DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE

Matemātikas katedra

Vjačeslavs Starcevs

MATEMĀTISKĀS ANALĪZES SĀKUMU ZINĀTNISKIE PAMATI
(izvēles tēmas)

2008

ANOTĀCIJA

Piedāvātie materiāli (izvēles tēmas) ir paredzēti matemātikas maģistrantiem semināru nodarbībām un studējošo patstāvīgam darbam.

Autors sirsnīgi pateicas DU Matemātikas katedras docentei A. Sondorei par ieguldīto lielo darbu materiāla rediģēšanā.

1. Robeža un nepārtrauktība

1.1. Robeža

1. Robežas jēdziens laika gaitā ir stipri mainījies, izsekot šīm izmaiņām var matemātiskās analīzes attīstības dažādos periodos.

Ar robežas jēdzienu cieši saistīts ir tāds svarīgs matemātiskās analīzes jēdziens, kā bezgalīgi mazs lielums. Jāatzīmē, ka matemātiskās analīzes attīstības pirmsākumos, robežas jēdziens pilnībā tika balstīts uz jēdziena “bezgalīgi mazs” izpratni. Savukārt “bezgalīgi mazs” ilgu laiku bija nepilnīgi izstrādāts jēdziens.

Jēdzienu “bezgalīgi mazs” saprata, kā lielumu, kurš nav nulle, tomēr pēc absolūtās vērtības ir mazāks par jebkuru pozitīvu skaitli. Šis termins tika skaidrots nevis ar dinamiskās, bet ar statiskās idejas palīdzību. Ar to tika saprasta norāde uz lieluma vērtību. Tas viss ir skaidrojams ar to, ka Ņūtons un Leibnics nesniedza diferenciālrēķinu un integrālrēķinu formāli loģisko pamatojumu. Iemesls bija grūtības precizā matemātiskā valodā aprakstīt “mainīgā” lieluma jēdzienu. Šī ideja tam laikam bija pārāk jauna un prasīja pietiekami augstu dialektisko domāšanu.

Ņūtons un Leibnics saprata jēdziena “bezgalīgi mazs” dinamisko un procesuālo saturu, tomēr nespēja līdz galam atbrīvoties no šī jēdziena statistiskās izskaidrošanas. Lai gan XVIII gadsimta sākumā, ar Ņūtona, Leibnica un viņu priekšgājēju pūlēm kopumā tika pabeigta diferenciālrēķinu un integrālrēķinu teorijas izveide, tomēr viens no pamatjēdzieniem - “bezgalīgi mazs” lielums - vēl palika neizskaidrots.

Ņūtons pirmais saprata, kas ir robežpāreja, un lai atbrīvotos no “bezgalīgi mazā” metafiziskā satura, mēģināja robežu metodi likt par pamatu savai “fluksiju metodei”. Bet, neskatoties uz to, ka Ņūtons saprata “bezgalīgi mazā” dinamisko raksturojumu, tomēr daudzos gadījumos viņš strādāja ar tiem, kā ar “aktuāli maziem” galīgiem lielumiem.

XVIII gadsimtā robežu teorijas attīstībā īpaša loma pieder Dalambēram, kurš, piekrītot Ņūtona robežu teorijai, apgalvoja, ka viens lielums ir cita lieluma robeža, ja šis otrais atrodas “pirmajam tuvāk par jebkuru doto lielumu, lai arī cik mazs nebūtu šis lielums”. Pie tam viņš uzskatīja, ka “lielums, kurš tuvojas, nevar būt lielāks par lielumu, kuram tuvojas”. Tātad, Dalambēra teorijā tika pieņemts, ka mainīgie ir monotoni, bet robežas - vienpusējās.

Lielas izmaiņas bezgalīgi mazā un robežas izpratnē notika XIX gadsimtā. Definējot bezgalīgi mazo, skaidri tika atspoguļots šī lieluma izmaiņas raksturs: bezgalīgi mazo saprata jau kā mainīgo, kura robeža ir vienāda ar nulli. Tas pirmām kārtām bija A. Košī nopelns, kurš bezgalīgi mazu uzskatīja nevis kā “aktuālo”, bet kā “potenciālo” bezgalīgi mazu, kurš vienmēr var vēl vairāk samazināties (pēc absolūtās vērtības). Jāatzīmē, ka bezgalība Košī izpratnē ir “potenciālā”, topošā bezgalība, tas ir mainīgais, kurš neierobežoti aug vai tuvojas nullei.

Tādā veidā, pārvarot mistiku, kura pirms tam bija raksturīga bezgalīgi mazā analīzei, un izklāstot savu robežu teoriju, A. Košī radīja bāzi loģiski pamatotai matemātiskās analīzes izveidošanai. Savās grāmatās Košī uz robežu teorijas pamata veido matemātisko analīzi, Košī matemātiskās analīzes teorija daudzviet saskan ar dažiem mūsdienu izklāstiem.

XIX gadsimta pirmajā pusē robežu teorija bija jau pietiekami noformēta. Tomēr pieauga prasības attiecībā pret matemātiskās zinātnes formalizāciju, piemēram, analīzes aritmetizācijas tendence XIX gadsimta otrajā pusē noveda pie robežas jēdziena definīcijas precizēšanas. Šajā periodā jau izteiksmi “$y \to b$” (y tiecas pie b), kur $y = f(x)$, uzskatīja par bezjēdzīgu, tai bija jēga tikai tad, kad “$x \to a$”. (Tātad “$y \to b$” tikai, ja “$x \to a$”). Pie tam “$|y - b|$ var būt pēc patikas mazs, ja $|x - a|$ ir pietiekami mazs”, vai, precīzāk, lai arī cik mazs nebūtu $\varepsilon > 0$, atradīsies tāds $\delta > 0$, ka nevienādība $|y - b| < \varepsilon$ izpildīsies katram x tādam, ka $|x - a| < \delta$.

Atšķirībā no XVIII gadsimta matemātiķiem, piemēram Dalambēra, kurš, definējot robežu, pamatojās uz intuitatīvu kustības ideju, kuru nevarēja iekļaut formālas zinātnes ietvaros, XIX gadsimta zinātniekiem izdevās definēt robežu ar “ε - δ” palīdzību. Rezultātā, intuitīvam priekšstatam par mainīgā tiekšanos uz robežu tika dota precīza matemātiskā jēga.

XX gadsimtā tika veikta nozīmīga robežas jēdziena vispārināšana. Metrisku un topoloģisku telpu izpēte deva precīzu skaidrojumu tādiem jēdzieniem, kā “apkārtne”, “nepārtrauktība” u.c. Robežpārejas vispārināšanas rezultātā tika izveidota kopējā mācība par robežu, kuru var pielietot dažādu struktūru kopām. Par izpētes objektu kļuva pati robežpārejas struktūra. Rezultātā parādījās “robeža pēc virziena” un “robeža pēc filtra”. Pirmā parādījās krievu matemātiķa S. Šatunovska, kā arī amerikāņu Mūra un Smita darbos (skat. [16], 3.3., 631. lpp.), bet otro pirmais piedāvāja franču matemātiķis A. Kartāns (skat. [7], 1. nod. 6.-7. paragrāfs).

Abas šīs robežu formas ir saistītas savā starpā un noved pie ekvivalentu konverģences teoriju konstrukcijas, tomēr tās ir pārāk vispārīgas, lai tuvākajā laikā “robežu pēc virziena” un “robežu pēc filtra” varētu rekomendēt skolu vajadzībām.

2. Robežpārejas, ar kurām nākas saskarties kā pašā matemātiskajā analīzē, tā arī tās dažādos pielikumos, vienmēr noved pie funkcijas (attēlojuma) robežas. Pie tam matemātiskajā analīzē funkcijas robežas jēdziens ir sastopams dažādās formās (virknes robeža, funkcijas robeža, kad arguments tiecas uz galīgu skaitli vai bezgalību funkcijas bezgalīgas robežvērtības u.c.), no tām skolas kursā sastopami tikai divi konkrēti pamatveidi: virknes (x_n) robeža, kad $n \to \infty$ $(x_n \in \mathbb{R})$, un funkcijas $f(x)$ robeža, kad $x \to a$ $(f : R \to R,\ a \in \mathbb{R})$.

Šie divi pamatveidi būtiski atšķiras viens no otra ar argumenta uzvedību. Ja pirmajā gadījumā arguments neierobežoti aug, pieņemot tikai naturālās vērtības, tad otrajā arguments pieņem, vispārīgi runājot, jebkuru reālo skaitļu kopas vērtību no kāda intervāla un tiecas uz galīgu robežu a. Atzīmēsim, ka tieši šajā vietā skolēniem rodas grūtības matemātiskās analīzes sākumu apguvē, jo viņiem ir grūti saskatīt šo divu robežas pamatveidu kopējās iezīmes.

Apskatīsim šo jautājumu sīkāk. Piedāvāsim šādas augstāk pieminēto robežu definīcijas:

1. skaitli b sauc par virknes (x_n) robežu, kad n neierobežoti aug, ja katram pozitīvam ε eksistē tāds naturāls skaitlis N, ka visiem $n > N$ izpildās nevienādība $|x_n - b| < \varepsilon$ (nosacīti nosauksim to par “$\varepsilon - N$” definīciju);

2. skaitli b sauc par funkcijas $f(x)$ robežu punktā a (jeb pie $x \to a$), ja katram pozitīvam ε eksistē tāds pozitīvs skaitlis δ, ka visiem $x \neq a$, kuri pieder funkcijas definīcijas apgabalam un kuri apmierina nevienādību $|x - a| < \delta$, izpildās nevienādība $|f(x) - b| < \varepsilon$ (nosacīti nosauksim to par “$\varepsilon - \delta$” definīciju).

Ja šīs definīcijas apskata, izmantojot jēdzienu “punkta apkārtne”, tad kļūst skaidrs, ka tās ir funkcijas robežas jēdziena apakšgadījumi. Tiešām, saskaņā ar otru definīciju, katram $\varepsilon > 0$ atradīsies $\delta > 0$ tāds, ka nevienādībai $|f(x) - b| < \varepsilon$ jāizpildās visiem $x \in D(f)$ un pie tam pieder punkta a izdurtai δ - apkārtnei, t.i. tiem x, kuri iekļaujas kopā $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$. Tātad, b sauc par funkcijas $f(x)$ robežu punktā a, ja katram $\varepsilon > 0$ eksistē tāda apkārtne $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$, ka visiem $x \in D(f) \bigcap \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ izpildīsies sakarība $f(x) \in U(b, \varepsilon)$.

Tas pats konstatējams arī pirmajā definīcijā. Dota virkne (x_n) vai funkcija $f(n)$, kurai $D(f) = \mathbb{N}$; tad saskaņā ar pirmo definīciju, katram $\varepsilon > 0$ atradīsies tāds naturāls skaitlis N, ka nevienādībai $|f(n) - b| < \varepsilon$ jāizpildās pie visiem $n > N$, t.i. visiem $n \in D(f) = \mathbb{N}$, kuri iekļaujas izdurtajā "plus bezgalības" N - apkārtnē, t.i. $\overset{\circ}{U}(+\infty, N)$. Tātad, b sauc par virknes (x_n) vai $f(n)$ robežu, ja katram $\varepsilon > 0$ eksistē tāda apkārtne $\overset{\circ}{U}(+\infty, N)$, ka visiem $n \in \mathbb{N} \bigcap \overset{\circ}{U}(+\infty, N)$ izpildīsies $f(n) \in U(b, \varepsilon)$.

Nav grūti saskatīt, ka gan pirmā, gan otrā funkcijas robežas definīcijas ir formā, kura aprakstīta "apkārtņu valodā". Apskatīsim šo formu, kura aptver visus matemātiskajā analīzē iespējamos robežpārejas veidus (vēl viena redakcija).

Pieņemsim, ka ir dota kopa $X \subseteq \mathbb{R}$, attēlojums (funkcija) $f : X \to \mathbb{R}$ ar definīcijas apgabalu $D(f) = X$ un a - kopas X akumulācijas punkts. Tad punktu $b \in \mathbb{R}$ sauc par funkcijas f robežu punktā $a \in \overline{\mathbb{R}}$, ja katrai apkārtnei $U(b)$ eksistē tāda apkārtne $U(a)$, ka visiem $x \in X \bigcap \overset{\circ}{U}(a)$ izpildās $f(x) \in U(b)$. Citiem vārdiem sakot, punktu $b \in \mathbb{R}$ sauc par funkcijas f robežu punktā $a \in \overline{\mathbb{R}}$, ja katrai apkārtnei $U(b)$ eksistē tāda apkārtne $U(a)$, ka $f(X \bigcap \overset{\circ}{U}(a)) \subset U(b)$.

Atzīmēsim, ka punkts a var nepiederēt kopai X un var būt bezgalība.

