a_{11}(a_{11}-a_{22})+a_{12}a_{21}.$$

No otras puses, matricas MJ, $J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, pirmais elements ir

$$(a_{11} - \alpha)\alpha - \beta^2 = a_{11}\alpha - \alpha^2 - \beta^2 = a_{11}\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) - \frac{1}{4}(a_{11} + a_{22})^2 + \\ + \frac{1}{4}\big[4a_{12}a_{21} + (a_{11} - a_{22})^2\big] = \frac{1}{2}a_{11}(a_{11} - a_{22}) + a_{12}a_{21}.$$

Analoģiski var pārbaudīt matricu AM un MJ pārējo triju elementu vienādību. Matrica M ir nesingulāra, jo $\det M = -a_{21}\beta$ un abi reizinātāji nav vienādi ar nulli.

Matrica M nosaka plaknes (x_1, x_2) lineāro pārveidojumu sevī (jaunas koordinātas ir (y_1, y_2)). Atbilstoši lineāra diferenciālā sistēma (0.2) vai matricas formā (0.3) pārveidojas tajā pašā sistēmā ar jaunām koordinātām

$$\begin{cases} y_1' = b_{11}y_1 + b_{12}y_2, \\ y_2' = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 \end{cases} \tag{1.13}$$

vai matricu formā

$$Y' = JY, \tag{1.14}$$

kur $X = MY$, $X' = AX = MY' = MJY = MJM^{-1}X$ un, tātad $A = MJM^{-1}$ un $J = M^{-1}AM$.

1.5. piemērs. Pierakstīsim sistēmu

$$\begin{cases} x_1' &= x_1 + 2x_2, \\ x_2' &= x_1 + x_2 \end{cases} \tag{1.15}$$

kanoniskā formā.

Atrisinājums. Sistēmas matrica $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Raksturvienādojumam $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$ ir divas dažādas reālas saknes:

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{2} > \lambda_2 = 1 - \sqrt{2}.$$

Tātad tas ir (a) gadījums, kanoniskā matrica

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1-\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

un sistēma (1.15) pārveidojas šādā veidā

$$\begin{cases} y_1' = (1+\sqrt{2})y_1, \\ y_2' = (1-\sqrt{2})y_2. \end{cases} \tag{1.16}$$

Pārveidojuma $X = MY$ matrica M var būt atrasta tieši no sakarības $MJ = AM$.

Mēģināsim konstruēt matricu M, sekojot teorēmas pierādījumam. Matrica $M = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}$, kur $\bar{u} = (u_1, u_2)$ un $\bar{v} = (v_1, v_2)$ ir īpašvektori, kas atbilst rakstursaknēm (īpašvērtībām) λ_1 un λ_2. Īpašvektoru $\bar{u} = (u_1, u_2)$, kas atbilst $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$, var atrast no sakarības

$$A\bar{u} = \lambda_1 \bar{u}$$

vai

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\sqrt{2})u_1 \\ (1+\sqrt{2})u_2 \end{pmatrix}.$$

Kaut gan atrašanas sistēma (u_1, u_2) ir lineāra un homogēna, tās determinants ir vienāds ar nulli un, tātad eksistē netriviāli atrisinājumi, piemēram, $u_1 = 1$, $u_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. No sakarības $A\bar{v} = \lambda_2 \bar{v}$ tiek atrasts $\bar{v} = (v_1, v_2)$. Atrisinājums, piemēram, ir $v_1 = 1$, $v_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Matrica $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ ir nesingulāra matrica.

Tieša pārbaude rāda, ka

$$MJ = AM = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & 1-\sqrt{2} \\ 1+\frac{\sqrt{2}}{2} & 1-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}.$$

1.4.1. Pirmā kanoniskā forma

Apskatīsim kanonisko sistēmu (1.14), kur $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, λ_1 un λ_2 ir tādi reālie skaitļi, ka $\lambda_1 > \lambda_2$.

1. gadījums. $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$.

Sistēma (1.14) izskatās šādi

$$\begin{cases} y_1' &= \lambda_1 y_1, \\ y_2' &= \lambda_2 y_2. \end{cases} \tag{1.17}$$

Tās atrisinājumi tiek uzdoti ar formulām $y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}$, $y_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}$, kur C_1 un C_2 ir patvaļīgas konstantes. Izteiksim y_1 caur y_2:

$$y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t} = \frac{C_1 C_2^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}}{C_2^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}} e^{\lambda_2 t \frac{\lambda_1}{\lambda_2}} = \frac{C_1}{C_2^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}} (C_2 e^{\lambda_2 t})^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} = C y_2^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}},$$

kur C ir jauna patvaļīga konstante. Līknes $y_1 = C y_2^{\lambda}$, ja $\lambda > 1$, $C \in \mathbb{R}$, izskatās kā "parabolu" saime, kas pieskaras asij y_2.

Vektorfunkcija $y_1 = 0$, $y_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}$ arī ir atrisinājums. Tai atbilst labā pusass y_2, ja $C_2 > 0$ un kreisā pusass y_2, ja $C_2 < 0$. Analoģiski vektorfunkcijām $y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}$, $y_2 = 0$, kas ir atrisinājums, atbilst augšējā pusass y_1, ja $C_1 > 0$, un apakšējā pusass y_1, ja $C_1 < 0$.

1.2. piezīme. Ņemot vērā, ka gadījumā $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ funkcijas $e^{\lambda_1 t}$ un $e^{\lambda_2 t}$ aug, ja aug t, punkta $\big(y_1(t), y_2(t)\big)$ kustība notiek **no** stacionāra punkta $(0, 0)$. Šī iemesla dēļ saka, ka stacionārs punkts šajā gadījumā ir *nestabils.*

Tad stacionāra punkta $(0, 0)$ tips ir *nestabils mezgls.*

2. gadījums $0 > \lambda_1 > \lambda_2$.

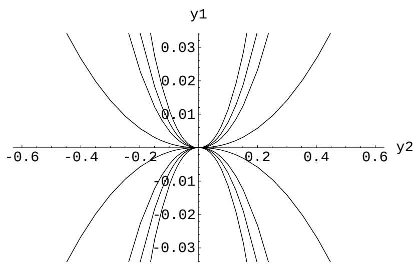
Šinī gadījumā, izsakot y_1 caur y_2, iegūstam

$$y_1 = C y_2^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}},$$

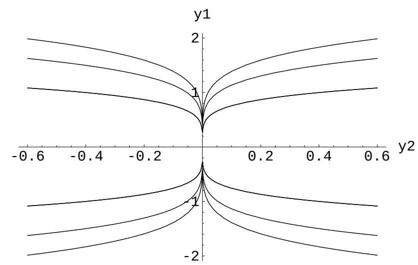
kur $0 < \frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 1$. Līknes veidā $y_1 = C y_2^{\lambda}$, ja $0 < \lambda < 1$, $C \in \mathbb{R}$ izskatās kā līkņu saime, kas pieskaras asij y_1.

1.3. piezīme. Ja $0 > \lambda_1 > \lambda_2$, tad funkcijas $e^{\lambda_1 t}$ un $e^{\lambda_2 t}$ dilst, ja aug t, punkta $\big(y_1(t), y_2(t)\big)$ kustība notiek virzienā **uz** stacionāro punktu $(0, 0)$, ja t aug. Tad saka, ka stacionārs punkts ir *stabils.*

Šīnī gadījumā stacionārs punkts $(0, 0)$ ir stabils mezgls.



1.3. zīm. Nestabils mezgls, ja $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} > 1$.



1.4. zīm. Stabils mezgls, ja $0 < \frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 1$.

3. gadījums. $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$.

Sistēmas (1.17) atrisinājumi tiek uzdoti ar formulām $y_1 = C_1 e^{\lambda_1 t}$, $y_2 = C_2 e^{\lambda_2 t}$, kur C_1 un C_2 ir patvaļīgas konstantes.

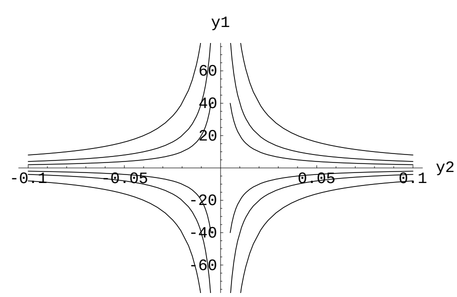
Pieņemsim, ka $C_1 > 0$ un $C_2 > 0$. Ievērosim, ka

$$y_1 y_2^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} = C_1 e^{\lambda_1 t} C_2^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} e^{\lambda_2 t(-\frac{\lambda_1}{\lambda_2})} = C_1 C_2^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} e^{\lambda_1 t - \lambda_1 t} = C,$$

kur C ir jauna patvaļīga konstante. Līknes veidā $y_1 y_2^{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}} = C$, ja $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 0$, $C > 0$, izskatās kā "hiperbolu" saime.

Gadījumi $C_1 > 0, C_2 < 0$, $C_1 < 0, C_2 > 0$ un $C_1 < 0, C_2 < 0$ tiek apskatīti analoģiski.

Stacionāra punkta apkārtnē trajektoriju uzvedība fāzes plaknē ir parādīta zīmējumā.



1.5. zīm. Stacionāra punkta tips "sedlu punkts".

Šinī gadījumā stacionāra punkta $(0,0)$ tips ir *sedlu punkts.* Vienā virzienā šis punkts ir stabils, bet citā nē.

1.4.2. Otrā kanoniskā forma

Apskatīsim kanonisku sistēmu (1.14), kur $J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$, $\lambda_0 > 0$.

Sistēmas atrisinājumi

$$\begin{cases} y_1' &= \lambda_0 y_1, \\ y_2' &= \lambda_0 y_2 \end{cases} \tag{1.18}$$

tiek uzdoti ar formulām $y_1 = C_1 e^{\lambda_0 t}$, $y_2 = C_2 e^{\lambda_0 t}$, kur C_1 un C_2 ir patvaļīgas konstantes. Ja $C_1 = C_2 = 0$, tad sistēmas atbilstošais atrisinājums ir $y_1 = 0$, $y_2 = 0$. Tam atbilst fāzes plaknes punkts $(0, 0)$.