3. Matemātiskajā analīzē, veidojot robežu teoriju, rodas nepieciešamība unificēt visu iespējamo veidu un formu robežpārejas. Atzīmēsim divus robežu teorijas veidošanas pamatceļus. Saskaņā ar pirmo, visas robežas formas tiek iegūtas, izmantojot vispārīgo definīciju. Saskaņā ar otro (skat. šī § 4. punktu) visas robežas formas reducējas uz visvienkāršāko gadījumu - virknes robežas definīciju.

Pirmais ceļš paredz robežas jēdziena diezgan vispārīgas definīcijas izveidi. Šajā gadījumā matemātiskās analīzes kursa ietvaros var norādīt divas koncepcijas, kuras noved pie ekvivalentām konverğences teorijām: "robeža pēc virziena" un "robeža pēc bāzes". Pēdējā ir precizēta, daļēji pat formalizēta shēma, kura aprakstīta "apkārtņu valodā".

Pirmajā tiek apskatīta kādas kopas netukšu apakškopu sakārtota sistēma ar tukšu šķēlumu. Šādas teorijas pamatā ir patvaļīga kopa ar tajā izdalītu virzienu un šajā kopā uzdotu funkciju, kurai arī tiek piekārtots robežas pēc virziena jēdziens.

Otrā, tā saucamā robeža pēc bāzes, ir Kartana idejas (tā ņemta par pamatu, ieviešot robežu pēc filtra) oriģināls pārveidojums.

3.1. Sākumā aprakstīsim robežas pēc virziena koncepciju. Pieņemsim, ka ir dota patvaļīga kopa $X \subseteq \mathbb{R}$ un sistēma S, kura sastāv no X apakškopām $A, B, \ldots$. Šo kopu sistēmu S sauc par virzienu kopā X, ja jebkurām divām kopām A un B no S ir spēkā viena no divām sakarībām: $A \subset B$ vai $B \subset A$, pie kam visu šādu kopu $A, B, \ldots$ šķēlums ir tukša kopa. Tāpat, pieņemsim, ka kopā X ir dots attēlojums (funkcija) $f : X \to Y$, kur $Y \subseteq \mathbb{R}$. Tad skaitli b sauc par funkcijas f robežu pēc virziena S, ja katram $\varepsilon > 0$ var atrast kopu $A \in S$, kuras visos punktos izpildīsies nevienādība $|f - b| < \varepsilon$. Robežas pēc virziena S apzīmējums $b = \lim\limits_{S} f$.

1. Pieņemsim, ka $X = \mathbb{N}$, kur $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$. Virziens tiek noteikts ar sistēmas S apakškopu A_n no $\mathbb{N}$ palīdzību, kur $A_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$ visiem $n = 1, 2, \ldots$. Acīmredzami, ka visiem $n \in \mathbb{N}$ izpildīsies $A_n \supset A_{n+1}$ un $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$. Šādu virzienu var apzīmēt "$n \to +\infty$" (vai "$n \to \infty$"). Šajā gadījumā funkcija $y = f(x)$ ir $f(n)$, tā ir kopas $Y \subset \mathbb{R}$ punktu $y_1, y_2, \ldots$ virkne. Tad, saskaņā ar vispārīgo definīciju, punkts $b \in \mathbb{R}$ ir virknes (y_n) robeža pēc virziena S (t.i., ja $n \to +\infty$), ja katram $\varepsilon > 0$ var norādīt kopu $A_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$, kuras katrā punktā izpildās $|y_n - b| < \varepsilon$. Ir acīmredzami, ka kopas A_n norādīšana ir ekvivalenta tāda numura N norādīšanai, ka visiem $n > N$ izpildās nevienādība $|y_n - b| < \varepsilon$.

2. Pieņemsim, ka $a < +\infty$ ir kopas $X \subseteq \mathbb{R}$ akumulācijas punkts. Noteiksim kopā X virzienu S (kuru apzīmēsim "$x \to a$") šādi: par virzienu kalpos kopas X punktu apakškopu, kuras pieder izdurtām apkātnēm $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$ ar rādiusu $\delta > 0$, sistēma, t.i. apakškopu $X \bigcap \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ sistēma.

   Apskatīsim funkciju $f : X \to Y$, tad skaitli $b \in \mathbb{R}$ sauc par funkcijas f robežu kad $x \to a$, ja jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $\delta > 0$, ka visiem $x \in X \bigcap \overset{\circ}{U}(a, \delta)$ jeb $x \in X$ un $0 < |x - a| < \delta$, izpildās nevienādība $|f - b| < \varepsilon$.

3. Pieņemsim, ka $a \in \mathbb{R}$ un $X = \mathbb{R}_a^+ = \{x | x \in \mathbb{R}$ un $x \geq a\}$. Virzienu S noteiksim, kā visu apakškopu $A_\alpha \subset \mathbb{R}_a^+$, kur $A_\alpha = \{x | x \in \mathbb{R}_a^+$ un $x \geq \alpha\}$, sistēmu. Šo virzienu apzīmēsim "$x \to +\infty$".

   Tālāk, pieņemsim, ka funkcija f ir definēta visiem $x \geq a$ ar vērtībām kopā $Y \subseteq \mathbb{R}$, tad $b \in \mathbb{R}$ sauc par funkciju f robežu kad $x \to +\infty$, ja jebkuram $\varepsilon > 0$ var norādīt tādu kopu A_α (vai skaitli α), ka visiem $x \in A_\alpha$ jeb $x \geq \max\{\alpha, a\}$ izpildās nevienādība $|f - b| < \varepsilon$.

   Analoģiski, tiek noteikts virziens "$x \to -\infty$" uz reālās pusass $\mathbb{R}_a^- = \{x | x \in \mathbb{R}$ un $x \leq a\}$; un visbeidzot tiek noteikts virziens $x \to \infty$ ($|x| \to +\infty$), un tiek definēta robeža tādam virzienam.

1.1. piezīme. Arī citi robežpāreju veidi var tikt definēti ar robežas pēc virziena palīdzību.

Košī pazīme ir nepieciešamais un pietiekamais attēlojuma (funkcijas) robežas eksistēšanas nosacījums:

Attēlojumam $f : X \to Y$, kur $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, eksistē robeža pēc virziena S tad un tikai tad, kad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāda kopa $A \in S$, ka visiem $x' \in A$ un $x'' \in A$ izpildās nevienādība $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. (skat. [18], 130.-131. lpp.)

3.2. Apskatīsim funkcijas robežas pēc bāzes koncepciju.

Kā zināms, matemātiskajā analīzē tiek noteiktas funkcijas robežas kopīgās īpašības: ierobežotība un zīmes nemainība punkta kādā izdurtajā apkārtnē, algebriskās operācijas, robežpāreja nevienādībās. Nav grūti pamanīt, ka pierādot šīs īpašības, izmantotas tikai divas prasības par izdurtām apkārtnēm: prasība, lai izdurtā apkārtne būtu netukša un prasība, ka jebkuru divu dotā punkta izdurto apkārtņu šķēlums arī ir šī punkta izdurtā apkārtne. Tas dod iespēju izveidot robežas definīciju, izmantojot tādu matemātisko objektu, kuru sauc par "bāzi".

Sistēmu $\{B\}$, kura sastāv no kopas X apakškopām B, sauc par kopas X bāzi, ja izpildās šādi nosacījumi:

1. visi elementi $B \in \{B\}$ ir netukšas kopas;
2. jebkurām divām kopām $B_1, B_2 \in \{B\}$ eksistē tāds elements $B \in \{B\}$, ka $B \subset B_1 \bigcap B_2$, t.i. jebkuru divu elementu no $\{B\}$ šķēlums satur kādu elementu no $\{B\}$.

Minēsim matemātiskajā analīzē biežāk lietotās bāzes.

1. Pieņemsim, ka attēlojums f definēts kopā $X = \mathbb{N}$, t.i. f ir kaut kāda virkne (y_n) un $\overset{\circ}{U}(+\infty)$ ir bezgalības izdurtā apkārtne. Tad bāzes $\{B\}$ elementi ir kopas
$$B = \mathbb{N} \bigcap \overset{\circ}{U}(+\infty) = \{n | n \in \mathbb{N} \cap (N_1, +\infty)\},$$
t.i., kopas, kas sastāv no visiem tiem naturāliem skaitļiem, kuri ir lielāki par kādu naturālu N_1. Šeit, kā redzams, ir izpildīti abi bāzes definīcijas nosacījumi. Tādu bāzi pieņemts apzīmēt "$n \to +\infty$".
2. Pieņemsim, ka attēlojums f definēts kopā $X \subseteq \mathbb{R}$, $a < +\infty$ ir kopas X akumulācijas punkts, bet $\overset{\circ}{U}(a)$ - punkta a izdurtā apkārtne. Bāzes $\{B\}$ elementi ir kopas $B = X \bigcap \overset{\circ}{U}(a)$. Kā redzams, sistēmai $\{B\}$ ir izpildīti abi bāzes definīcijas nosacījumi. Tādu bāzi pieņemts apzīmēt "$x \to a$" (šeit $\overset{\circ}{U}(+\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ x > O, a > 0\}$).
3. Pieņemsim, ka attēlojums f definēts kopā $X \subseteq \mathbb{R}$, kurai eksistē vismaz viens elements ārpus jebkura nogriežņa ar centru koordinātu sākumpunktā. Bāzes $\{B\}$ elementi ir kopas $B = X \bigcap \overset{\circ}{U}(\infty)$. Tādu bāzi pieņemts apzīmēt "$x \to \infty$" (šeit $\overset{\circ}{U}(\infty) = \{x \in R : \ |x| > a, \ a > 0\}$).

Pieņemsim, ka $f : X \to \mathbb{R}$ un $\{B\}$ - bāze kopā $X \subseteq \mathbb{R}$. Tad skaitli b, $b \in \mathbb{R}$ sauc par funkcijas f robežu pēc bāzes $\{B\}$, ja jebkurai apkārtnei $U(b)$ atradīsies tāds bāzes elements $B \in \{B\}$, kura attēls $f(B)$ iekļaujas apkārtnē $U(b)$. Apzīmējums: $b = \lim\limits_{\{B\}} f$.

Matemātiskajā analīzē visi zināmie funkcijas robežas veidi tiek aptverti ar šo robežas definīciju pēc bāzes.

Atbilde uz jautājumu, vai eksistē funkcijas robeža pēc bāzes, tiek dota Košī pazīmes nepieciešamajos un pietiekamajos nosacījumos. Par funkcijas $f : X \to \mathbb{R}$ svārstību $\omega(f, X)$ kopā $X \subseteq \mathbb{R}$, sauc starpību $M_X - m_X$, kur $M_X = \sup\{f(x) | x \in X\}$ un $m_X = \inf\{f(x) | x \in X\}$. Nav grūti pamanīt, ka $\omega(f, X)$ ir funkcijas $f(x)$ vērtību starpības moduļa suprēma visiem iespējamiem punktu pāriem, kuri pieder kopai X, t.i. $\omega(f, X) = \sup\limits_{x_1, x_2 \in X} |f(x_1) - f(x_2)|$. Funkcijas robežas eksistences Košī pazīme ir šāda:

funkcijai $f : X \to \mathbb{R}$ eksistē robeža pēc bāzes $\{B\}$ kopā X tad un tikai tad, kad jebkuram $\varepsilon > 0$ atradīsies tāds bāzes elements $B \in \{B\}$, kurā funkcijas $f(x)$ svārstība mazāka par ε (skat. [8], 1.3., 141.-142. lpp.).

4. Atgriezīsimies pie otrā robežu teorijas pamatceļa, saskaņā ar kuru, sākumā tiek labi izpētīta virknes robežas teorija, tad funkcijas robeža galīgā un bezgalīgā punktā, un tikai pēc tam tiek definēti citi robežu veidi, izmantojot "virknes valodu". Tādā veidā uz virknes robežas jēdziena pamata tiek veidots vispārīgāks jēdziens - patvaļīga argumenta funkcijas robežas jēdziens.

Tātad, pamatojoties uz virknes (x_n) robežas jēdzienu, tiek izveidots funkcijas robežas jēdziens (definīcija pēc Heines).

Pieņemsim, ka dota kopa $X \subseteq \mathbb{R}$, attēlojums f definēts kopā X, t.i. $D(f) = X$, un a - kopas X akumulācijas punkts, kurš var arī nepiederēt kopai X. Pieņemsim, ka ir dota patvaļīga virkne no X, kura konverģē uz punktu a, pie kam $x_n \neq a$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Šī virkne (x_n) nosaka otru virkni $(f(x_n))$, kura pie jebkuras (x_n) izvēles var būt konverģenta, bet varbūt arī pie vienas izvēles (x_n) varbūt konverģenta, pie citas izvēles - diverģenta; un, visbeidzot, pie jebkuras (x_n) izvēles var būt diverģenta. Interesi izraisa pirmais gadījums: ja patvaļīgai virknei $(x_n) \subset X$, kura konverģē uz a, kur $x_n \neq a$ $(n = 1, 2, \ldots)$, atbilstošā virkne $(f(x_n))$ konverģē uz $b \in \mathbb{R}$, tad b sauc par funkcijas f robežu punktā a.