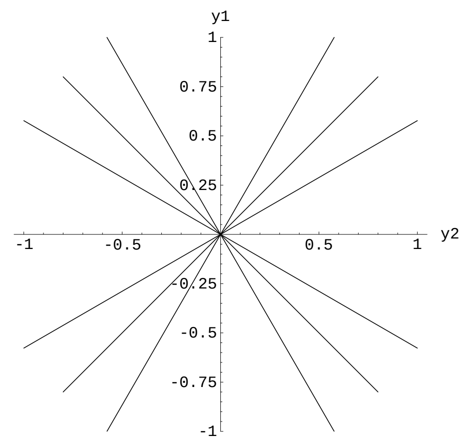
Atrisinājumam ar $C_2 = 0$, $y_1 = C_1$ atbilst pusasis $\{y_2 = 0,\ y_1 > 0\}$ un $\{y_2 = 0,\ y_1 < 0\}$.

Ja $C_2 \neq 0$, tad

$$\frac{y_1(t)}{y_2(t)} = \frac{C_1 e^{\lambda_0 t}}{C_2 e^{\lambda_0 t}} = \frac{C_1}{C_2},$$

no kurienes seko, ka $y_1(t) = C y_2(t)$.

Atbilstošas fāzes trajektorijas ir parādītas zīmējumā.



1.6. zīm. Stacionāra punkta tips "zvaigznes (dikritisks) mezgls".

Šinī gadījumā stacionāra punkta $(0, 0)$ tips ir speciāla veida mezgls, t.i., *zvaigznes (dikritisks) mezgls* jeb *dikritisks mezgls*. Stacionārs punkts $(0, 0)$ ir stabils, ja $\lambda_0 < 0$ (visi atrisinājumi $y_1 = C_1 e^{\lambda_0 t}$, $y_2 = C_2 e^{\lambda_0 t}$ "tuvojās" punktam $(0, 0)$ ja $t \to +\infty$). Stacionārs punkts $(0, 0)$ ir nestabils, ja $\lambda_0 > 0$ (visi atrisinājumi $y_1 = C_1 e^{\lambda_0 t}$, $y_2 = C_2 e^{\lambda_0 t}$ "attālinās" no punkta $(0, 0)$ ja $t \to +\infty$).

1.4.3. Trešā kanoniskā forma

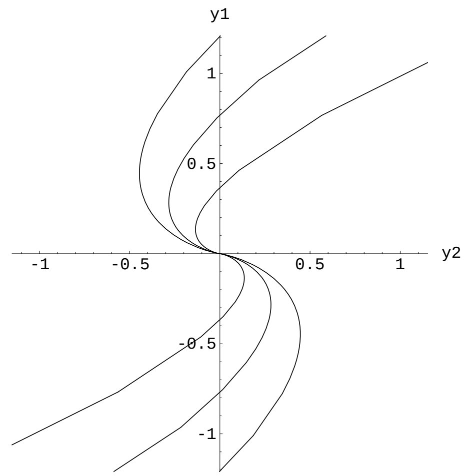
Apskatīsim kanonisku sistēmu (1.14), kur $J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$, $\lambda_0 > 0$.

Sistēma (1.14) var būt pierakstīta arī šādi

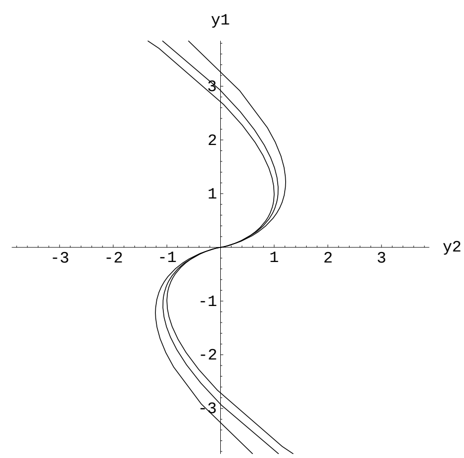
$$\begin{cases} y_1' &= \lambda_0 y_1 + y_2, \\ y_2' &= \lambda_0 y_2. \end{cases} \tag{1.19}$$

Atrisinājumi tiek uzdoti ar formulām $y_2 = C_2 e^{\lambda_0 t}$, $y_1 = (C_1 + tC_2) e^{\lambda_0 t}$, kur C_1 un C_2 ir patvaļīgas konstantes. Otrais vienādojums tiek risināts tieši, bet pirmais var būt atrisināts kā pirmās kārtas lineārs nehomogēns vienādojums, ja $y_2 = C_2 e^{\lambda_0 t}$, ar mainīgo variāciju metodes palīdzību.

Atbilstošas fāzes trajektorijas parādītas zīmējumos.



1.7. zīm. Nestabila stacionāra punkta tips "değenerēts mezgls", $\lambda_0 = 1$.



1.8. zīm. Stabila stacionāra punkta tips "değenerēts mezgls", $\lambda_0 = -1$.

Šinī gadījumā stacionāra punkta $(0,0)$ tips ir speciālā veida mezgls, t.i., *değenerēts mezgls*. Stacionārs punkts $(0,0)$ ir stabils, ja $\lambda_0 < 0$ (visi atrisinājumi $y_1(t), y_2(t)$ "tuvojas" punktam $(0,0)$ ja $t \to +\infty$). Stacionārs punkts $(0,0)$ ir nestabils, ja $\lambda_0 > 0$ (visi atrisinājumi $y_1(t)$, $y_2(t)$ "attālinās" no $(0,0)$ ja $t \to +\infty$).

1.4.4. Ceturtā kanoniskā forma

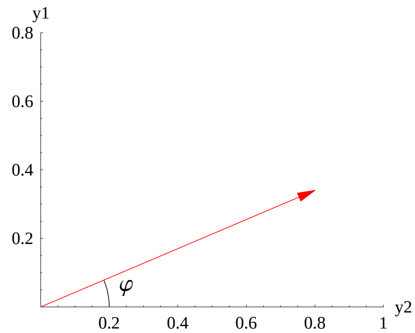
Apskatīsim kanonisku sistēmu (1.14), kur $J = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, $\beta > 0$.

Sistēma tiek pierakstīta šādi

$$\begin{cases} y_1' &= \alpha y_1 - \beta y_2, \\ y_2' &= \beta y_1 + \alpha y_2, \quad \beta > 0. \end{cases} \tag{1.20}$$

Ievedīsim polāras koordinātas pēc formulām

$$y_1 = \rho \cos\varphi, \quad y_2 = \rho \sin\varphi. \tag{1.21}$$



1.9. zīm.

Pierakstīsim sistēmu (1.20) polārās koordinātās.

Diferencējot sakarības (1.21), iegūstam

$$\begin{cases} y_1' &= \rho' \cos\varphi - \rho\varphi' \sin\varphi, \\ y_2' &= \rho' \sin\varphi + \rho\varphi' \cos\varphi. \end{cases} \tag{1.22}$$

Ievietojot (1.20) y_1, y_2, y_1', y_2', izteiksmes ar polāro koordinātu palīdzību, iegūstam

$$\begin{cases} \rho' \cos\varphi - \rho\varphi' \sin\varphi &= \alpha\rho\cos\varphi - \beta\rho\sin\varphi, \\ \rho' \sin\varphi + \rho\varphi' \cos\varphi &= \beta\rho\cos\varphi + \alpha\rho\sin\varphi. \end{cases} \tag{1.23}$$

Reizinot pirmo rindu ar $\cos\varphi$, bet otru ar $\sin\varphi$ un saskaitot, iegūstam

$$\rho' = \alpha\rho. \tag{1.24}$$

Tālāk, reizinot pirmo rindu ar $\sin\varphi$, bet otru ar $\cos\varphi$ un saskaitot, iegūstam

$$\rho\varphi' = \beta\rho$$

vai, dalot ar $\rho > 0$,

$$\varphi' = \beta. \tag{1.25}$$

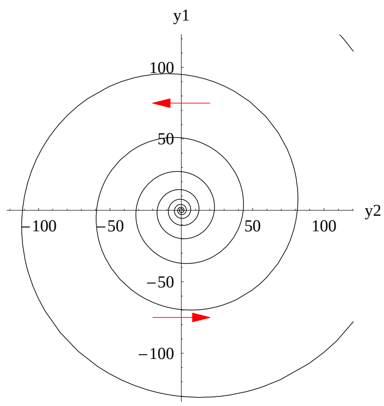
Tādā veidā sistēma (1.20) polārās koordinātās izskatās šādi

$$\begin{cases} \rho' &= \alpha\rho, \\ \varphi' &= \beta. \end{cases} \tag{1.26}$$

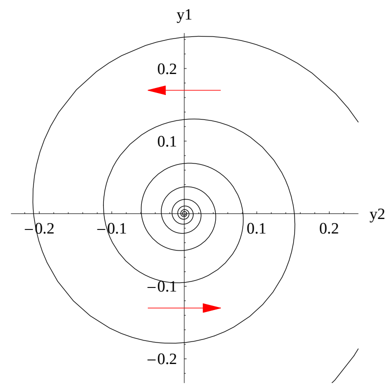
Vispārīgais atrisinājums ir

$$\rho = C_1 e^{\alpha t}, \quad \varphi = \beta t + C_2. \tag{1.27}$$

Zemāk ievietoti zīmējumi, kas rāda fāzes trajektoriju uzvedību ar dažādām α un β vērtībām. Ar bultām tiek norādīts punkta virziens pa fāzes trajektorijām, ja t aug. Fāzes trajektorijām ir spirāles veids, kuras uztinās uz stacionāra punkta $(0,0)$ ja $t \to \pm\infty$. Tādus stacionārus punktus sauc par "fokusiem". Fokuss eksistē, ja $\alpha \neq 0$ (tad $\rho(t)$ aug vai dilst, ja t aug atkarībā no α zīmes). Ja $\rho(t) \to +\infty$, tad fokuss ir nestabils (fāzes trajektorijas punkts cenšas attālināties no stacionāra punkta, ja t aug). Turpretīm ja $\rho(t) \to 0$, tad fokuss stabils (fāzes trajektorijas punkts cenšās tuvoties stacionāram punktam ja t aug). Tādā veidā attālināšanas (vai tuvināšanas) no stacionāra punkta ātrums ir atkarīgs no α vērtības, bet rotācijas ātrums (pārvietošanas ātrums pa fāzes trajektoriju) ir atkarīgs no β vērtības.

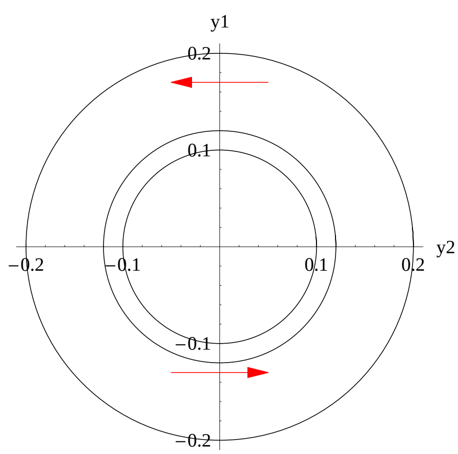


1.10. zīm. Nestabils fokuss ja $C_1 = 1$, $C_2 = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = 10$.



1.11. zīm. Stabils fokuss ja $C_1 = 0.1$, $C_2 = 0$, $\alpha = -1$, $\beta = 10$.

Ja $\alpha = 0$, tad $\rho(t) = const$ un fāzes trajektorijas ir koncentriski riņķi ap stacionāru punktu. Stacionāru punktu šinī gadījumā sauc par "centru".



1.12. zīm. Stacionāra punkta tips "centrs".

1.4. vingrinājums. Vai sekojoša sistēma ir kanoniska? Kāpēc? Noteikt stacionāra punkta tipu.

$$\begin{cases} x_1' &= 2x_1, \\ x_2' &= x_2, \end{cases} \tag{1.28}$$

1.5. vingrinājums. Vai sekojoša sistēma ir kanoniska? Kāpēc? Noteikt stacionāra punkta tipu.

$$\begin{cases} x_1' &= -x_1, \\ x_2' &= -2x_2. \end{cases} \tag{1.29}$$

1.6. vingrinājums. Vai sekojoša sistēma ir kanoniska? Kāpēc? Noteikt stacionāra punkta tipu.

$$\begin{cases} x_1' &= x_1, \\ x_2' &= -x_2. \end{cases} \tag{1.30}$$

1.7. vingrinājums. Vai sekojoša sistēma ir kanoniska? Kāpēc? Noteikt stacionāra punkta tipu.

$$\begin{cases} x_1' &= x_1, \\ x_2' &= x_2. \end{cases} \tag{1.31}$$

1.8. vingrinājums. Vai sekojoša sistēma ir kanoniska? Kāpēc? Noteikt stacionāra punkta tipu.

$$\begin{cases} x_1' &= -x_1, \\ x_2' &= -x_2. \end{cases} \tag{1.32}$$

1.9. vingrinājums. Vai sekojoša sistēma ir kanoniska? Kāpēc? Noteikt stacionāra punkta tipu.

$$\begin{cases} x_1' &= x_1 + x_2, \\ x_2' &= x_2. \end{cases} \tag{1.33}$$

1.10. vingrinājums. Vai sekojoša sistēma ir kanoniska? Kāpēc? Noteikt stacionāra punkta tipu.

$$\begin{cases} x_1' &= -x_1 + x_2, \\ x_2' &= -x_2. \end{cases} \tag{1.34}$$

1.11. vingrinājums. Vai sekojoša sistēma ir kanoniska? Kāpēc? Noteikt stacionāra punkta tipu.

$$\begin{cases} x_1' &= -x_1 - x_2, \\ x_2' &= x_1 - x_2. \end{cases} \tag{1.35}$$

1.12. vingrinājums. Vai sekojoša sistēma ir kanoniska? Kāpēc? Noteikt stacionāra punkta tipu.

$$\begin{cases} x_1' &= -x_2, \\ x_2' &= x_1. \end{cases} \tag{1.36}$$

1.13. vingrinājums. Noteikt stacionāra punkta tipu un konstruēt fāzes plakni šī punkta apkārtnē sistēmai

$$\begin{cases} x_1' &= 3x_1, \\ x_2' &= 2x_2. \end{cases} \tag{1.37}$$

1.14. vingrinājums. Noteikt stacionāra punkta tipu un konstruēt fāzes plakni šī punkta apkārtnē sistēmai

$$\begin{cases} x_1' &= -2x_1, \\ x_2' &= -4x_2. \end{cases} \tag{1.38}$$

1.15. vingrinājums. Noteikt stacionāra punkta tipu un konstruēt fāzes plakni šī punkta apkārtnē sistēmai

$$\begin{cases} x_1' &= 2x_1, \\ x_2' &= -4x_2. \end{cases} \tag{1.39}$$

1.16. vingrinājums. Noteikt stacionāra punkta tipu un konstruēt fāzes plakni šī punkta apkārtnē sistēmai

$$\begin{cases} x_1' &= 4x_1, \\ x_2' &= 4x_2. \end{cases} \tag{1.40}$$

1.17. vingrinājums. Noteikt stacionāra punkta tipu un konstruēt fāzes plakni šī punkta apkārtnē sistēmai

$$\begin{cases} x_1' &= -2x_1, \\ x_2' &= -2x_2. \end{cases} \tag{1.41}$$

1.18. vingrinājums. Noteikt stacionāra punkta tipu un konstruēt fāzes plakni šī punkta apkārtnē sistēmai

$$\begin{cases} x_1' &= -2x_1 + x_2, \\ x_2' &= -2x_2. \end{cases} \tag{1.42}$$

1.19. vingrinājums. Noteikt stacionāra punkta tipu un konstruēt fāzes plakni šī punkta apkārtnē sistēmai

$$\begin{cases} x_1' &= 2x_1 - 3x_2, \\ x_2' &= 3x_1 + 2x_2. \end{cases} \tag{1.43}$$

1.20. vingrinājums. Noteikt stacionāra punkta tipu un konstruēt fāzes plakni šī punkta apkārtnē sistēmai

$$\begin{cases} x_1' &= -4x_2, \\ x_2' &= x_1. \end{cases} \tag{1.44}$$

1.21. vingrinājums. Noteikt stacionāra punkta tipu un konstruēt fāzes plakni šī punkta apkārtnē sistēmai

$$\begin{cases} x_1' &= x_1 - x_2, \\ x_2' &= x_1 + x_2. \end{cases} \tag{1.45}$$

1.6. piemērs. Pierakstīt sistēmu

$$\begin{cases} x_1' &= 3x_1 - x_2, \\ x_2' &= x_1 + x_2 \end{cases}$$

kanoniskā formā.

Atrisinājums. Sistēmas matrica ir $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Raksturvienādojumam $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ ir viena divkārša sakne $\lambda_0 = 2$. Tādējādi izpildās (b) vai (c) gadījums. Ņemot vērā, ka matrica A nav diagonāles matrica, tad ir (c) gadījums. Kanoniska matrica ir

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

un sistēmu var pierakstīt kanoniskā formā

$$\begin{cases} y_1' &= 2y_1 + y_2, \\ y_2' &= 2y_2. \end{cases}$$

Pārveidojuma $X = MY$ matricu $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ var atrast, izmantojot atbilstības $MJ = AM$.

Sareizinot matricas, iegūstam

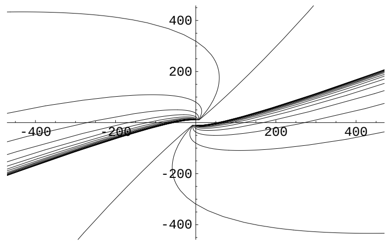
$$MJ = \begin{pmatrix} 2m_{11} & m_{11} + 2m_{12} \\ 2m_{21} & m_{21} + 2m_{22} \end{pmatrix}, \ AM = \begin{pmatrix} 3m_{11} - m_{21} & 3m_{12} - m_{22} \\ m_{11} + m_{21} & m_{12} + m_{22} \end{pmatrix}.$$

Pielīdzinot matricu vienādus elementus, iegūstam sistēmu

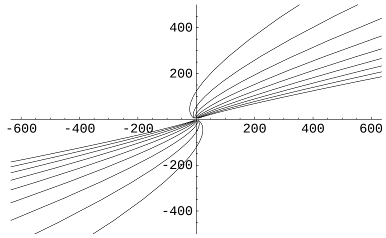
$$\begin{cases} 2m_{11} &= 3m_{11} - m_{21}, \\ m_{11} + 2m_{12} &= 3m_{12} - m_{22}, \\ 2m_{21} &= m_{11} + m_{21}, \\ m_{21} + 2m_{22} &= m_{12} + m_{22}. \end{cases}$$

Šai lineārai homogēnai sistēmai ir netriviāli atrisinājumi, piemēram, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Fāzes līkņu uzvedību koordinātēs (x_1, x_2) un kanoniskās koordinātēs (y_1, y_2) var redzēt zīmējumos.



1.13. zīm. Fāzes līknes koordinātēs (x_1, x_2).



1.14. zīm. Fāzes līknes koordinātēs (y_1, y_2).

1.22. vingrinājums. Doto sistēmu uzrakstīt kanoniskā formā.