Attiecībā uz a, kurš netiek ņemts vērā, (x_n) konverģences gadījumā jāpasaka sekojošais: mūs interesē nevis f vērtība punktā a, bet šīs funkcijas uzvedība, kad arguments atrodas pietiekami tuvu punktam a. Pašā punktā a funkcija f var nebūt definēta, kaut gan funkcijas robeža punktā a var eksistēt, piemēram $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Tādā veidā funkcijas f robeža punktā a apraksta funkcijas uzvedību, kad arguments atrodas pietiekami tuvu punktam a.

Analoģiski, "virknes valodā" tiek veidoti arī tādi jēdzieni, kā funkcijas robeža bezgalīgi tālā punktā, funkcijas robeža ir bezgalīga, un, visbeidzot, funkcijas vienpusējas robežas patvaļīgā punktā.

Tikko apskatītā funkcijas robežas definīcija pēc Heines, kā zināms no matemātiskās analīzes kursa, ir ekvivalenta definīcijai Košī formā, saskaņā ar kuru, $b \in \mathbb{R}$ sauc par funkcijas f robežu punktā a, kurš ir $D(f) \subseteq \mathbb{R}$ akumulācijas punkts, ja jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $\delta > 0$, ka visiem $x \in D(f)$ un kuri apmierina nevienādību $0 < |x - a| < \delta$, izpildās nevienādība $|f(x) - b| < \varepsilon$. Šo definīciju var viegli pārveidot par funkcijas robežas definīciju "apkārņu valodā" (skat. dotā paragrāfa 2. punktu).

5. Apgūstot robežu teoriju, svarīgu lomu spēlē robežpārejas operācijas izskaitļošanas mērķis. Jo, tur, kur robeža (piemēram, punktā a) sakrīt ar funkcijas vērtību šajā punktā $f(a)$, robežpārejas operācija neizraisa īpašu interesi, tāpēc ka analītiskā izteiksme, ar kuras palīdzību uzdota funkcija $f(x)$, pie $x = a$ nezaudē savu aritmētisko jēgu. Funkcijas vērtība šajā punktā var tikt izskaitļota vienkārši ievietojot skaitli a funkcijā $f(x)$ punkta x vietā. Gadījumā, kad minētā analītiskā izteiksme zaudē aritmētisko jēgu pie $x = a$, svarīgakais uzdevums ir funkcijas definēšana punktā a tā, lai tajā tā būtu nepārtraukta. Šajā gadījumā robežpārejas operācija arī būs līdzeklis, t.i. analītiskais aparāts, ar kura palīdzību argumentam x tiek uzdota atbilstoša funkcijas $f(x)$ vērtība.

1.2. piezīme. Veidojot virknes robežas teoriju, parasti uzreiz sāk ar definīciju "$\varepsilon - N$" formā. Taču pie šīs definīcijas var nonākt arī pakāpeniski. Vispirms tiek apskatītas skaitliskās virknes, kurām ir akumulācijas punkti. Saskaņā ar Bolcano - Veierštrāsa teorēmu, izdala tādu ierobežotu virkņu klasi, kurām obligāti eksistē vismaz viens akumulācijas punkts. No šīs ierobežoto virkņu klases izdala tādu ierobežotu virkņu apakšklasi, kurām eksistē tikai viens akumulācijas punkts un šim punktam katrs atbilstošās virknes loceklis kalpo kā tuvināts pārstāvis. Tādas virknes sauc par konverģentām, bet to vienīgo akumulācijas punktu par robežu. Tātad, skaitli b sauc par virknes (x_n) robežu, ja šī virkne ir ierobežota un b ir tās vienīgais akumulācijas punkts. Tālāk ir viegli konstatēt, ka virknei, kura konverģē uz b piemīt "$\varepsilon - N$" īpašība un otrādi, no "$\varepsilon - N$" īpašības virknei (x_n) un skaitlim b seko virknes (x_n) konverģence uz b. Tāpēc šī "$\varepsilon - N$" īpašība tiek ņemta par otro (ekvivalentu pirmajai) virknes robežas definīciju.

1.3. piezīme. Apskatīsim vēl vienu praksē bieži vien sastopamu robežu teorijas veidošanas shēmu: sākumā definē "bezgalīgi mazo" lielumu, pēc tam funkcijas robežu definē, izmantojot jēdzienu "bezgalīgi mazs". Šī shēma atspoguļo matemātiskās analīzes attīstības vēsturisko gaitu. Tomēr var minēt vairākus iebildumus par šīs shēmas lietošanu: pirmkārt, robežas jēdzienam tiek atvēlēta sekundāra loma; otrkārt, skolēnu uzmanība tiek pievērsta, galvenokārt, bezgalīgi mazā jēdzienam un tā īpašībām, nevis robežas jēdzienam; treškārt, termins "bezgalīgi mazs", kurš arī matemātikas attīstības vēsturē ir radījis daudz pretrunu, atstāj hipnotizējošo iedarbību uz lielu skolēnu daļu, kuriem ir tieksme uztvert šo terminu aritmētiskajā nozīmē kā lieluma izmēru, nevis kā "lieluma izmaiņas raksturu".

1.4. piezīme. Nosakot skaitliskās virknes robežu pēc dotā pozitīvā ε tiek meklēts naturāls skaitlis $N(\varepsilon)$, kurš atkarīgs no ε. Bet pēc $\varepsilon > 0$ var norādīt ne tikai naturālo, bet arī reālo skaitli $\alpha \in \mathbb{R}$. Tāpēc virknes robežas definīcija izskatīsies šādi: skaitli b sauc par virknes (x_n) robežu, ja jebkuram reālam $\varepsilon > 0$ var norādīt tādu reālu skaitli $\alpha(\varepsilon)$, ka visām naturālām n vērtībām, kuras apmierina nosacījumu $n > \alpha(\varepsilon)$, izpildās nevienādība $|x_n - b| < \varepsilon$.

1.1. piemērs. Izmantojot virknes robežas definīciju, pierādīt, ka

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1.$$

Atrisinājums.

Ir jāpierāda, ka jebkuram $\varepsilon > 0$ atradīsies tāds reāls skaitlis $\alpha(\varepsilon)$, ka visiem $n > \alpha(\varepsilon)$ izpildās nevienādība $|x_n - 1| < \varepsilon$. Izvēlēsimies patvaļīgu $\varepsilon > 0$. Tā kā

$$|x_n - 1| = \left|\frac{n^2}{n^2+1} - 1\right| = \frac{1}{n^2+1},$$

tad, lai atrastu šādu α, jāatrisina nevienādība

$$\frac{1}{n^2+1} < \varepsilon.$$

No tās seko, ka $n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$, un par $\alpha(\varepsilon)$ var ņemt skaitli $\sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$.

Tātad, katram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds reāls skaitlis $\alpha(\varepsilon) = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$, ka visiem $n > \alpha(\varepsilon)$ (t.i., $n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$) izpildīsies nevienādība

$$\frac{1}{n^2+1} < \varepsilon \ \text{ un } \ |x_n - 1| < \varepsilon.$$

Atzīmēsim, ka parasti pēc izvēlētā $\varepsilon > 0$ meklē naturālu skaitli $N = N(\varepsilon)$, ka visiem $n > N$ izpildās nevienādība $|x_n - 1| < \varepsilon$. Apskatītajā piemērā par N var ņemt $\left[\sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}\right]$, t.i. izteiksmes $\sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$ veselo daļu.

1.5. piezīme. Skolas mācību līdzekļos "Algebra un analīzes elementi" par funkcijas robežu punktā pieņem definīciju Košī formā ("ε - δ" valodā). Atzīmēsim, ka tā nedaudz atšķiras no definīcijas, kura sastopama augstskolu matemātiskās analīzes mācību grāmatās.

Lieta ir tāda, ka vidusskolas līdzeklī "Algebra un analīzes elementi 9-10 klasē" galvenā prasība ir, lai nevienādība $|f(x) - b| < \varepsilon$ izpildītos visiem $x \neq a$, kas atrodas pietiekami tuvu pie a, t.i. visiem x, kuri apmierina nevienādību $0 < |x - a| < \delta$, kur $\delta > 0$ tiek meklēts pēc katra izvēlētā $\varepsilon > 0$.

Viegli saprast, ka, pie šādas funkcijas $f(x)$ robežas definīcijas un eksistences traktēšanas nepieciešams, lai funkcija būtu definēta punkta a kādas izdurtas divpusējas apkārtnes visos punktos.

Dažās matemātiskās analīzes rokasgrāmatās, tai skaitā arī jums piedāvātajā izklāstā, tiek pieprasīts, lai nevienādība $|f(x) - b| < \varepsilon$ izpildītos visiem tādiem

$x \in D(f) \bigcap \overset{\circ}{U}(a, \delta)$, citiem vārdiem sakot, visiem x, kuri apmierina nevienādību $0 < |x - a| < \delta$ un kuri pieder $D(f)$.

Rezultātā šī pieeja izrādās plašāka par to, kura pieņemta skolas mācību grāmatās. Tā, piemēram, funkcijai $f(x) = \sqrt{x}$ robeža punktā $a = 0$, saskaņā ar skolas definīciju, neeksistē, jo neeksistē tāda $a = 0$ divpusēja apkārtne, lai tās visos punktos funkcija $f(x) = \sqrt{x}$ būtu definēta. Augstskolas definīcijas ietvaros funkcijai $f(x) = \sqrt{x}$ punktā 0 eksistē robeža, tā ir vienāda ar nulli.

6. Kā bija atzīmēts 2. punktā, skolas matemātiskā analīze balstās uz diviem robežas jēdziena veidiem:

- virknes robeža;
- funkcijas robeža galīgā punktā.

Tas ir sarežģīts uzdevums - iepazīstināt skolēnus ar šiem diviem robežpārejas veidiem. Līdz ar to, radās sekojošas divas pozīcijas. Saskaņā ar pirmo, skolēniem tiek piedāvāts izskaidrot virknes un funkcijas robežas jēdzienus, izmantojot atbilstoši "ε - N" un "ε - δ" vai līdzīgas shēmas. Saskaņā ar otro, skolā tiek piedāvāts pilnīgi atteikties no mēģinājumiem izskaidrot robežas jēdzienu, uzskatot to kā pašu par sevi saprotamu.

Mēs uzskatām, ka abas šīs pozīcijas nav labākās.

"... skolas programmās neietilpst, - rakstīja A. Hinčins, - izstāstīt katra jēdziena attīstību līdz tā mūsdienu zinātniskajam izskaidrojumam, skola var apstāties arī uz iepriekšējās šī jēdziena attīstības stadijas".

Izcilais zinātnieks un pedagogs A. Hinčins savā grāmatā "Matemātiskās analīzes īsais kurss"(M., 1955), ko paredzēts izmantot universitāteēs un pedagoģiskajos institūtos, sākumā robežu teoriju veidoja uz elementārās bāzes, kas ir ne līdz galam formalizēta, sākumā sistemātiski tiek izmantoti tādi jēdzieni, ka "process" un "moments", nekur tos formāli nedefinējot, un tikai vēlāk, pārliecinot lasītājus tādas formalizācijas nepieciešamībā, definēja šo "procesu" galvenos matemātiskos tipus (skat. arī [17]).

A. Hinčina piedāvātā robežu teorijas veidošanas shēma izraisa noteiktu interesi. Ievērības cienīga robežu teorijas veidošanas shēma ir arī N. Luzina izcilajā mācību gramatā "Diferenciālrēķini" (M., 1949).

Balstoties uz izklāstītajiem apsvērumiem, varam ieteikt skolas kursā izvēlēties tādu funkcijas $f(x)$ robežas koncepciju, kura aptvertu abus iepriekš aprakstītos veidus un kurā argumenta izmaiņu procesa raksturojums paliktu ne līdz galam formalizēts. Tādējādi skolām var piedāvāt apskatīt robežas pēc "mainīgā x" jēdziena, apskatot to kādā konkrētā "mainīgā x izmaiņu procesā".

Apskatīto "procesu", kuru formālā struktūra var būt daudzveidīga, kopējā iezīme, ir šāda: "process" tiek noteikts ar daudziem viens otru nomainošiem "stāvokļiem" un ir kāda sakārtota mainīgā x vērtību kopa. Šo mainīgo x un ar to saistīto "procesu", kura katrs atsevišķs stāvoklis atbilst kāda mainīgā x vērtībai, var nosaukt par "mainīgā x izmaiņas procesu". Šim "mainīgā x izmaiņas procesam" ir nepieciešams, lai ir noteikts

- ka aiz katras mainīgā x vērtības eksistē nākamā vērtība;
- kādas vērtības mainīgais x pieņem "pirms" vai "pēc" jebkuras savas vērtības.

Izdalot no daudzveidīgajiem "mainīgo izmaiņas procesiem" to, kurā "mainīgais tiecas uz robežu", var pāriet pie šādas robežas definīcijas:

skaitli a sauc par mainīgā x robežu dotajā izmaiņas procesā, ja katram pozitīvam ε var norādīt tādu mainīgā x vērtību x', ka visām nākamām vērtībām x starpība starp x un a pēc absolūtās vērtības paliks mazāka par ε, tas ir $|x-a|<\varepsilon$.

Nav grūti parādīt, ka gan virknes robežas definīcija, gan funkcijas robežas definīcija iekļaujas piedāvātajā mainīgā robežas definēšanas shēmā.

Bezgalīga skaitļu virkne, kura ir naturālā argumenta funkcija, dotajā procesā var tikt uzskatīta, kā mainīgais "x_n", kura atsevišķi stāvokļi un šiem stāvokļiem atbilstošās mainīgā vērtības ir sanumurētas ar naturāliem skaitļiem n. Tad skaitli a sauc par mainīgā x_n robežu, ja katram pozitīvam ε var norādīt tādu x_n vērtību x_N, ka visām nākamām x_n vērtībām, kur $n>N$ starpība starp šīm vērtībām x_n un skaitli a pēc absolūtās vērtības paliks mazāka par ε, t.i. $|x_n-a|<\varepsilon$.

Pieņemsim, ka ir dota funkcija $y=f(x)$, kura ir definēta kaut kādā punkta a apkārtnē, izņemot var būt tikai pašu punktu a. Pieņemsim, ka mainīgais x mainās tā, ka tas tiecas uz a (pie kam $x\neq a$). Rodas jautājums, kā šajā gadījumā uzvedīsies cits mainīgais y, kurš ir saistīts ar x šādi $y=f(x)$?

Robežas jēdziens tika noteikts mainīgajam x kādā dotajā tā izmaiņas procesā. Bet šajā gadījumā nav norādīts kāds noteikts mainīgā izmaiņas process, tiek pieprasīts tikai, lai x tiektos uz a (pie kam $x\neq a$). Arguments var tiekties uz a dažādi, katram tādam tiekšanās veidam atbilst savs noteikts mainīgā y izmaiņas process. Tāpēc patvaļīgi izvēloties kādu x izmaiņas procesu, lai tikai $x\to a$ un $x\neq a$, mēs iegūsim kaut kādu y izmaiņas procesu. Šajā gadījumā mūs interesē kā uzvedas mainīgais y, vai y tiecas uz kādu robežu.

Tātad, interesi izraisa gadījums, kad mainīgais y tiecas uz vienu un to pašu robežu b, argumentam x tiecoties uz a vienalga kādā veidā $(x\neq a)$.

Tātad, ja, x vienalga kādā veidā tiecoties uz a $(x\neq a)$, mainīgais y tiecas uz noteiktu robežu b, tad šo b sauc par funkcijas $y=f(x)$ robežu punktā a ([16], 1. sējums, 1. nodaļa).

1.2. Nepārtrauktība

1. Nepārtrauktības, tāpat kā robežas jēdzienā ir ietverta "tuvuma" ideja, precīzāk funkcijas dažādām vērtībām ir maza novirze gadījumā, kad argumenta vērtības, kurām atbilst šīs funkcijas vērtības, ir pietiekami "tuvas" viena otrai. Funkcijas nepārtauktībai ir svarīgi, lai pietiekami mazai argumenta izmaiņai atbilstu pietiekami mazas funkcijas izmaiņas. Tātad, nepārtrauktības jēdzienam ir raksturīga lokālā daba, jo mazai argumenta x novirzei no kādas tā vērtības x_0 ir jānodrošina izvēlētā funkcijas $f(x)$ novirze no $f(x_0)$.

Situācija ar funkcijas $f(x)$ nepārtrauktību punktā x_0 ir līdzīga tai, kura bija funkcijas $f(x)$ robežai punktā x_0. Tomēr starp šiem jēdzieniem eksistē arī būtiskas atšķirības. Pirmkārt, definējot funkcijas $f(x)$ robežu punktā x_0, mūs neinteresēja šīs funkcijas vērtība pašā punktā x_0, funkcija punktā x_0 varēja būt pat nedefinēta. Apskatot nepārtrauktības jēdzienu, funkcijas vērtība punktā x_0 tiek ņemta vērā, t.i. šis punkts noteikti pieder funkcijas $f(x)$ definīcijas apgabalam. Otrkārt, funkcijas robeža punktā $x_0 \in D(f)$ varēja eksistēt, bet nesakrist ar funkcijas vērtību šajā punktā. Nepārtrauktības gadījumā robežai ne tikai jāeksistē, bet arī jāsakrīt ar funkcijas vērtību dotajā punktā, t.i. jāizpildās vienādībai $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Punkts x_0 var būt gan kopas $D(f)$ akumulācijas punkts, gan izolētais punkts. Robeža punktā x_0 tika definēta tikai, ja $x_0 \in D(f)$ ir akumulācijas punkts. Tātad, nepārtrauktības jēdziena definīciju ir jāpapildina gadījumam, kad x_0 ir kopas $D(f)$ izolētais punkts. Šajā gadījumā ir dabiski uzskatīt funkciju par nepārtrauktu šajā punktā.

Tātad, funkciju $f(x)$ sauc par nepārtrauktu punktā $x_0 \in D(f)$ divos gadījumos, ja

1. x_0 ir kopas $D(f)$ izolētais punkts;
2. x_0 ir kopas $D(f)$ akumulācijas punkts, un pie tam ir spēkā sakarība $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Punktu $x_0 \in D(f)$ sauc par funkcijas f pārtraukuma punktu, ja šajā punktā neizpildās nepārtrauktības nosacījums. Tomēr pie pārtraukuma punktiem bieži vien pieskaita arī tādus punktus $x_0 \notin D(f)$, kuru katra apkārtne satur punktus no $D(f)$. Vienosimies, ja x_0 ir divpusējais $D(f)$ akumulācijas punkts, bet funkcija $f(x)$ punktā x_0 nav definēta, tad x_0 arī uzskatīsim par funkcijas $f(x)$ pārtraukuma punktu.

Pieņemsim, ka $f(x)$ ir definēta kāda punkta x_0 apkārtnē, izņemot, var būt, pašu punktu x_0, tad

1. x_0 sauc par novēršamu pārtraukuma punktu, ja $f(x)$ nav definēta punktā x_0, bet eksistē $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ vai $f(x)$ ir definēta punktā x_0 un eksistē $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, bet $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$;
2. x_0 sauc par pirmā veida pārtraukuma punktu, ja eksistē robežas $f(x_0+0)$ un $f(x_0-0)$, bet $f(x_0+0) \neq f(x_0+0)$;
3. x_0 sauc par otrā veida pārtraukuma punktu, ja vismaz viena no robežām $f(x_0+0)$ un $f(x_0-0)$ neeksistē.

2. Izmantojot robežas definīciju pēc Heines un pēc Košī, iegūsim divas ekvivalentas funkcijas nepārtrauktības definīcijas.

Pēc Heines: funkciju $f(x)$ sauc par nepārtrauktu punktā $x_0 \in D(f)$, ja jebkurai virknei $(x_n) \subset D(f)$, kura konverğē uz x_0, atbilstošā funkcijas vērtību virkne $(f(x_n))$ konverğē uz skaitli $f(x_0)$.

Pēc Košī: funkciju $f(x)$ sauc par nepārtrauktu punktā $x_0 \in D(f)$, ja jebkuram $\varepsilon > 0$ atradīsies tāds $\delta > 0$, ka visām argumenta vērtībām $x \in D(f)$, kuras apmierina nosacījumu $|x - x_0| < \delta$, izpildās nevienādība $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Tā kā $x - x_0 = \triangle x$ un $f(x) - f(x_0) = \triangle y$, tad definīciju Košī nozīmē var izteikt arī šādi: funkciju $f(x)$ sauc par nepārtrauktu punktā $x_0 \in D(f)$, ja jebkuram $\varepsilon > 0$ atradīsies tāds $\delta > 0$, ka visām argumenta vērtībām $x \in D(f)$, kuras apmierina nosacījumu $|\triangle x| < \delta$, izpildās nevienādība $|\triangle y| < \varepsilon$.

No pēdējās definīcijas ir acīmredzams, ka funkciju $f(x)$ sauc par nepārtrauktu punktā x_0, ja bezgalīgi mazam argumenta pieaugumam atbilst bezgalīgi mazs funkcijas pieaugums, t.i. $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \triangle y = 0$.

Atzīmēsim arī to, ja izmanto robežas pēc virziena (robežas pēc bāzes) definīcijas, tad funkciju f ir jānosauc par nepārtrauktu punktā $x_0 \in D(f)$, ja eksistē tās robeža pēc virziena (robeža pēc bāzes) punktā x_0 un tā ir vienāda ar $f(x_0)$.

Funkcijas nepārtrauktības definīcija pēc Heines un pēc Košī ir pareiza gan akumulācijas punktam $x_0 \in D(f)$, gan izolētajam punktam $x_0 \in D(f)$. Tiešām, ja x_0 ir kopas $D(f)$ akumulācijas punkts, tad šis fakts acīmredzami seko no funkcijas robežas definīcijām gan pēc Heines, gan pēc Košī. Ja x_0 ir $D(f)$ izolētais punkts, tad šajā gadījumā jebkura virkne (x_n), kura konverğē uz x_0, visiem pietiekami lieliem n sakritīs ar x_0, bet tas nozīmē, ka šīm n vērtībām $f(x_n) = f(x_0)$, t.i. $f(x_n)$ konverğē uz $f(x_0)$. Analoğiski arī Košī definīcijas gadījumā: ja x_0 ir $D(f)$ izolētais punkts, tad jebkuram $\varepsilon > 0$ atradīsies tāds $\delta > 0$, ka vienīgais punkts $x \in D(f)$, kuram $|x - x_0| < \delta$ būs pats punkts x_0, tātad izpildīsies $|x - x_0| = |x_0 - x_0| = 0 < \delta$ un $|f(x) - f(x_0)| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$.

Funkcijas nepārtrauktības definīciju pēc Košī viegli "pārtulkot" apkārtņu valodā. Funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta punktā $x_0 \in D(f)$ tad un tikai tad, kad patvaļīgai apkārtnei $U(f(x_0))$ eksistē tāda apkārtne $U(x_0)$, ka visiem $x \in D(f) \cap U(x_0)$ izpildīsies sakarība $f(x) \in U(f(x_0))$.

3. Pieņemsim, ka kopā $X \subseteq \mathbb{R}$ dota ierobežota funkcija $f(x)$ un $x_0 \in X$, δ ir patvaļīgs pozitīvs skaitlis. Ar m_δ un M_δ apzīmēsim funkcijas $f(x)$ infīmu un suprēmu kopā $X \cap U(x_0, \delta)$, t.i.

$$m_\delta = \inf\{f(x) | x \in X \cap U(x_0, \delta)\}$$

un

$$M_\delta = \sup\{f(x) | x \in X \cap U(x_0, \delta)\}.$$

Skaidrs, ka jebkuram $\delta > 0$ izpildīsies nevienādības $m_\delta \leq f(x_0) \leq M_\delta$.

Ja apkārtnes $U(x_0, \delta)$ fiksētajā punktā x_0 likt δ tiekties uz nulli, tad $U(x_0, \delta)$ tuvosies punktam x_0 un m_δ būs nedilstoša argumenta δ funkcija, bet M_δ būs neaugoša argumenta δ funkcija. Šajā gadījumā eksistē robežas $m(x_0) = \lim\limits_{\delta \to 0} m_\delta$ un $M(x_0) = \lim\limits_{\delta \to 0} M_\delta$, pie kam ir spēkā nevienādības

$$m_\delta \leq m(x_0) \leq f(x_0) \leq M(x_0) \leq M_\delta.$$

Starpību $M(x_0) - m(x_0)$ sauc par funkcijas $f(x)$ svārstību punktā x_0 un apzīmē ar $\omega(x_0)$.

1.1. teorēma. *Funkcija $f(x)$, kura definēta kopā X, ir nepārtraukta punktā $x_0 \in X$ tad un tikai tad, kad $\omega(x_0) = 0$, t.i. ja funkcijas svārstība punktā x_0 ir vienāda ar nulli.*

Pierādījums: ▶ Teorēma ir acīmredzama, ja x_0 ir kopas X izolētais punkts.

Pieņemsim, ka x_0 ir kopas X akumulācijas punkts, $x_0 \in X$.