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 - x_2, \\ x_2' = -2x_1 + 4x_2. \end{cases} \tag{1.46}$$

1.23. vingrinājums. Doto sistēmu uzrakstīt kanoniskā formā un noteikt stacionāra punkta tipu

$$\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2, \\ x_2' = 5x_1 - x_2. \end{cases} \tag{1.47}$$

1.24. vingrinājums. Doto sistēmu uzrakstīt kanoniskā formā un noteikt stacionāra punkta tipu

$$\begin{cases} x_1' = -3x_1, \\ x_2' = -2x_1 - x_2. \end{cases} \tag{1.48}$$

1.25. vingrinājums. Doto sistēmu uzrakstīt kanoniskā formā un noteikt stacionāra punkta tipu

$$\begin{cases} x_1' = -0.1x_1 - 0.3x_2, \\ x_2' = -0.2x_1 - 0.2x_2. \end{cases} \tag{1.49}$$

1.26. vingrinājums. Doto sistēmu uzrakstīt kanoniskā formā un noteikt stacionāra punkta tipu

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 - 8x_2, \\ x_2' = x_1 + 2x_2. \end{cases} \tag{1.50}$$

1.27. vingrinājums. Dotās sistēmas uzrakstīt kanoniskā formā un noteikt stacionāro punktu tipu

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + 2x_2, \\ x_2' = 2x_2, \end{cases}$$

1.28. vingrinājums. Dotās sistēmas uzrakstīt kanoniskā formā un noteikt stacionāro punktu tipu

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = x_1, \end{cases}$$

1.29. vingrinājums. Dotās sistēmas uzrakstīt kanoniskā formā un noteikt stacionāro punktu tipu

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2, \\ x_2' = x_1, \end{cases}$$

1.30. vingrinājums. Dotās sistēmas uzrakstīt kanoniskā formā un noteikt stacionāro punktu tipu

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 + x_2, \\ x_2' = x_2. \end{cases}$$

1.31. vingrinājums. Doto sistēmu uzrakstīt kanoniskā formā un noteikt stacionāra punkta tipu

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2, \\ x_2' = -2x_1 + 4x_2. \end{cases} \tag{1.51}$$

1.32. vingrinājums. Doto sistēmu uzrakstīt kanoniskā formā un noteikt stacionāra punkta tipu

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1, \\ x_2' = 4x_2. \end{cases} \tag{1.52}$$

1.33. vingrinājums. Doto sistēmu uzrakstīt kanoniskā formā un noteikt stacionāra punkta tipu

$$\begin{cases} x_1' = 4x_1 + x_2, \\ x_2' = -x_1 + 2x_2. \end{cases} \tag{1.53}$$

1.34. vingrinājums. Doto sistēmu uzrakstīt kanoniskā formā un noteikt stacionāra punkta tipu

$$\begin{cases} x_1' = 12x_1 + 4x_2, \\ x_2' = -26x_1 - 8x_2. \end{cases} \tag{1.54}$$

1.35. vingrinājums. Doto sistēmu uzrakstīt kanoniskā formā un noteikt stacionāra punkta tipu

$$\begin{cases} x_1' = 10x_1 + 2x_2, \\ x_2' = -28x_1 - 5x_2. \end{cases} \tag{1.55}$$

2. Nelineārās sistēmas

Šajā nodaļā apskatīsim nelineāro sistēmu veidā

$$\begin{cases} x_1' &= f_1(x_1, x_2), \\ x_2' &= f_2(x_1, x_2) \end{cases} \tag{2.1}$$

pētīšanas veidus.

Tādas sistēmas *stacionāros punktus* nosaka atbilstības

$$f_1(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2) = 0. \tag{2.2}$$

Atšķirībā no lineārām sistēmām nelineāro sistēmu fāzes plaknes ne vienmēr tiek noteiktas ar sistēmas stacionāro punktu raksturojumu.

Ievedīsim dažus nepieciešamos turpmāk jēdzienus.

Par *punkta* (u, v) *apkārtni* sauc jebkuru plaknes $\mathbb{R}^2$ apakškopu, kas satur riņķi $\{(x_1, x_2) : (x_1^2 - u)^2 + (x_2^2 - v)^2 < r^2\}$ kādam $r \neq 0$.

Sistēmas (2.1) fāzes plaknes daļu, kas atrodas punkta (u, v) apkārtnē U, sauc par fāzes plaknes *saspiedumu* uz U.

Šo saspiedumu sauc par *lokālo fāzes plakni*.

Nelineāro sistēmu fundamentālā atšķirība no lineārām tiek secināta no tā, ka nelineārām sistēmām var būt vairāk par vienu stacionāro punktu un katram tiek konstruēta sava lokāla fāzes plakne.

Lokālo fāzes plakņu pētīšanā tiek izmantota linearizācija stacionāra kritiskā punkta apkārtnē.

2.1. Linearizācija stacionāra kritiskā punkta apkārtnē

Pieņemsim, ka (u, v) ir viens no sistēmas (2.1) stacionāriem punktiem. Lineāru sistēmu

$$\begin{cases} y_1' &= f_{1\,x_1}(u, v)y_1 &+ &f_{1\,x_2}(u, v)y_2, \\ y_2' &= f_{2\,x_1}(u, v)y_1 &+ &f_{2\,x_2}(u, v)y_2 \end{cases} \tag{2.3}$$

sauc par sistēmas (2.1) *linearizāciju* punktā (u, v). Šīs sistēmas koeficienti ir funkciju f_1 un f_2 atvasinājumi pēc mainīgiem x_1 un x_2, kas tiek aprēķināti punktā (u, v). Tiek izmantoti arī izteicieni *linearizēta sistēma* un *variāciju vienādojumu sistēma* attiecībā pret (atrisinājuma) punktu (u, v). Neaizmirsīsim, ka punkts (u, v) ir sistēmas (2.1) atrisinājums.

2.1. vingrinājums. ([2], 3.2.1.a piemērs, 86. lpp.) Atrast sistēmas

$$\begin{cases} x_1' &= x_1 + x_1^2 + x_1 x_2^2, \\ x_2' &= x_2 + x_2^{\frac{3}{2}} \end{cases} \tag{2.4}$$

linearizāciju punktā $(0, 0)$.

2.2. vingrinājums. ([2], 3.2.1.b piemērs, 86. lpp.) Atrast sistēmas

$$\begin{cases} x_1' &= x_1^3, \\ x_2' &= x_2 + x_2 \sin x_1 \end{cases} \tag{2.5}$$

linearizāciju punktā $(0, 0)$.

2.3. vingrinājums. ([2], 3.2.1.v piemērs, 86. lpp.) Atrast sistēmas

$$\begin{cases} x_1' &= x_1^2 \exp x_2, \\ x_2' &= x_2(\exp x_1 - 1) \end{cases} \tag{2.6}$$

linearizāciju punktā $(0, 0)$.

2.4. vingrinājums. Atrast sistēmas

$$\begin{cases} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -x_1 - x_1^3 \end{cases} \tag{2.7}$$

linearizāciju punktā $(0, 0)$.

2.5. vingrinājums. Atrast sistēmas

$$\begin{cases} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -x_1 + x_1^3 \end{cases} \tag{2.8}$$

stacionāros punktus un sistēmas linearizāciju katrā no šiem punktiem.

2.6. vingrinājums. Atrast sistēmas

$$\begin{cases} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_1 - x_1^3 \end{cases} \tag{2.9}$$

stacionāros punktus un sistēmas linearizāciju katrā no šiem punktiem.

2.7. vingrinājums. Konstruēt nelineāro sistēmu veidā (2.1) ar stacionāro punktu $(0, 0)$ tā, ka tās linearizācijai ir nestabils mezgls šajā punktā.

2.8. vingrinājums. Konstruēt nelineāro sistēmu veidā (2.1) ar stacionāro punktu $(0, 0)$ tā, ka tās linearizācijai ir stabils mezgls šajā punktā.

2.9. vingrinājums. Konstruēt nelineāro sistēmu veidā (2.1) ar stacionāro punktu $(0, 0)$ tā, ka tās linearizācijai ir sedlu punkts šajā punktā.

2.10. vingrinājums. Konstruēt nelineāro sistēmu veidā (2.1) ar stacionāro punktu $(0, 0)$ tā, ka tās linearizācijai ir "zvaigznes (dikritisks) punkts" šajā punktā.

2.11. vingrinājums. Konstruēt nelineāro sistēmu veidā (2.1) ar stacionāro punktu $(0, 0)$ tā, ka tās linearizācijai ir deģenerēts mezgls šajā punktā.

2.12. vingrinājums. Konstruēt nelineāro sistēmu veidā (2.1) ar stacionāro punktu $(0, 0)$ tā, ka tās linearizācijai ir fokuss šajā punktā.

2.13. vingrinājums. Konstruēt nelineāro sistēmu veidā (2.1) ar stacionāro punktu $(0, 0)$ tā, ka tās linearizācijai ir centrs šajā punktā.

2.2. Linearizācijas teorēma nekustīga stacionāra punkta apkārtnē

Pieņemsim, ka (u, v) ir sistēmas (2.1) nekustīgais punkts. Pieņemsim, ka šis stacionārs punkts ir vienkāršs. Tas nozīmē, ka matricas

$$\begin{pmatrix} f_{1x_1}(u,v) & f_{1x_2}(u,v) \\ f_{1x_2}(u,v) & f_{2x_2}(u,v) \end{pmatrix},$$

determinants, kas sastādīts no lineāras sistēmas (2.3) koeficientiem, nav vienāds ar nulli.

2.1. teorēma. *Sistēmas (2.1) fāzes plakne nekustīga punkta (u, v) apkārtnē kvalitatīvi ekvivalenta lineāras sistēmas (2.3) fāzes plaknei, ja tikai lineāras sistēmas (2.3) stacionārs punkts nav centrs.*

Kvalitatīva ekvivalence nozīmē šajā gadījumā, ka eksistē sistēmas (2.1) stacionāra punkta (u, v) apkārtne $N(u, v)$ tāda, ka starp lineāras sistēmas (2.3) fāzes plakni $\mathbb{R}^2$ un $N(u, v)$ eksistē savstarpēji viennozīmīga atbilstība, kas pārveido $N(u, v)$ par $\mathbb{R}^2$.

Tādā veidā nelineāras sistēmas (2.1) tuvinātai pētīšanai nekustīga punkta (u, v) apkārtnē pietiekoši apskatīt linearizāciju (2.3), noteikt sistēmas (2.3) punkta $(0, 0)$ tipu un uzzīmēt atbilstošo fāzes plakni.

Gadījumā, ja lineāras sistēmas (2.3) stacionārs punkts $(0, 0)$ ir centrs, sistēmas (2.1) nekustīga punkta (u, v) apkārtnē var būt spirāles veida un noslēgto trajektoriju kopa.

Piemēram, sistēmām (Piemērs 3.3.1 no [2], lpp. 90)

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ x_2' = \quad x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \tag{2.10}$$

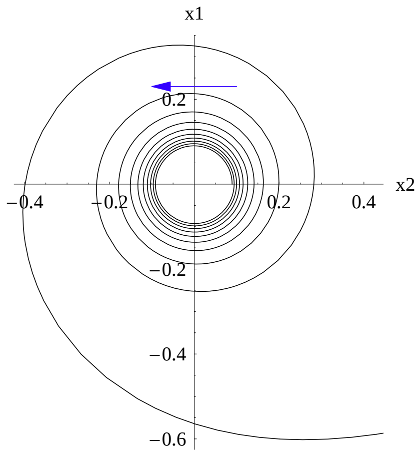
un

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \\ x_2' = \quad x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \tag{2.11}$$

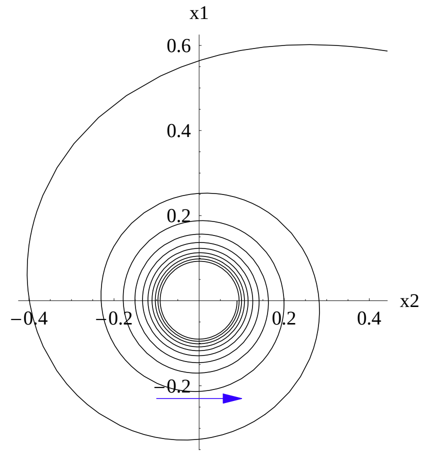
ir viena un tā pati linearizācija punktā $(0, 0)$

$$x_1' = -x_2, \quad x_2' = x_1,$$

kurai atbilst stacionāra punkta tips "centrs". Tajā pašā laikā fāzes plaknes ir fokusu veidi, turklāt pirmajā gadījumā ir nestabils fokuss, bet otrajā - stabils.



2.15. zīm. Sistēmas (2.10) fāzes plakne.



2.16. zīm. Sistēmas (2.11) fāzes plakne.

Tādā veidā nelineāras sistēmas fāzes plakne nekustīga punkta (u, v) apkārtnē ir kvalitatīvi ekvivalenta linearizētas sistēmas fāzes plaknei, izņemot gadījumu, kad sākumpunkts $(0, 0)$ ir linearizētas sistēmas stacionāra punkta tips ir "centrs". Stacionāra punkta tips "centrs" parādas tad, kad sistēmas (2.3) koeficientu matricas īpašvērtību λ_1 un λ_2 reālas daļas ir vienādas ar nulli. Pretējā gadījumā nelineāras sistēmas (2.1) nekustīgu punktu (u, v) sauc par hiperbolisku.

2.14. vingrinājums. Klasificēt sistēmu stacionāros punktus:

a)
$$\begin{cases} x_1' = x_1^2 + x_2, \\ x_2' = x_2 - x_1; \end{cases} \tag{2.12}$$

b)
$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -x_1 + x_1^2; \end{cases} \tag{2.13}$$

c)
$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -x_1 + x_1^3; \end{cases} \tag{2.14}$$

d)
$$\begin{cases} x_1' = -x_2 + x_2^3, \\ x_2' = x_1; \end{cases} \tag{2.15}$$

e)
$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -x_1(x_1^2 - 4); \end{cases} \tag{2.16}$$

f)

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -x_1(x_1^2-4)(x_1^2-9); \end{cases} \quad (2.17)$$

g)

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -x_1(x_1^2-4)(x_1^2-9); \end{cases} \quad (2.18)$$

h)

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -x_2x_1^2 - x_1^3; \end{cases} \quad (2.19)$$

i)

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -x_1x_2 - x_1(x_1^2-4); \end{cases} \quad (2.20)$$

j)

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -x_2x_1 - x_1(x_1^2-4)(x_1^2-9). \end{cases} \quad (2.21)$$

3. Nelineāri oscilatori

3.1. Konservatīvs gadījums

Vienādojums

$$x'' + g(x) = 0 \quad (3.1)$$

apraksta nelineāras svārstības konservatīvās sistēmās. Harmonisko svārstību vispārīgs vienādojums ir

$$x'' + kx^2 = 0. \quad (3.2)$$

Harmonisko svārstību vienādojumam eksistē formula, kas ļauj iegūt visus tā atrisinājumus. Ja vienādojuma abas puses sareizināt ar $2x'dt$ un integrēt, tad iegūst sakarību

$$x'^2 + k^2x^2 = E, \quad (3.3)$$

kur E ir patvaļīga nenegatīva konstante. Patvaļīgas konstantes apzīmējums nav izvēlēts nejauši. Sakarības (3.3) kreisās puses saskaitāmos mehanikā interpretē kā kinētisko un potenciālo enerģiju. To summa E ir konstante (konkrētiem dotajiem sākumnosacījumiem). Tādejādi ir patiess apgalvojums, ka vienādojums (3.2) apraksta sistēmas sākotnējo enerģiju, kura nemainās ar laiku, t.i., nenotiek enerģijas apmaiņa ar apkārtējo vidi. Tādi pieņēmumi nav reāli, bet no matemātikas viedokļa ir pieļaujami. Līkņu sistēma, kurus apraksta (3.3), ir koncentrisko elipšu kontinuums, kas iet ap sākumpunktu - sistēmas

$$\begin{cases} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= -x_1, \end{cases} \quad (3.4)$$

kas ekvivalenta vienādojumam(3.2), vienīgo nekustīgu punktu.

Vienādojums (3.1) var būt integrēts tādā pašā veidā.

Pēc vienādojuma (3.1) abas puses reizināšanas ar $2x'dt$ un integrēšanas, iegūstam sakarību

$$x'^2 + 2\int^x g(s)\,ds = E, \tag{3.5}$$

kuru var apskatīt kā enerģijas nezūdamības likumu. Bet ir arī nopietnas atšķirības no harmoniska oscilatora gadījuma. Pirmkārt, nekustīgo punktu var būt vairāk par vienu. Otrkārt, fāzes trajektorijas dažādām E vērtībām var nopietni atšķirties. Apskatīsim dažus piemērus.

3.2. Kvadrātiskā nelinearitāte

Apskatīsim nelineāru vienādojumu

$$x'' + x - x^2 = 0. \tag{3.6}$$

Funkcija $g(x) = x - x^2$. Enerģijas nezūdamības likums (3.5) izskatās šādi

$$x'^2 + x^2 - \frac{2}{3}x^3 = E. \tag{3.7}$$

3.17. zīmējumā ir paradītas dažas fāzes līknes. Vienādojuma (3.6) ekvivalentai sistēmai

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -x_1 + x_1^2 \end{cases} \tag{3.8}$$

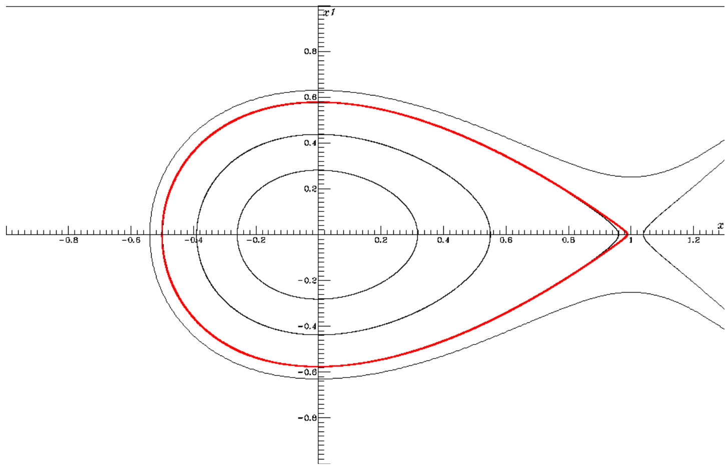
ir nekustīgi punkti $(0, 0)$ un $(1, 0)$. Noteiksim to tipu. Sistēmas (3.8) linearizācija punktā $(0, 0)$ dod

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1. \end{cases}$$

No šejienes seko, ka šis punkts ir centrs. Linearizācija punktā $(1, 0)$ dod

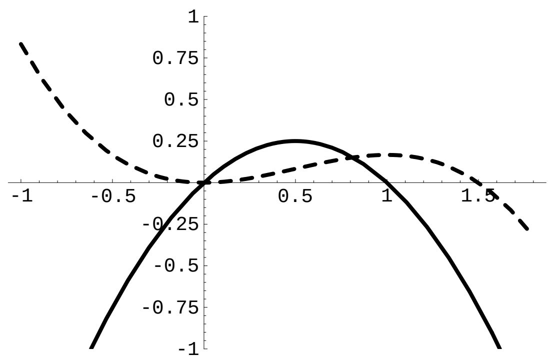
$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_1. \end{cases}$$

No šejienes seko, ka šis punkts ir sedlu punkts.



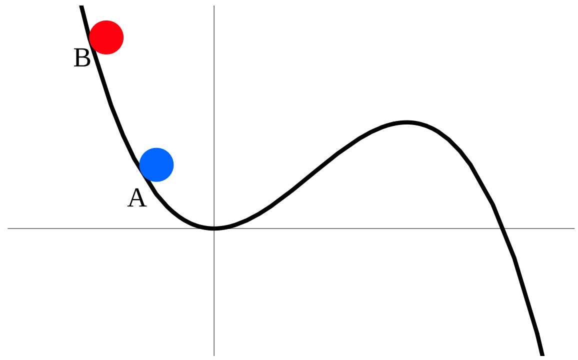
3.17. zīm. Sarkans - homoklinisks atrisinājums.

Ir iespējama sekojoša fāzes plaknes interpretācija. 3.18. zīmējumā attēlota funkcija $g(x) = x - x^2$ un tās primitīvā funkcija $G(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$.