Nepieciešamība. Pieņemsim, ka $f(x)$ ir nepārtraukta punktā x_0. Fiksēsim patvaļīgu $\varepsilon > 0$ un norādīsim tādu $\delta > 0$, ka $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ visām vērtībām $x \in D(f)$, kuras apmierina nosacījumu $|x - x_0| < \delta$. Tātad, ja $x \in X \cap U(x_0, \delta)$, tad

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

No tā seko, ka $f(x_0) - \varepsilon \leq m_\delta \leq M_\delta \leq f(x_0) + \varepsilon$, līdz ar to noteikti izpildās nevienādības $f(x_0) - \varepsilon \leq m(x_0) \leq M(x_0) \leq f(x_0) + \varepsilon$.

Tā kā ε tika izvēlēts patvaļīgi, tad no pēdējās nevienādības seko, ka $m(x_0) = M(x_0)$, t.i. $\omega(x_0) = 0$.

Pietiekamība. Pieņemsim, ka $\omega(x_0) = 0$, t.i. $m(x_0) = M(x_0)$, tad

$$m(x_0) = M(x_0) = f(x_0).$$

Fiksēsim patvaļīgu $\varepsilon > 0$ un norādīsim tādu $\delta > 0$, ka $m(x_0) - \varepsilon < m_\delta \leq m(x_0)$ un $M(x_0) \leq M_\delta < M(x_0) + \varepsilon$. Pēdējās nevienādības norāda, ka $f(x_0) - \varepsilon < m_\delta$ un $M(x_0) < f(x_0) + \varepsilon$. Ja punkts $x \in X \cap U(x_0, \delta)$, tad $f(x)$ atrodas starp m_δ un M_δ, t.i. $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$. Citiem vārdiem sakot, visiem $x \in X$ un apmierina nevienādību $|x - x_0| < \delta$, izpildās nevienādība $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Teorēma ir pierādīta. ◀

Tā kā nosacījums $\omega(x_0) = 0$ ir gan nepieciešams, gan pietiekams, lai funkcija punktā x_0 būtu nepārtraukta, tad šo nosacījumu var pieņemt par vēl vienu funkcijas nepārtrauktības punktā definīciju, šī definīcija būs ekvivalenta gan definīcijai pēc Košī, gan pēc Heines. Šī jaunā definīcija pieder R. Bēram, to plaši pielieto reālā mainīgā funkciju teorijā.

Kā zināms, funkciju $f(x)$, kura uzdota kopā X, sauc par nepārtrauktu kopā X, ja tā ir nepārtraukta katrā šīs kopas punktā $x \in X$. Kopa X var būt arī intervāls.

4. Tradicionāli matemātiskajā analīzē punktā nepārtrauktas funkcijas jēdziens tiek apskatīts kā sekundārs jēdziens, bet funkcijas robežas jēdziens, kā primārs. Tomēr var veidot teoriju tā, ka sākumā definē punktā nepārtrauktas funkcijas jēdzienu, bet pēc tam robežas jēdzienu.

Tātad, pieņemsim, ka ir definēta nepārtraukta funkcija, piemēram $(\varepsilon - \delta)$ formā (Košī formā), un kopa $D(f) \cap \overset{\circ}{U}(x_0)$ ir netukša jebkurai punkta x_0 izdurtai apkārtnei, t.i., x_0 ir kopas $D(f)$ akumulācijas punkts. Ja $f(x)$ ir nepārtraukta punktā x_0, tad skaitli $b = f(x_0)$ sauc par funkcijas $f(x)$ robežu punktā x_0. Ja funkcijai $f(x)$ punktā x_0 ir novēršams pārtraukuma punkts un $x_0 \in D(f)$ tad, ja eksistē skaitlis b $(b \neq f(x_0))$, ka pārdefinējot funkciju $f(x)$ ar vērtību b punktā x_0 tā, lai jaunā funkcija punktā x_0 būtu nepārtraukta, skaitli b sauc par funkcijas $f(x)$ robežu punktā x_0. Ja punktā x_0 funkcija $f(x)$ nav definēta (t.i., $x_0 \notin D(f)$), tad, ja eksistē skaitlis b, kā punktā x_0 var definēt funkciju $f(x)$ ar vērtību b tā, lai jaunā funkcija punktā x_0 būtu nepārtraukta, arī tad skaitli b sauc par funkcijas $f(x)$ robežu punktā x_0.

Tātad, skaitli b sauc par funkcijas $f(x)$ robežu punktā x_0, ja funkcija

$$\varphi(x) = \begin{cases} \text{f(x)}, & \text{ja } x \neq x_0; \\ \text{b}, & \text{ja } x = x_0 \end{cases}$$

ir nepārtraukta punktā x_0.

5. Ideja par funkcijas nepārtrauktību intervālā ir diezgan uzskatāma, tāpēc nereti skolēni šo ideju saista ar šādas funkcijas "nepārtrauktu" grafiku. Tomēr šāds priekšstats par funkcijas, kura dota intervālā, nepārtrauktību negatīvi ietekmē skolēnu izpratni par jēdzieniem nepārtraukta funkcija punktā un nepārtraukta funkcija patvaļīgā punktu kopā. Aprakstītā situācija mācību procesā ir pilnīgi likumsakarīga, tā kā ģeometriskais priekšstats skolēnu apziņā rodas kā "pirmais" signāls un traucē tālāk izprast norādītos jēdzienus. Rezultātā skolēni ar grūtībām saprot to faktu, ka funkcijas "nepārtrauktība" kādā punktā vēl nenodrošina šīs funkcijas nepārtrauktību pat pietiekami mazā šī punkta apkartnē. Izskaidrot šo šajā situāciju palīdzēs funkcija $f(x)$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ja} \quad x \in \mathbb{Q}; \\ -x^2, & \text{ja} \quad x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

kura ir definēta kopā $\mathbb{R}$. Funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta tikai vienā punktā $x = 0$, visos pārējos punktos funkcija $f(x)$ ir pārtraukta, jo nepārtrauktības nosacījumi neizpildās.

Vēl, kā piemēru, var piedāvāt funkciju $g(x)$, kura definēta intervālā $[-1, 1]$:

$$g(x) = \begin{cases} |x|, & \text{ja } \frac{1}{2} \leq |x| < 1; \\ \frac{1}{2}|x|, & \text{ja } \frac{1}{4} \leq |x| < \frac{1}{2}; \\ \ldots & \\ \frac{1}{2^n}|x|, & \text{ja } \frac{1}{2^{n+1}} \leq |x| < \frac{1}{2^n}; \\ \ldots & \\ 0, & \text{ja } x = 0. \end{cases}$$

Funkcija $g(x)$ ir nepārtraukta punktā $x = 0$, bet jebkurā šī punkta apkārtnē eksistē bezgalīga (sanumurējama) pirmā veida pārtraukuma punktu kopa (punkti $x = \pm\frac{1}{2^n}$, $n = 1, 2, \ldots$).

Punktā nepārtrauktas funkcijas jēdzienu skolas kursa ietvaros būtu mērķtiecīgi formulēt, veidojot jēdzienu par funkcijas pārtraukuma punktiem. Šim mērķim vajadzētu piedāvāt veselu virkni piemēru, kuros tiek pētīta funkcijas uzvedība konkrēti norādītajos akumulācijas punktos $x_0 \in D(f)$. Šo punktu izvēli jāveic tā, lai tiktu aptverti gan visi nepārtrauktības gadījumi, kad $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, gan pārtraukumu punktu pamatgadījumi: kad funkcijas robeža punktā x_0 eksistē, bet nav vienāda ar $f(x_0)$ (novēršama rakstura pārtraukuma punkts), un kad robeža neeksistē (pirmā un otrā veida pārtraukuma punkti).

6. Pieņemsim, ka dota kopā X nepārtraukta funkcija $f(x)$ un x_0 - kopas X akumulācijas punkts. Tātad $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, bet $f(x_0) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x)$, tātad, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x)$.

Šī vienādība ir atspoguļo svarīgu punktā nepārtrauktu funkciju īpašību, saskaņā ar kuru funkcionālās operācijas un robežpārejas simbolus var mainīt vietām.

Atzīmēsim, ka, lai izskaitļotu funkcijas robežu gadījumā, kad analītiskā izteiksme, ar kuras palīdzību ir uzdota funkcija $f(x)$, zaudē savu aritmētisko jēgu punktā x_0, šī analītiskā izteiksme tiek pārveidota par nepārtrauktu funkciju $\varphi(x)$. Funkcija $\varphi(x)$ atšķiras no $f(x)$ tikai punktā x_0, taču funkcijai $\varphi(x)$ robežpārejas simbolus un funkcionālās operācijas var mainīt vietām. Tātad, robeža $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ tiek aizstāta ar tai vienādu robežu $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$, bet $\varphi(x)$ robežas aprēķināšana tiek īstenota, aprēķinot $\varphi(x_0)$. Tam skolēni nereti nepievērš vajadzīgo uzmanību.

7. No funkciju nepārtrauktības seko svarīgas funkciju globālās un lokālās īpašības. Pie lokālām īpašībām parasti pieskaita īpašības, kuras izriet no nepārtrauktības punktā, lokālās īpašības ir funkcijas lokālā ierobežotība un zīmes stabilitāte. Pie globālām pieskaita nogriezni un kopas $\mathbb{R}$ kompaktā apakškopā (t.i. tādā, kas ir slēgta un ierobežota) nepārtrauktu funkciju īpašības. Globālās īpašības ir funkcijas ierobežotība, īpašība par vislielāko un vismazāko vērtību, funkcijas vērtību kopas kompaktums un citas. Visbeidzot, funkcijām, kuras ir nepārtrauktas intervālā, ir spēkā teorēmas par nulli un starpvērtībām.

Pieņemsim, ka funkcija $f(x)$ dota kopā X. Bez lokālās pieejas definējot nepārtrauktu funkciju kopā X, kā nepārtrauktu funkciju jebkurā kopas X punktā, šo jēdzienu var definēt uzreiz visā kopā X. Tas, kā zināms, ir jēdziens par funkcijas vienmērīgo nepārtrauktību kopā X, kurš balstās uz ideju, saskaņā ar kuru bezgalīgi mazam argumenta pieaugumam atbilst bezgalīgi mazs funkcijas pieaugums.

Tātad, ja katram $\varepsilon > 0$ atradīsies tāds $\delta > 0$, ka jebkuriem diviem punktiem x_0 un x $(x_0, x \in X)$ no $|x-x_0| < \delta$ seko $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$, tad f sauc par vienmērīgi nepārtrauktu funkciju kopā X.

Šajā gadījumā δ ir atkarīgs tikai no ε, tāpēc δ var norādīt pirms punkta $x_0 \in X$ izvēles, t.i. δ der visiem $x_0 \in X$. Šeit punkti x_0 un x ir līdzvērtīgi.

Tātad, funkciju $f(x)$ sauc par vienmērīgi nepārtrauktu kopā $X \subset \mathbb{R}$, ja katram $\varepsilon > 0$ atradīsies tāds $\delta > 0$, ka jebkuriem diviem punktiem $x_1 \in X$ un $x_2 \in X$ tādiem, ka $|x_1 - x_2| < \delta$, izpildās nevienādība $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Vienmērīgi nepārtrauktās un nepārtrauktās "parastā" skaidrojumā funkcijas atšķiras ar to, ka pie vienmērīgās nepārtrauktības katram $\varepsilon > 0$ meklētais $\delta > 0$ ir "universāls", t.i. kopējs visiem $x_0 \in X$, bet pie "parastās" nepārtrauktības katram $\varepsilon > 0$ un katram $x_0 \in X$ atradīsies $\delta > 0$ (kurš, acīmredzami, ir atkarīgs no x_0). Dažiem $\varepsilon > 0$ vispār var neeksistēt tāds universāls $\delta > 0$, kas atkarīgs tikai no ε un kopējs visiem $x_0 \in X$.

Vienmērīgā nepārtrauktība nav saistīta ar atsevišķu kopas X punktu, bet raksturo situāciju uzreiz visā punktu kopā X, t.i. kopā X starp jebkurām funkcijas f argumenta vērtībam x_1 un x_2 jābūt vienai un tai pašai tuvuma pakāpei, lai nodrošinātu funkcijas vērtību $f(x_1)$ un $f(x_2)$ pietiekamu tuvumu. Tātad, vienmērīgo nepārtrauktību var uztvert, kā vienādu funkcijas "uzvedību" jebkurā kopas X daļā.