3.18. zīm. Primitīvā funkcija $G(x)$ - punktēta.

Apskatīsim lodītes kustību pa līkni, kura uzdota ar funkcijas $G(x)$ grafiku un attēlota 3.19. zīmējumā. Šīs līknes maksimuma un minimuma punkti atbilst funkcijas $g(x)$ nullēm $x = 0$ un $x = 1$, jo $G'(x) = g(x)$. Ja lodīte atrodas punktā A ar nulles sākuma ātrumu ($x'(0) = 0$), tad tās enerģijas nepietiks, lai tiktu ārā no bedrītes un tā svārstīsies bedrītē, veidojot periodiskas kustības. Šīm periodiskām kustībām atbilst koncentriskas noslēgtas līknes, kuras atrodas fāzes plaknes apgabala, kurš tiek atzīmēts ar sarkanu, iekšā (3.17. zīm.).



3.19. zīm.

Ja lodīte atrodas punktā B ar nulles sākuma ātrumu ($x'(0) = 0$), tad tās enerğijas pietiks, lai tiktu ārā no bedrītes un sākt virzīties pa labo pakalni. Tādai periodiskai kustībai atbilst fāzes trajektorijas, kuras aiziet bezgalībā aiz fāzes plaknes ierobežota apgabala, kurš apzīmēts ar sarkano, robežām (3.17. zīm.).

Eksistē lodītes īpašais novietojums kreisajā pakalnē, kad tās enerğijas tik tikko pietiek tam, lai lēni, bezgalīgi ilgā laikā, tiktu virsotnē ($x = 1$). Atbilstošo atrisinājumu sauc par *homoklinisku*, jo tā fāzes trajektorija (3.17. zīm. attēlota ar sarkanu) iziet (ja $t = -\infty$) un ieiet (ja $t = +\infty$) vienā un tājā pašā nekustīgā punktā $(1, 0)$.

3.3. Kubiskā nelinearitāte

Apskatīsim nelineāru vienādojumu

$$x'' + x - x^3 = 0. \tag{3.9}$$

Funkcija $g(x) = x - x^3$. Enerğijas nezūdamības likums (3.5) izskatās šādi

$$x'^2 + x^2 - \frac{1}{2}x^4 = E. \tag{3.10}$$

Vienādojuma (3.9) ekvivalentai sistēmai

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = -x_1 + x_1^3 \end{cases} \tag{3.11}$$

ir stacionāri punkti $(-1, 0)$, $(0, 0)$ un $(1, 0)$. Noteiksim to tipu. Sistēmas (3.11) linearizācija punktā $(0, 0)$ dod

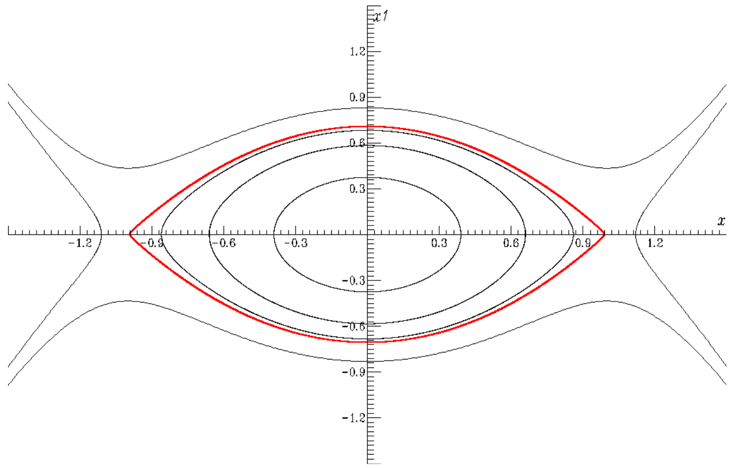
$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1. \end{cases}$$

Tādēļ punkts $(0, 0)$ ir centrs. Linearizācija punktos $(-1, 0)$ un $(1, 0)$ dod

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = 2y_1. \end{cases}$$

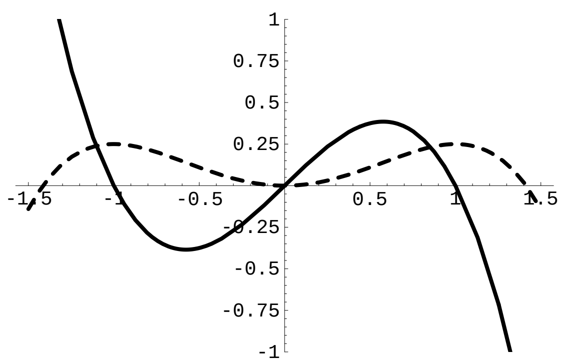
Abi šie punkti ir sedlu punkti.

3.20. zīmējumā ir parādītas dažas fāzes līknes.



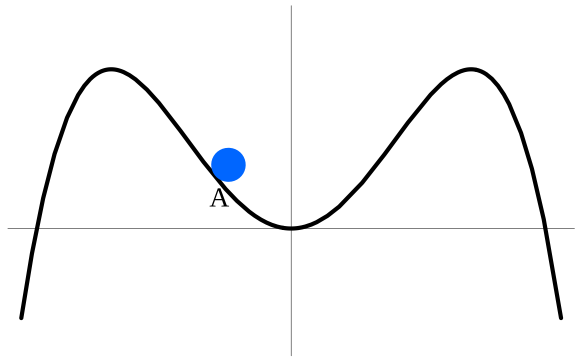
3.20. zīm. Ar sarkanu - divi simetriski heteroklīniski atrisinājumi.

Pēc analoģijas ar iepriekšējo arī šeit ir iespējama fāzes plaknes interpretācija. 3.21. zīmējumā parādīta funkcija $g(x) = x - x^3$ un tās primitīvā funkcija $G(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4$.



3.21. zīm. Primitīvā funkcija $G(x)$ - punktēta.

Apskatīsim lodītes kustību pa līkni, kura uzdota ar funkcijas $G(x)$ grafiku un attēlota 3.22. zīmējumā. Šīs līknes vienīgais minimuma punkts un divi maksimuma punkti atbilst funkcijas $g(x)$ nullēm $x = 0$, $x = -1$ un $x = 1$, jo $G'(x) = g(x)$. Ja lodīte atrodas punktā A ar nulles sākuma ātrumu ($x'(0) = 0$), tad tās enerģijas nepietiks, lai tiktu ārā no bedrītes un tā svārstīsies bedrītē, veidojot periodiskas kustības. Šīm periodiskām kustībām atbilst koncentriskas noslēgtas līknes, kuras atrodas fāzes plaknes apgabala, kurš tiek atzīmēts ar sarkanu, iekšā (3.20. zīm.).



3.22. zīm.

Ja lodīte atrodas ārpus bedrītes, tad tā sāk ripot atbilstošajā virzienā. Šīs kustības nav periodiskas, un tās aprakstošas fāzes trajektorijas ir nenoslēgtas līnijas, kuras atrodas ārpus 3.20. zīmējumā fāzes plaknē ierobežota apgabala, kurš atzīmēts ar sarkanu.

Ja lodīte atrodas bezgalīgi tuvu vienai no virsotnēm bedrītes iekšā, tad tā sāk ripot un bezgalīgi ilgā laikā virzīsies uz citu virsotni. Divus atbilstošos atrisinājumus sauc par *heterokliniskiem* un to fāzes trajektorijas (3.20. zīm. attēlotas ar sarkanu) iziet (ja $t = -\infty$) un ieiet (ja $t = +\infty$) dažādos stacionāros punktos - sedlu punktos ($(-1, 0)$ un $(1, 0)$).

Apskatīsim vienādojumu

$$x'' - x + x^3 = 0. \tag{3.12}$$

Funkcija $g(x) = -x + x^3$. Enerģijas nezūdamības likums (3.5) izskatās šādi

$$x'^2 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 = E. \tag{3.13}$$

Vienādojuma (3.12) ekvivalentai sistēmai

$$\begin{cases} x_1' = x_2, \\ x_2' = x_1 - x_1^3 \end{cases} \tag{3.14}$$

ir tie paši stacionāri punkti $(-1, 0)$, $(0, 0)$ un $(1, 0)$, kas ir arī sistēmai (3.11). Sistēmas (3.14) linearizācija punktā $(0, 0)$ dod

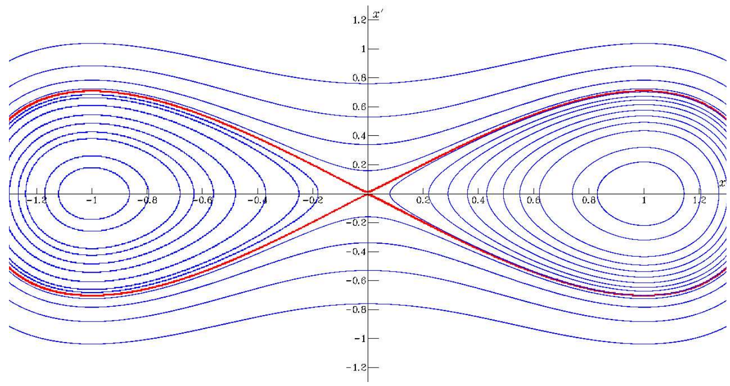
$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = y_1. \end{cases}$$

Tādēļ punkts $(0, 0)$ ir sedlu punkts. Linearizācija punktos $(-1, 0)$ un $(1, 0)$ dod

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -2y_1. \end{cases}$$

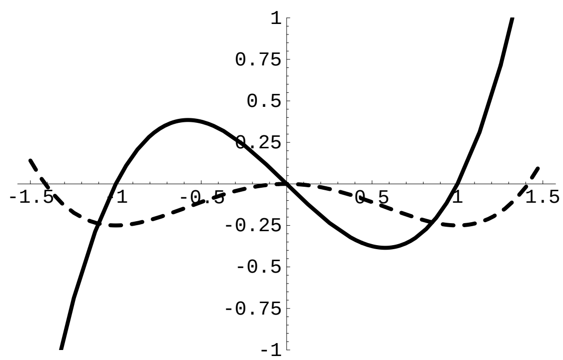
Tādēļ šie punkti ir centri.