Ja funkcija $f(x)$ ir vienmērīgi nepārtraukta kopā X, tad, acīmredzami, ka tā ir nepārtraukta jebkurā šīs kopas punktā. Tātad, no funkcijas $f(x)$ kopā X vienmērīgās nepārtrauktības seko šīs funkcijas "parastā" nepārtrauktība kopā X. Apgrieztais apgalvojums, vispārīgi runājot, nav spēkā. Tā funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ ir nepārtraukta intervālā $(0, 1)$, bet nav vienmērīgi nepārtraukta šajā intervālā. Jo, ja $x \to 0$, tad $\delta \to 0$ (katram $\varepsilon > 0$). Šī funkcija būs vienmērīgi nepārtraukta intervālā $[\frac{1}{2}, 1]$ un $[1, +\infty)$. Pat nepārtraukta funkcija $f(x) = x^2$ kopā $\mathbb{R}$ nav vienmērīgi nepārtraukta. Jo, ja $x \to +\infty$, tad $\delta \to 0$ (katram $\varepsilon > 0$), tātad atrast "universālo" $\delta > 0$, kurš derētu katram $\varepsilon > 0$ nevar. Tomēr jebkurā kopas $\mathbb{R}$ galīgā intervālā šī funkcija būs vienmērīgi nepārtraukta.

Vienmērīgajai nepārtrauktībai ir interesanta ģeometriskā interpretācija. Ja f ir vienmērīgi nepārtraukta kopā X, tad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $\delta > 0$, ka taisnstūri ar malām ε un δ, kuras ir paralēlas koordinātu asīm (attiecīgi abscisu un ordinātu asij), var pārvietot gar funkcijas f grafiku tā, ka šī taisnstūra malas joprojām ir paralēlas koordinātu asīm un funkcijas f grafiks krusto tikai taisnstūra vertikālās malas, nepieskaroties taisnstūra horizontālajām malām.

Matemātiskajā analīzē tiek pierādīta teorēma (pieder G. Kantoram), ka jebkura funkcija, kura ir nepārtraukta kopā $X \subset \mathbb{R}$, kur X ir nogrieznis vai slēgta un ierobežota kopa (kopa X ir kompakta kopā), ir vienmērīgi nepārtraukta. Tātad nepārtrauktības un vienmērīgās nepārtrauktības jēdzieni ir ekvivalenti kompaktās kopas vai nogriežņa gadījumā. Citiem vārdiem sakot, funkcijas vienāda "uzvedība" katrā nogriežņa daļā pilnīgi atklāj nepārtraukto funkciju dabu. Tas ļauj definēt nogrieznī nepārtrauktu funkciju, nepieprasot funkcijas nepārtrauktību katrā nogriežņa punktā, bet prasot to uzreiz visā nogrieznī (arī slēgtā ierobežotā kopā X, $X \subset \mathbb{R}$).

Tātad, funkciju $f(x)$ sauc par nepārtrauktu kompaktā kopā $X \subset \mathbb{R}$, ja jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē $\delta > 0$, ka jebkurām divām vērtībām x_1 un x_2 no X no nevienādības $|x_1 - x_2| < \delta$ seko nevienādība $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Definējot kompaktā kopā X nepārtrauktas funkcijas jēdzienu tālāk var veidot nepārtrauktu funkciju kopā X teoriju (kur X ir kompakta kopa, speciālgadījumā, arī nogrieznis).

8. Funkcijas $f : X \to \mathbb{R}$ pārtraukuma punkti, vispārīgi runājot, ir patvaļīgi izvietoti kopā X. Tomēr var aprakstīt pārtraukuma punktu struktūru, kad $D(f)$ - slēgta kopa. Ja funkcija ir definēta slēgtā kopā F, tad funkcijas pārtraukuma punktu kopa E ir vai nu slēgta kopa, vai sanumurējama skaita slēgtu kopu apvienojums (skat. [12], 47. paragrāfs).

No matemātiskās analīzes kursa ir zināms, ka monotonai funkcijai $f(x)$ kopā $X \subset \mathbb{R}$ šajā kopā var būt tikai pirmā veida pārtraukuma punkti. Pie kam monotonas funkcijas pārtaukuma punktu kopa ir ne vairāk kā sanumurējama (skat. [8], 4. nod. 2. paragrāfs).

Par monotonas funkcijas nepārtrauktības kritēriju kalpo šāda teorēma:
nogrieznī $X = [a, b]$ monotona funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ ir nepārtraukta nogrieznī $[a; b]$ tad un tikai tad, ja kopa $f(X)$ pati ir nogrieznis ar galapunktiem $f(a)$ un $f(b)$. (skat. [8], 4. nod. 2. paragrāfs).

Interesi izraisa arī tā saucamās punktveida pārtrauktas funkcijas, t.i. tādas funkcijas f, kuras ir definētas perfektā kopā P, funkcijas nepārtrauktības punkti kopā P veido visur blīvu kopu E uz P. Ja funkcija f, kura definēta perfektā kopā P, ir nepārtrauktu funkciju f_n kopā P virknes robeža, tad f būs punktveida pārtraukta funkcija jebkurā kopas P perfektā apakškopā P_1. Ir spēkā arī apgriezts apgalvojums.

Abas šīs teorēmas, kas pieder R. Bēram, nosaka nepieciešamo un pietiekamo nosacījumu, lai perfektā kopā P definētā funkcija f būtu nepārtrauktu funkciju f_n kopā P konverģentas virknes (f_n) robeža. Lai tā būtu, f jābūt punktveida pārtrauktai funkcijai jebkurā kopas P perfektā apakškopā P_1.

No šī apgalvojuma izriet **Bēra kritērijs**: lai f būtu nepārtrauktu funkciju virknes robeža ir nepieciešami un pietiekami, lai funkcijai f būtu vismaz viens nepātrauktības punkts jebkurā perfektās kopas P perfektā apakškopā P_1 (skat. [13], XV nod.; [12]).

2. Attēlojumu lokālie tuvinājumi

2.1. Par diferenciālrēķinu pamatu izveidošanu

1. Lielākajā daļā matemātiskās analīzes mācību grāmatu, kā arī mācīšanas praksē, atvasinājums ir primārs jēdziens, bet diferenciālis un funkcijas diferencējamības jēdzieni ir sekundāri jēdzieni, tie tiek definēti ar atvasinājuma palīdzību.

Tomēr ir iespējami arī citi viena argumenta funkciju diferenciālrēķinu pamatu izveidošanas varianti, kur kā primārs jēdzienus var būt gan diferenciāļa jēdziens, gan funkcijas diferencējamības jēdziens. Tātad, tiek lietoti trīs diferenciālrēķinu pamatu izveidošanas varianti.

Pirmajā tiek apskatīts attēlojums (funkcija) $f : X \to Y$, kur X un Y ir $\mathbb{R}$ apakškopas, $D(f) = X$ un $x_0 \in X$ - ir kopas X akumulācijas punkts. Tālāk, tiek izvēlēts argumenta pieaugums $\triangle x \neq 0$ tā, lai $(x_0 + \triangle x) \in X$, un par funkcijas $f(x)$ atvasinājumu $f'(x_0)$ (gadījumā, ja tas eksistē) sauc robežu

$$\lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x}.$$

Šajā gadījumā diferenciālis tiek noteikts kā funkcijas pieauguma galvenā lineārā daļa un vienāds ar reizinājumu $f'(x_0)\triangle x$. Funkciju f sauc par diferencējamu punktā x_0, ja funkcijai f šajā punktā eksistē galīgs atvasinājums. Dažreiz funkcijas f diferecējamību punktā x_0 traktē kā iespēju funkcijas pieaugumu $f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)$ izteikt formā $A \cdot \triangle x + \alpha \cdot \triangle x$, kur A ir skaitlis un α ir bezgalīgi maza funkcija, ja $\Delta x \to 0$, un tālāk pierāda teorēmu, ka funkcija f ir diferencējama punktā x_0 tad un tikai tad, ja tai šajā punktā eksistē galīgs atvasinājums $f'(x_0)$.

Otrajā variantā, izmantojot robežpārejas operāciju, diferenciāli df punktā x_0 argumenta pieaugumam $\triangle x$ definē ar šādas vienādības palīdzību:

$$df(x_0, \triangle x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\triangle x) - f(x_0)}{t}.$$

(Šeit x_0 ir $D(f) \subset \mathbb{R}$ akumulācijas punkts, $x_0 \in D(f)$ un $x_0 + \Delta x \in D(f)$).

Tad atvasinājums $f'(x_0) = df(x_0, \triangle x)$, ja $\triangle x = 1$, bet diferencējamība tiek traktēta, kā diferenciāļa vai atvasinājuma eksistence.

Atzīmēsim, ka, ja X un Y ir patvaļīgas lineārās normētas telpas un $f : X \to Y$, tad robežu

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t},$$

kur $h = \triangle x$, sauc par vāju diferenciāli vai par attēlojuma f Gato diferenciāli punktā x_0 un apzīmē $Df(x_0, h)$; konverģenci apskata pēc normas telpā Y (Skat. [11], X, 471. lpp.).

Trešajā variantā attēlojumu (funkciju) $f : X \to Y$, kur X un Y ir $\mathbb{R}$ apakškopas, $D(f) = X$, sauc par diferencējamu akumulācijas punktā $x_0 \in D(f)$, ja funkcijas pieaugumu var izteikt:

$$f(x_0 + \triangle x) - f(x_0) = A\triangle x + \alpha(\triangle x)\triangle x,$$

kur koeficients A ir neatkarīgs no $\triangle x$, bet $\alpha(\triangle x) \to 0$, ja $\triangle x \to 0$.

Pie tam funkcijas pieauguma galvenās lineāras daļas koeficientu A sauc par f atvasinājumu punktā x_0, bet pieauguma galveno lineāro daļu $A\triangle x$ sauc par funkcijas diferenciāli punktā x_0 dotajai vērtībai $\triangle x$.

Tādejādi, sākumā definē funkcijas diferencejamības jēdzienu, bet atvasinājumu A un diferenciāli $df(x_0, \triangle x)$ nosaka, kā

$$A = f'(x_0) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x}$$

un $df(x_0, \triangle x) = f'(x_0) \cdot \triangle x$.

2. Vispārizglītojošās skolās pielieto pirmo variantu. Skolas programmā atvasinājumam ir centrālā vieta, uz šo jēdzienu balstās galvenā skolas matemātiskās analīzes jautājumu daļa. Tāpat atvasinājuma mācīšanu skolā sekmē šī jēdziena izmantošana skolas fizikas kursā. Skolā atvasinājumu definē, apskatot vienu no atvasinājuma interpretācijām, tas ir, apskatot tā kinemātisko jēgu. Atvasinājums ir abstrakcijas rezultāts, pētot procesu un parādību lokālo raksturojumu. Matemātiskās analīzes un to pielikumu vispārīgais uzdevums ir funkcijas izmaiņas procesa pētīšana, un atvasinājumu saprot savā universālā nozīmē: kā funkcijas izmaiņas ātrumu.

Apskatot uzdevumus par atvasinājuma mehānisko un ģeometrisko interpretāciju, viegli konstatēt šo uzdevumu ciešo saikni, tāpēc, ka ar atvasinājuma palīdzību novērtē funkcijas izmaiņas ātrumu un leņķi starp funkciju grafiku un abscisu asi. Šim nolūkam var apskatīt pietiekoši mazu loku starp punktiem $M(x_0, y_0)$ un $M_1(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, kura slīpumu pret abscisu asi var novērtēt, zinot loka savelkošas hordas slīpumu, tas ir, novērtēt ar virziena koeficienta $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ palīdzību. Šī attiecība, kas ir funkcijas izmaiņas vidējais ātrums intervālā no x_0 un līdz $x_0 + \Delta x$, tikai aptuveni raksturo grafika slīpumu punkta $M(x_0, y_0)$ tuvumā. Pie kam tuvinājums ir jo labāks, jo mazāks ir loks. Ja $\Delta x \to 0$, tad sekante (horda), tiecas uz funkcijas grafika pieskari punktā $M(x_0, y_0)$. Tādējādi, lai raksturotu funkcijas grafika slīpumu attiecībā pret abscisu asi punktā $M(x_0; y_0)$, dabiski apskatīt šajā punktā novilktās pieskares slīpumu attiecībā pret abscisu asi, t.i., aprēķināt tangensu leņķim, ko pieskare veido ar abscisu asi un to uzskatīt par "reālo" funkcijas izmaiņas ātrumu punktā x_0, kad funkcijas arguments x pāriet punkta M abscisu x_0.

Otrais variants nav atradis pielietojumu ne pedagoģiskās universitātes (institūtu) pasniedzēju vidū, ne skolā, kaut gan to nevar pilnīgi izslēgt.

3. Trešais variants izraisa vislielāko interesi, tā pamatideja ir attēlojumu lokālā lineārizācija. Šī ideja ir diferenciālrēķinu teorijas pamatā. Vispirms apskatīsim skaitliskas funkcijas, kas ir skolas matemātiskās analīzes pamatu pamatobjekts. Viena reālā mainīgā skaitliskai funkcijai f funkcijas diferencējamību akumulācijas punktā $x_0 \in D(f)$, ko izsaka vienādība

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,$$

var definēt arī ar citu ekvivalentu vienādību:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - A\Delta x}{\Delta x} = 0.$$

Pēdējo vienādību var iegūt vienkāršu pārveidojumu ceļā. No vienādības

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

seko, ka

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-A\Delta x}{\Delta x}=\alpha(\Delta x),$$

bet $\alpha(\Delta x)\to 0$, ja $\Delta x\to 0$, tāpēc

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-A\Delta x}{\Delta x}=0.$$

Pēdējā vienādībā $A\Delta x$ ir lineāra funkcija $g(\Delta x)$, pie kam $f(x_0)+g(\Delta x)$ ir funkcijas $f(x)$ labs lokālais lineārais tuvinājums punkta x_0 apkārtnē.

Tādā veidā, attēlojumu $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sauc par diferencējamu punktā $x_0\in D(f)$ (kur x_0 ir $D(f)$ akumulācijas punkts), ja eksistē tāds lineārs attēlojums $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, ka

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)-g(\Delta x)}{\Delta x}=0,$$

kur $g(\Delta x)=f'(x_0)\Delta x$.

Diferencējamības definīciju var vispārināt "augstākas" dimensijas telpām, nekā $\mathbb{R}$. Tā, attēlojumu $f:\mathbb{R}_n\to\mathbb{R}_m$ sauc par diferencējamu punktā $x_0\in\mathbb{R}_n$, ja eksistē tāds lineārs attēlojums $g:\mathbb{R}_n\to\mathbb{R}_m$, ka

$$\lim_{h\to 0}\frac{||f(x_0+h)-f(x_0)-g(h)||_m}{||h||_n}=0.$$

Atzīmēsim, ka normas zīmes šeit ir nepieciešamas, tāpēc ka x_0 un h pieder $\mathbb{R}_n$, bet $f(x_0+h)-f(x_0)-g(h)$ ir punkts no $\mathbb{R}_m$.

Analoģiski diferencējamības jēdzienu var vispārināt patvaļīgām lineārām normētām telpām (skat. [8] II, [9], [10] vai [13]).

Atzīmēsim, ka diferencejamības nosacījumu, ko izsaka vienādība

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x,$$

kur $x=x_0+\Delta x$, $(\Delta x=x-x_0)$, var pierakstīt arī formā

$$f(x)-f(x_0)=A(x-x_0)+\alpha(x)(x-x_0),$$

kur $\alpha(x)\to 0$, ja $x\to x_0$.

Nākošajā nodaļā apskatīsim sīkāk diferenciālrēķinu konstruēšanas trešo pamatideju.

2.2. Diferencējamība un lokālā lineārizācija

Apskatīsim diferenciālrēķinu būtību viendimensijas matemātiskās analīzes gadījumā.

1. Pieņemsim, ka dots attēlojums (funkcija) $f : X \to \mathbb{R}$, kur $D(f) = X \subset \mathbb{R}$ - ir kāds intervāls un funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta punktā $x_0 \in X$. Apskatīsim visas iespējamās punktā x_0 nepārtrauktas funkcijas $g(x)$, ja $x \in X$, kuras sakrīt ar $f(x)$ punktā x_0, t.i., $g(x_0) = f(x_0)$. Funkcijas $g(x)$ novirzi no funkcijas $f(x)$, raksturo, kā zināms, starpība $f(x) - g(x) = b(x)$. Tāpēc funkciju $f(x)$ jebkuram $x \in X$ var aizstāt ar funkcijas $g(x)$ un $b(x)$ summu, pie kam, ja $x \to x_0$, tad $b(x) \to 0$, citiem vārdiem sakot, punktā x_0 funkcija $b(x)$ ir bezgalīgi maza funkcija.

Ar funkcijas $g(x)$ palīdzību mēs ieguvām funkcijas $f(x)$ tuvinājumu punkta $x_0 \in X$ apkārtnē ar precizitāti līdz bezgalīgi mazai vērtībai. Bet šādā veidā definēta problēma nav interesanta, jo tai ir pārāk vispārīgs, nenoteikts raksturs. Pirmām kārtām, pieprasīsim, lai funkcijas $g(x)$ būtu "pietiekoši vienkāršas" nepārtrauktas funkcijas. Tādas, protams, ir lineāras funkcijas $y = Ax + B$.

Apskatīsim lineāras funkcijas $g(x)$, kuras punktā x_0 sakrīt ar funkciju $f(x)$. Šīs funkcijas var izteikt ar vienādojumu

$$g(x) = A(x - x_0) + f(x_0),$$

kur A ir virziena koeficients (leņķa, kuru atbilstošā taisne veido ar abscisu ass pozitīvo virzienu, tangenss). Atzīmēsim, ka jebkuras divas tādas lineārās funkcijas

$$g_1(x) = A_1(x - x_0) + f(x_0) \;\text{ un }\; g_2(x) = A_2(x - x_0) + f(x_0)$$

punkta x_0 apkārtnē novirzās viena no otras par lielumu $g_1(x) - g_2(x) = (A_1 - A_2)(x - x_0)$, kas ir tieši proporcionāls starpībai $x - x_0$.

Starp šīm funkcijām noteikti atradīsies arī "konstantā" funkcija, tā ir taisne, kas iet caur punktu $M(x_0, f(x_0))$ un ir paralēla abscisu asij. Tā ir lineārā funkcija

$$g(x) = A(x - x_0) + f(x_0),$$

ja $A = 0$, jeb taisne $g(x) = f(x_0)$, jebkuram $x \in X$. Viegli redzēt, ka funkcijas $f(x)$ tuvinājums ar funkcijas $g(x) = f(x_0)$ palīdzību punkta x_0 apkārtnē nav vislabākais.

Precizēsim uzdevumu. Pamēģināsim atrast starp lineārām funkcijām $g(x)$ tādu, kurai ir vismazākā novirze no $f(x)$. Citiem vārdiem sakot, meklēsim tādu funkciju $g(x)$, kurai $b(x)$ ir augstākas pakāpes bezgalīgi mazs, salīdzinot ar $x - x_0$ (ja $x \to x_0$), t. i.,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{b(x)}{x - x_0} = 0.$$

Pēdējā vienādība nozīmē, ka daļa $\frac{b(x)}{x - x_0}$ ir kāda bezgala mazā $\alpha(x)$ (ja $x \to x_0$), no kā seko, ka $b(x) = \alpha(x)(x - x_0)$.

Tādā veidā, punkta x_0 apkārtnē, jāatrod tāda lineāra funkcija $g(x)$, lai

$$f(x) - g(x) = \alpha(x)(x - x_0),$$

ja $x \to x_0$, ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs nekā $x-x_0$. Atzīmēsim, ka pēdējo vienādību var pārrakstīt šādi: $f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)=\alpha(x)(x-x_0)$. Tātad mūsu uzdevums ir atrast šīs taisnes virziena koeficientu A.

Pieņemsim, ka A ir zināms, tad no vienādības $f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)=\alpha(x)(x-x_0)$ iegūsim $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-A=\alpha(x)$. Tā kā $\alpha(x)\to 0$, ja $x\to x_0$, tad attiecības $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ robeža, ja $x\to x_0$, ir vienāda ar A, t.i.,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A.$$

Otrādi, ja attiecības robeža $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=A$, tad $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-A=\alpha(x)$, no kurienes

$$f(x)-f(x_0)-A(x-x_0)=\alpha(x)(x-x_0),$$

jeb

$$f(x)-(A(x-x_0)+f(x_0))=\alpha(x)(x-x_0).$$

No visa iepriekš teiktā seko, ka lineārā funkcija $g(x)=A(x-x_0)+f(x_0)$, kur $A=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, pilnīgi apmierina mūsu prasību: punkta x_0 apkārtnē $g(x)$ novirzās no $f(x)$ par lielumu $\alpha(x)(x-x_0)$, kas ir augstākas kārtas bezgalīgi mazais nekā $x-x_0$ (ja $x\to x_0$).

Funkciju $f(x)$, kuru punktā $x_0\in X$ var izteikt šādi

$$f(x)=f(x_0)+A(x-x_0)+\alpha(x)(x-x_0),$$

pieraksta

$$f(x)-f(x_0)=A(x-x_0)+\alpha(x)(x-x_0),$$

bet dažreiz pieraksta arī robežveidā (skat. "trešo variantu", p.3, §1). f(x) sauc par diferencējamu funkciju punktā x_0 (šeit A nav atkarīgs no $x-x_0$ un $\alpha(x)\to 0$, ja $x\to x_0$).

Diferencējamība intervālā X tiek definēta kā diferencējamība katrā punktā $x\in X$.

Skaitli

$$A=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

sauc par funkcijas $f(x)$ atvasinājumu punktā x_0 un apzīmē $f'(x_0)$, bet

$$A(x-x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

sauc par funkcijas $f(x)$ diferenciāli punktā x_0 un apzīmē df (šeit $x\in X$, $x\neq x_0$).

Tādā veidā punktā $x_0\in X$ diferencējama funkcija $f(x)$ ir funkcija, kuru punkta x_0 apkārtnē var izteikt formā $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\alpha(x)(x-x_0)$, pie kam, ja $x\to x_0$, tad $\alpha(x)(x-x_0)$ ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs salīdzinājumā ar $x-x_0$.

Funkcija $g(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ ir vislabākais funkcijas $f(x)$ lineārais tuvinājums punkta x_0 apkārtnē. Pie tam, funkcijas $g(x)$ grafiks ir taisne

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0),$$

kas iet caur punktu $(x_0,f(x_0))$ un kuras virziena koeficients ir $f'(x_0)$.

No $f'(x_0)$, t.i., robežas $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, ģeometriskās interpretācijas izriet, ka $f'(x_0)$ ir funkcijas $f(x)$ grafika punktā x_0 novilktās pieskares virziena koeficients. Tas nozīmē, ka lineāras funkcijas $g(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ grafiks ir funkcijas $f(x)$ grafika pieskare punktā x_0.

Iespējamība attēlojumu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ punkta x_0 apkārtnē izteikt ar vispimērotāko lineāro attēlojumu ir diferenciālrēķinu pamatideja, proti, lokālās linearizācijas ideja.

2. Sakarība

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - A = \alpha(x)$$

jeb

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = \alpha(x),$$

kur $\alpha(x) \to 0$, ja $x \to x_0$, nozīmē, ka jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $\delta > 0$, ka visiem $x \in X$, kas apmierina nevienādību $|x - x_0| < \delta$, izpildās nevienādība

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right| < \varepsilon.$$

No šīs nevienādības seko

$$-\varepsilon(x - x_0) < f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) < \varepsilon(x - x_0),$$

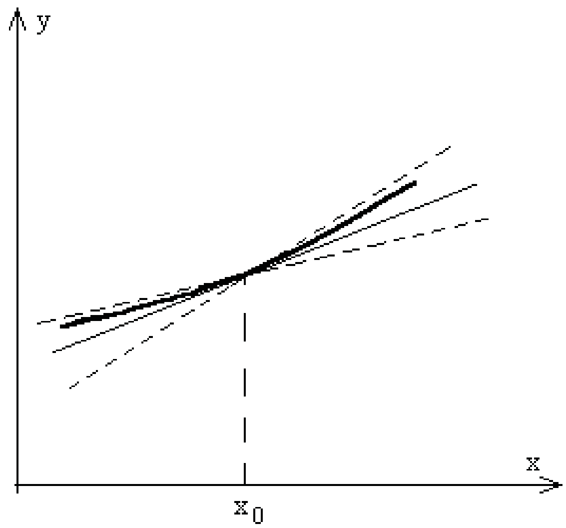
$$f(x_0) + (f'(x_0) - \varepsilon)(x - x_0) < f(x) < f(x_0) + (f'(x_0) + \varepsilon)(x - x_0).$$

Katrai konkrētai ε ($\varepsilon > 0$) vērtībai skaitļi $f'(x_0) - \varepsilon = k_1$ un $f'(x_0) + \varepsilon = k_2$ ir virziena koeficienti divām taisnēm, kas iet caur punktu $(x_0, f(x_0))$.

Nevienādības

$$f(x_0) + k_1(x - x_0) < f(x) < f(x_0) + k_2(x - x_0)$$

ģeometriskā interpretācija nozīmē, ka punktā x_0 diferencējamas funkcijas grafiks, pietiekoši mazā punkta x_0 apkārtnē iet starp divām taisnēm, kuras ar funkcijas grafika pieskari punktā x_0 veido pēc patikas mazus leņķus (skat. 2.1. zīmējumu).



2.1. zīm.

3. Par funkcijas $f(x)$ punktā x_0 lokālo lineārizāciju sauc funkcijas $f(x)$ punkta x_0 apkārtnē aizvietošanu ar lineāro funkciju $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ar precizitāti līdz $\alpha(x)(x - x_0)$, kas ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums nekā $x - x_0$, ja $x \to x_0$.

Funkcijas lokālas lineārizācijas pamatformulu var pārrakstīt šādi:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \gamma,$$

kur γ ir augstākas kārtas bezgalīgi mazs lielums nekā Δx, kur $\Delta x = x - x_0$, ja $x \to x_0$.