3.23. zīmējumā parādītas dažas fāzes līknes.



3.23. zīm. Sarkani - divi simetriski homokliniski atrisinājumi.

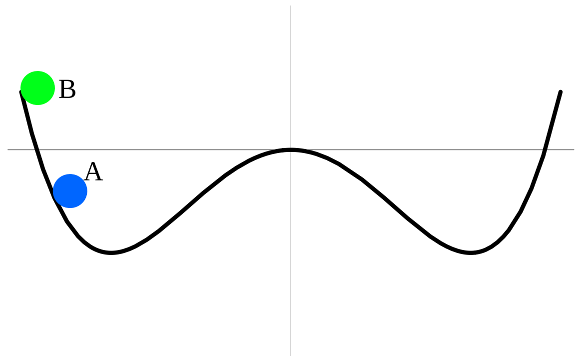
3.24. zīmējumā parādītas funkcija $g(x) = -x + x^3$ un tās primitīvā funkcija $G(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$.



3.24. zīm. Primitīvā funkcija $G(x)$ - punktēta.

Apskatīsim lodītes kustību pa līkni, kura uzdota ar funkcijas $G(x)$ grafiku un attēlota 3.25. zīmējumā. Šīs līknes vienīgais maksimuma punkts un divi minimuma punkti atbilst funkcijas $g(x)$ nullēm $x = 0$, $x = -1$ un $x = 1$.

Ja lodīte atrodas punktā B ar nulles sākuma ātrumu, tad enerģijas pietiks, lai ripotu pa abām bedrītēm, uzkāpt tajā pašā augstumā, no kura kustība sākās, un sākt ripot pretējā virzienā. Tādā veidā notiek periodiskas kustības pa abām bedrītēm. Šīm periodiskām kustībām atbilst noslēgtas līnijas, kas aptver visus trīs stacionārus punktus. Visa fāzes plakne aiz sarkanā astotnieka aizpildīta ar noslēgtām trajektorijām. Sarkano astotnieku veido divi homokliniski atrisinājumi, kuru fāzes trajektorijas sākas (ja $t = -\infty$) un beidzas (ja $t = +\infty$) stacionārā punktā $(0, 0)$.



3.25. zīm.

4. Atrisinājumi

4.1. vingrinājums.

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

$$M \cdot M^{-1} = E$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} m_{11} & + & m_{21} & = & 1 \\ m_{11} & - & m_{21} & = & 0 \\ m_{12} & + & m_{22} & = & 0 \\ m_{12} & - & m_{22} & = & -1 \end{cases}$$

Tātad

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

4.2. vingrinājums.

$$AX = A(MY) = AMY \Rightarrow MY' = AMY \Rightarrow Y' = M^{-1}AMY.$$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, tad $M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,

Ņemot vērā, ka $M^{-1}AM = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, sistēmu (1.5) var pierakstīt mainīgo (y_1, y_2) formā:

$$\begin{cases} y_1' & = & 2y_1 + y_2, \\ y_2' & = & 2y_2 \end{cases}$$

vai vektoru formā $Y' = BY$, kur $Y = col\,(y_1, y_2)$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

4.3. vingrinājums. Piemēram, matrica $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

4.4. vingrinājums. Sistēmas A matrica ir

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tā ir pirmā kanoniskā forma. Ņemot vērā, ka $2 > 1 > 0$, tad stacionāra punkta tips ir nestabils mezgls.

4.5. vingrinājums.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Tā ir pirmā kanoniskā forma. Ņemot vērā, ka $0 > -1 > -2$, tad stacionāra punkta tips ir stabils mezgls.

4.6. vingrinājums.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tā ir pirmā kanoniskā forma. Ņemot vērā, ka $1 > 0 > -1$, tad stacionāra punkta tips ir sedlu punkts.

4.7. vingrinājums.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tā ir otrā kanoniskā forma. Ņemot vērā, ka $1 > 0$, tad stacionāra punkta tips ir nestabils dekritisks mezgls.

4.8. vingrinājums.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tā ir otrā kanoniskā forma. Ņemot vērā, ka $-1 < 0$, tad stacionāra punkta tips ir stabils dikritisks mezgls.

4.9. vingrinājums.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tā ir trešā kanoniskā forma. Ņemot vērā, ka $\lambda_0 = 1$, tad stacionāra punkta tips ir nestabils değenerēts mezgls.

4.10. vingrinājums.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Tā ir trešā kanoniskā forma. Ņemot vērā, ka $\lambda_0 = -1$, tad stacionāra punkta tips ir stabils değenerēts mezgls.

4.11. vingrinājums.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Tā ir ceturtā kanoniskā forma. Ņemot vērā, ka $\alpha = -1$, tad stacionāra punkta tips ir stabils fokuss.

4.12. vingrinājums.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

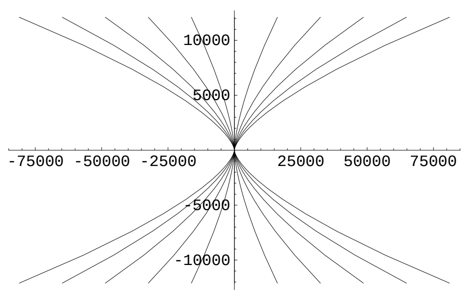
Tā ir ceturtā kanoniskā forma. Ņemot vērā, ka $\alpha = 0$, tad stacionāra punkta tips ir centrs.

4.13. vingrinājums.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Tā ir pirmā kanoniskā forma. Ņemot vērā, ka $3 > 2 > 0$, tad stacionāra punkta tips ir nestabils mezgls.

$$x_1 = Cx_2^{\frac{3}{2}}$$



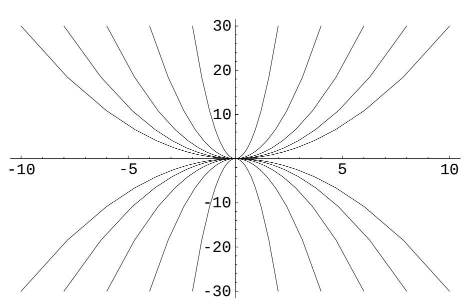
4.26. zīm.

4.14. vingrinājums.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Tā ir pirmā kanoniskā forma. Ņemot vērā, ka $0 > -2 > -4$, tad stacionāra punkta tips ir stabils mezgls.

$$x_1 = Cx_2^{\frac{1}{2}}$$



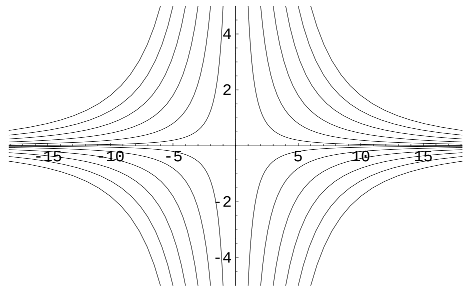
4.27. zīm.

4.15. vingrinājums.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Tā ir pirmā kanoniskā forma. Ņemot vērā, ka $2 > 0 > -4$, tad stacionāra punkta tips ir sedlu punkts.

$$x_1 \cdot x_2^{\frac{3}{2}} = C$$



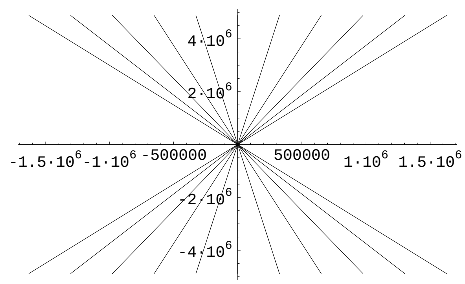
4.28. zīm.

4.16. vingrinājums.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Tā ir otrā kanoniskā forma. Ņemot vērā, ka $\lambda_0 = 4$, tad stacionāra punkta tips ir nestabils dikritisks mezgls.

$$x_1 = Cx_2$$



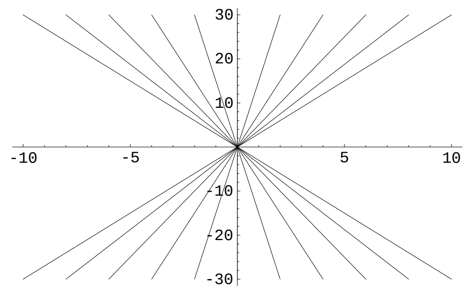
4.29. zīm.

4.17. vingrinājums.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Tā ir otrā kanoniskā forma. Ņemot vērā, ka $\lambda_0 = -2$, tad stacionāra punkta tips ir stabils dikritisks mezgls.

$$x_1 = Cx_2$$



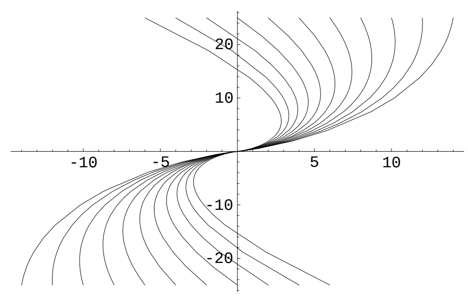
4.30. zīm.

4.18. vingrinājums.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Tā ir trešā kanoniskā forma. Ņemot vērā, ka $\lambda_0 = -2$, tad stacionāra punkta tips ir stabils deģenerēts mezgls.

$$x_1 = (C_1 + tC_2)e^{-2t}$$



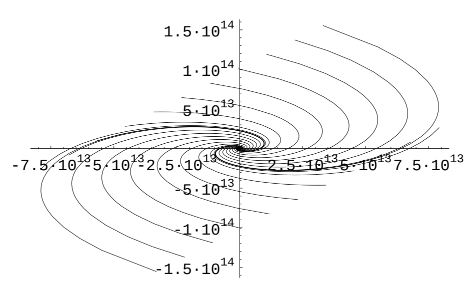
4.31. zīm.

4.19. vingrinājums.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Tā ir ceturtā kanoniskā forma. Ņemot vērā, ka $\alpha = 2$, tad stacionāra punkta tips ir nestabils fokuss.

$$\rho = C_1 e^{\alpha t},\ \varphi = \beta t + C_2$$



4.32. zīm.

4.20. vingrinājums.

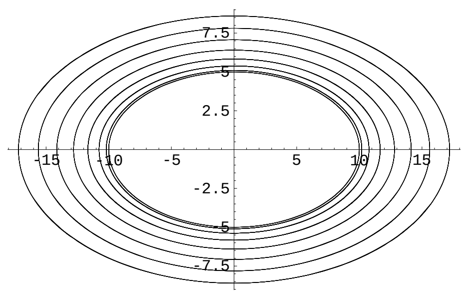
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tā ir ceturtā kanoniskā forma.

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Ņemot vērā, ka $\alpha = 0$, tad stacionāra punkta tips ir centrs.

$$\rho(t) = const$$



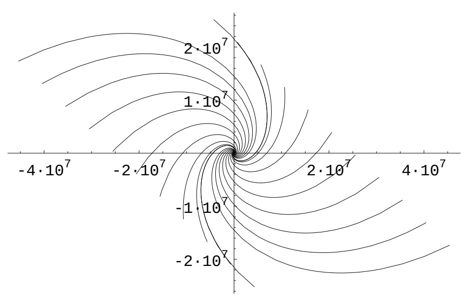
4.33. zīm.

4.21. vingrinājums.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Tā ir ceturtā kanoniskā forma. Ņemot vērā, ka $\alpha = 1$, tad stacionāra punkta tips ir nestabils fokuss.

$$\rho = C_1 e^{\alpha t},\ \varphi = \beta t + C_2$$



4.34. zīm.

4.22. vingrinājums. Sistēmas matrica ir $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

Raksturvienādojumam $\lambda^2 - 6\lambda + 6 = 0$ ir divas saknes: $\lambda_1 = 3 + \sqrt{3}$ un $\lambda_2 = 3 - \sqrt{3}$

Kanoniska matrica ir

$$J = \begin{pmatrix} 3+\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 3+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Sistēmu var pierakstīt kanoniskā formā

$$\begin{cases} y_1' &= (3+\sqrt{3})y_1, \\ y_2' &= (3-\sqrt{3})y_2. \end{cases}$$

Stacionāra punkta tips ir nestabils mezgls.

4.23. vingrinājums. Sistēmu var pierakstīt kanoniskā formā

$$\begin{cases} y_1' &= -2y_2, \\ y_2' &= 2y_1. \end{cases}$$

Stacionāra punkta tips ir centrs.

4.24. vingrinājums. Sistēmu var pierakstīt kanoniskā formā

$$\begin{cases} y_1' &= -y_1, \\ y_2' &= -3y_2. \end{cases}$$

Stacionāra punkta tips ir stabils mezgls.

4.25. vingrinājums. Sistēmu var pierakstīt kanoniskā formā

$$\begin{cases} y_1' &= 0.1y_1, \\ y_2' &= -0.4y_2. \end{cases}$$

Stacionāra punkta tips ir sedlu punkts.

4.26. vingrinājums. Sistēmu var pierakstīt kanoniskā formā

$$\begin{cases} y_1' &= 2+2\sqrt{2}y_1, \\ y_2' &= 2-2\sqrt{2}y_2. \end{cases}$$

Stacionāra punkta tips ir sedlu punkts.

4.27. vingrinājums. Sistēmu var pierakstīt kanoniskā formā

$$\begin{cases} y_1' &= 2y_1, \\ y_2' &= 2y_2. \end{cases}$$

Stacionāra punkta tips ir nestabils dikritisks mezgls.

4.28. vingrinājums. Sistēmu var pierakstīt kanoniskā formā

$$\begin{cases} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_1. \end{cases}$$

Stacionāra punkta tips ir centrs.

4.29. vingrinājums. Sistēmu var pierakstīt kanoniskā formā

$$\begin{cases} y_1' = \frac{1+\sqrt{5}}{2} y_1, \\ y_2' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} y_2. \end{cases}$$

Stacionāra punkta tips ir sedlu punkts.

4.30. vingrinājums. Sistēmu var pierakstīt kanoniskā formā

$$\begin{cases} y_1' = y_1, \\ y_2' = -y_2. \end{cases}$$

Stacionāra punkta tips ir sedlu punkts.

4.31. vingrinājums. Sistēmu var pierakstīt kanoniskā formā

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2, \\ y_2' = y_1 + 3y_2. \end{cases}$$

Stacionāra punkta tips ir nestabils fokuss.

4.32. vingrinājums. Sistēmu var pierakstīt kanoniskā formā

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1, \\ y_2' = 2y_2. \end{cases}$$

Stacionāra punkta tips ir nestabils mezgls.

4.33. vingrinājums. Sistēmu var pierakstīt kanoniskā formā

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 + y_2, \\ y_2' = 3y_2. \end{cases}$$

Stacionāra punkta tips ir nestabils değenerēts mezgls.

4.34. vingrinājums. Sistēmu var pierakstīt kanoniskā formā

$$\begin{cases} y_1' = 2y_1 - 2y_2, \\ y_2' = 2y_1 + 2y_2. \end{cases}$$

Stacionāra punkta tips ir nestabils fokuss.

4.35. vingrinājums. Sistēmu var pierakstīt kanoniskā formā

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1, \\ y_2' = 2y_2. \end{cases}$$

Stacionāra punkta tips ir nestabils mezgls.

4.36. vingrinājums.

$$\begin{aligned} f_{1x_1} &= (1+2x_1+x_2^2)|_{(0,0)} = 1 \\ f_{1x_2} &= 2x_1x_2)|_{(0,0)} = 0 \\ f_{2x_1} &= 0 \\ f_{2x_2} &= (1+\tfrac{3}{2}x_2^{\frac{1}{2}})|_{(0,0)} = 1 \end{aligned}$$

Sistēmas linearizācija punktā $(0,0)$ ir

$$\begin{cases} y_1' &= y_1, \\ y_2' &= y_2. \end{cases}$$

4.37. vingrinājums. Sistēmas linearizācija punktā $(0,0)$ ir

$$\begin{cases} y_1' &= 0, \\ y_2' &= y_2. \end{cases}$$

4.38. vingrinājums. Sistēmas linearizācija punktā $(0,0)$ ir

$$\begin{cases} y_1' &= 0, \\ y_2' &= -y_2. \end{cases}$$

4.39. vingrinājums. Sistēmas linearizācija punktā $(0,0)$ ir

$$\begin{cases} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= -y_1. \end{cases}$$

4.40. vingrinājums. Lai atrastu sistēmas stacionārus punktus, ir jāatrisina sistēma

$$\begin{cases} x_2 &= 0 \\ -x_1+x_1^3 &= 0 \end{cases}$$

Tātad ir 3 stacionāri punkti $(0,0)$, $(-1,0)$ un $(1,0)$.

Sistēmas linearizācija punktā $(0,0)$ ir

$$\begin{cases} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= -y_1. \end{cases}$$

Sistēmas linearizācija punktā $(\pm1,0)$ ir

$$\begin{cases} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= 2y_1. \end{cases}$$

4.41. vingrinājums. Sistēmas linearizācija punktā $(0,0)$ ir

$$\begin{cases} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= y_1. \end{cases}$$

Sistēmas linearizācija punktā $(\pm1,0)$ ir

$$\begin{cases} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= -2y_1. \end{cases}$$

4.42. vingrinājums. Piemēram,

$$\begin{cases} x_1' &= 4x_1 + 3x_2^2, \\ x_2' &= x_1^3 + x_2. \end{cases}$$

4.43. vingrinājums. Piemēram,

$$\begin{cases} x_1' &= -2x_1 + x_2^3, \\ x_2' &= x_1^2 - 5x_2. \end{cases}$$

4.44. vingrinājums. Piemēram,

$$\begin{cases} x_1' &= 2x_1 - 3x_2^2, \\ x_2' &= x_1^2 - 5x_2. \end{cases}$$

4.45. vingrinājums. Piemēram,

$$\begin{cases} x_1' &= 5x_1 + 3x_2^2, \\ x_2' &= -x_1^4 + 5x_2. \end{cases}$$

4.46. vingrinājums. Piemēram,

$$\begin{cases} x_1' &= 5x_1 + x_2^2, \\ x_2' &= -x_1^4 + 5x_2. \end{cases}$$

4.47. vingrinājums. Piemēram,

$$\begin{cases} x_1' &= 2x_1 - 3x_2 + x_1x_2^3, \\ x_2' &= 3x_1 + 2x_2. \end{cases}$$

4.48. vingrinājums. Piemēram,

$$\begin{cases} x_1' &= x_1^2 - 5x_2, \\ x_2' &= 5x_1 + x_1^3x_2. \end{cases}$$

Literatūra

[1] D. K. Arrowsmith and C. M. Place, *Ordinary Differential Equations: A Qualitative Approach with Applications* , Chapman & Hall, 1982. (Russian translation: Moscow, "Fizmatgiz", 1963)

[2] Д. Эрроусмит, К. Плейс, *Обыкновенные дифференциальные уравнения: Качественная теория с приложениями*, Мир, Москва, 1986.

[3] P. Blanchard, *Differential Equations*, Brooks Cole, 2006. ESF

[4] J.R. Brannan and W.E. Boyce, *Differential Equations: An Introduction to Modern Methods and Applications*, Wiley, 2007. ESF

[5] S. Čerāne, *Diferenciālvienādojumi*, 2001. Elektroniskais mācību materiāls: `http://rex.liis.lv/liis/prog/macmat.nsf`

[6] J. Reyn, *Phase Portraits of Planar Quadratic Systems*, Springer (Mathematics and Its Applications), 2007. ESF

[7] J.C. Robinson, *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Cambridge University Press, 2004. ESF

[8] А.Г. Курош, *Курс высшей алгебры*, Наука, Москва, 1968.

SATURS