Dažu elementāro pamatfunkciju lokālas lineārizācijas formulas:

1. $f(x) = x^n$, pie $n \in N$; $x^n = x_0^n + nx_0^{n-1}\Delta x + \gamma$;
2. $f(x) = \sqrt{x}$, $\sqrt{x} = \sqrt{x_0} + \frac{\Delta x}{2\sqrt{x_0}} + \gamma$;
3. $f(x) = a^x$, $a^x = a^{x_0} + a^{x_0} \ln a \Delta x + \gamma$;
4. $f(x) = \log_a x$, $\log_a x = \log_a x_0 + \frac{\Delta x}{x_0 \ln a} + \gamma$;
5. $f(x) = \sin x$, $\sin x = \sin x_0 + \cos x_0 \Delta x + \gamma$;
6. $f(x) = \cos x$, $\cos x = \cos x_0 - \sin x_0 \Delta x + \gamma$.

4. No vienādības $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \gamma$ viegli iegūt funkcijas pieauguma formulu $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \gamma$. To saīsināti pieraksta šādi: $\Delta f = df + \gamma$, no kurienes izriet aptuvena vienādība $\Delta f \approx df$, ja ir maza argumenta x novirze no x_0.

Beidzot, atmetot γ, viegli iegūt formulu

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

kuru izmanto tuvinātos rēķinos.

5. Apskatītiem jautājumiem ir svarīga mehāniskā interpretācija. Uzdevums doto funkciju pētāmā punkta apkārtnē aproksimēt ar lineāru funkciju atspoguļo svarīgu ideju, ka nelielā laika intervālā patvaļīgu procesu var aizstāt ar vienmērīgu. Atvasinājuma $f'(x_0)$ matemātiskā izteiksme dod kustīga ķermeņa momentānā ātruma formulu. Funkcijas diferenciālis punktā ir lineārais attēlojums $f'(x_0)(x-x_0)$, tas tiek definēts ar novirzi no punkta x_0. Tas apraksta diferencējamas funkcijas pieauguma uzvedību punkta x_0 apkārtnē ar precizitāti līdz bezgalīgi mazai vērtībai, salīdzinot ar argumenta novirzi, un ir tāds ceļa nogrieznis, kuru noietu ķermenis, ja tas laika intervālā Δx pārvietotos ar konstantu ātrumu $f'(x_0)$, t.i., vienmērīgi.

2.3. Diferencējamība un nepārtrauktība

No matemātiskās analīzes kursa ir zināms, ka no tā, ka funkcija ir diferencējama punktā, izriet, ka funkcija ir arī nepārtraukta šajā punktā, tomēr apgrieztais apgalvojums, vispārīgi runājot, nav patiess. Piemēram, funkcijas $f(x) = |x|$ un $\varphi(x) = e^{|x|}$ ir nepārtrauktas reālā taisnē $\mathbb{R}$, bet nav diferencējamas punktā $x = 0$. Arī funkcija

$$g(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{ja} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{ja} \quad x = 0. \end{cases}$$

nav diferencējama punktā $x = 0$, bet ir nepārtraukta reālā taisnē $\mathbb{R}$. Atzīmēsim, ka funkcijām $f(x)$ un $\varphi(x)$ punktā $x = 0$ eksistē atvasinājumi no kreisās un no labās puses, kas savā starpā nav vienādi. Funkcijai $g(x)$ punktā $x = 0$ neeksistē vienpusējie atvasinājumi.

Funkcija $h(x) = |\sin x|$ ir nepārtraukta kopā $\mathbb{R}$ un nav diferencējama sanumurējamā punktu kopā $x = k\pi$, kur k ir vesels skaitlis.

Lielā mērā negaidīts var būt gadījums, kad funkcija, kas ir definēta kopā $\mathbb{R}$, ir nepārtraukta un diferencējama tikai vienā punktā. Tā (skat. 1., 2. paragrāfa 4. punktu) tika apskatīta funkcija

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{ja } x \text{ ir racionāls skaitlis}, \\ -x^2, & \text{ja } x \text{ ir irracionāls skaitlis}. \end{cases}$$

Funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta tikai vienā punktā $x_0 = 0$, nav grūti parādīt, ka $f(x)$ arī ir diferencējama šajā punktā un $f'(x_0) = 0$. Tiešām

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \begin{cases} x, & \text{ja } x \text{ ir racionāls skaitlis}, \\ -x, & \text{ja } x \text{ ir irracionāls skaitlis}. \end{cases}$$

Tad $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = 0$, tas ir, $f'(0) = 0$.

Augstāk apskatītie piemēri var radīt priekšstatu, ka katrai nepārtrauktai funkcijai eksistē atvasinājums visos funkcijas nepārtrauktības punktos, izņemot funkcijas īpašpunktus. Tomēr matemātiskajā analīzē dažādos laikos, sākot ar pagājušā gadsimta pirmo pusi, ir konstruēti nepārtrauktu funkciju, kas nav diferencējamas nevienā punktā, piemēri.

Vienu no tādām funkcijām izdevās konstruēt veicot bezgalīgi daudz funkcijas $|x|$ nobīdes. Tiešām, funkcija $|x|$ ir visur nepārtraukta, bet nav diferencējama punktā $x = 0$. Veicot šīs funkcijas "nobīdes", var iegūt visur nepārtrauktu funkciju, kurai neeksistē atvasinājums katrā dotās galīgas kopas punktā. Veicot bezgalīgi daudzas funkcijas $|x|$ nobīdes iegūst meklējamo funkciju. Tā, kādā etapā konstruējot lauzto līniju, kas balstās uz abscisu asi, un kuru posmu virziena koeficienti ir ± 1, tālāk konstruē lauzto līniju ar vēl smalkākiem posmiem un tādiem pašiem virziena koeficientiem, utt. (sk. [16], II, 480. lpp.).

Pieņemsim

$$f_0(x) = \begin{cases} x, & \text{ja } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \\ 1 - x, & \text{ja } \frac{1}{2} < x \leqslant 1, \end{cases}$$

un periodiski turpinām šo funkciju pa abscisu asi ar periodu 1. Tālāk definē $f_n(x) = \frac{1}{4^n} f_0(4^n x)$, kuras periods ir 4^{-n} un kurai visur (izņemot "stūra punktus") eksistē atvasinājums, kas ir vienāds ar $+1$ un -1. Beidzot definē

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x),$$

kur $f_n(x)$ ir nepārtrauktas funkcijas. Tā kā $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{2 \cdot 4^n}$ (jebkuram $n = 0, 1, 2, \ldots$), rinda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ mažorē un mažorante ir konverģējošā rinda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 4^n}$. Tad pēc Veierštrāsa pazīmes rinda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ vienmērīgi konverģē visā kopā $\mathbb{R}$. Funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta funkcija kā nepārtraukto funkciju vienmērīgi konvergējošas rindas summa. Tomēr $f(x)$ nav diferencējama nevienā kopas $\mathbb{R}$ punktā. (Sk. [16], II, 481. lpp.)

Nepārtrauktām funkcijām, kurām neeksistē atvasinājums, nav atrasts nekāds pielietojums. Tomēr ir mēģinājumi salīdzināt tās ar daļiņu Brauna kustību šķidrumā.

2.4. Par attēlojumu lokālo tuvinājumu ar polinomiem

2.2. paragrāfā bija pierādīts, ka punktā x_0 diferencējama funkcija $f(x)$ šī punkta apkārtnē var tikt pierakstīta formā

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x)(x - x_0),$$

jeb, apzīmējot $x - x_0 = h$, formā

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \alpha h,$$

kur αh ir augstākas pakāpes bezgalīgi maza vērtība salīdzinot ar h, ja $h \to 0$. Tas ir $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\alpha h}{h} = 0$. Vērtību αh, kuras attiecība pret h tiecas uz nulli, ir pieņemts apzīmēt ar $o(h)$. Tāpēc

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + o(h).$$

Ja tuvinājuma precizitāte funkcijai $f(x_0 + h)$ ir pietiekoša un mēs neņemsim vērā augstākas kārtas, salīdzinot ar h, bezgalīgi mazas vērtības $o(h)$, tad jebkurai funkcijai $f(x)$ formula $f(x_0 + h) = f'(x_0)h + f(x_0)$ dod labu tuvinājumu punkta x_0 apkārtnē, izmantojot lineāras funkcijas.

Formulas piemērotība, runājot par funkcijas $f(x_0 + h)$ tuvinātu izteikšanu (pētīšanu, izskaitļošanu), pilnīgi atkarīga no $o(h)$ precizitātes pakāpes. Lokālas linearizācijas uzdevumam šo precizitātes pakāpi pilnīgi raksturo lielums $o(h)$, ko mēs neņemsim vērā. Tomēr, var gadīties, ka būs vajadzīga lielāka lokālā tuvinājuma precizitāte, iespējams, būs vajadzība ņemt vērā h^2 kārtas lielumus un mēs varēsim neņemt vērā tikai $o(h^2)$ veida lielumus, t.i., bezgalīgi mazus lielumus, salīdzinot ar h^2 (tas ir, otrās kārtas bezgalīgi mazs lielums salīdzinot ar h). Šajā gadījumā dabiski funkcijai $f(x_0 + h)$ meklēt tādu otrās pakāpes polinomu $c_0 + c_1h + c_2h^2$, lai pie pietiekoši mazām h vērtībām izpildītos vienādība

$$f(x_0 + h) = c_0 + c_1h + c_2h^2 + o(h^2),$$

kur c_0, c_1, c_2 ir konstantes, koeficienti, kas nav atkarīgi no h.

Līdzīgi turpinot spriedumus tālāk, acīmredzot var pieprasīt ņemt vērā h^n kārtas lielumus, tādā veidā mēs neņemsim vērā bezgalīgi mazus lielumus $o(h^n)$ un nonāksim pie polinoma $c_0 + c_1h + c_2h^2 + \ldots + c_nh^n = P_n(h)$ meklēšanas, kur $P_n(h)$ ir tāds polinoms, ka $f(x_0 + h) = P_n(h) + o(h^n)$.

Ja šo uzdevumu var atrisināt, t.i, ja eksistē tāds polinoms, tad funkciju $f(x_0 + h)$ jeb funkciju $f(x)$, ja $x = x_0 + h$, (tā var būt ļoti sarežģīta funkcija) var aizstāt ar n-tās pakāpes polinomu. Atzīmēsim, ka gadījumam $n = 1$ šis uzdevums ir atrisināts lokālās lineārizācijas ietvaros, jo mēs ieguvām pirmās pakāpes polinomu $f(x_0) + f'(x_0)h$, kur $c_0 = f(x_0)$ un $c_1 = f'(x_0)$. Tagad noformulēsim vispārīgo uzdevumu - dotajam diferencējamajam attēlojumam atrast lokālo tuvinājumu punkta x_0 apkārtnē, izmantojot n-tās pakāpes polinomu. Šo uzdevumu var nosaukt par attēlojuma "lokālās polinomizācijas" uzdevumu.

Rodas šādi jautājumi. Pirmkārt, vai eksistē polinoms $P_n(h) = c_0+c_1h+c_2h^2+\ldots+c_nh^n$ ar koeficientiem, kas nav atkarīgi no h, un kuram $f(x_0 + h) = P_n(h) + o(h^n)$, ja $h \to 0$. Otrkārt, ja eksistē šāds polinoms, tad kādi ir tā koeficienti?

No matemātiskās analīzes kursa ir zināms, ka noformulētajai problēmai ir atrisinājums. Tas ir Teilora polinoms

$$P_n(h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)h^n.$$

Rezultātā iegūstam Teilora formulu:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2!}f''(x_0)h^2 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)h^n + o(h^n).$$

Teilora formula pieprasa, lai punktā x_0 eksistētu visu kārtu līdz pat n-tajai kārtai ieskaitot, atvasinājumi, tāpēc nepieciešams, lai funkcijai f kādā punkta x_0 apkārtnē eksistētu atvasinājumi $f^{(n-1)}, f^{(n-2)}, \ldots, f'$.

Lai pilnīgi atrisinātu šo uzdevumu, apskatīsim robežu

$$\lim_{h\to 0} \frac{o(h^n)}{h^n} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - P_n(h)}{h^n}.$$

Apzīmēsim $f(x_0 + h) - P_n(h) = \varphi(h)$ un parādīsim, ka $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{h^n} = 0$.

Diferencējot $\varphi(h)$, viegli iegūt, ka $\varphi(0) = \varphi'(0) = \ldots = \varphi^{(n-2)}(0) = 0$, tad saskaņā ar Lopitāla kārtulu $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\varphi(h)}{h^n} = \ldots = \lim\limits_{h\to 0} \frac{\varphi^{(n-1)}(h)}{n!h}$. Labās puses robeža eksistē un ir vienāda ar 0.

Tiešām,

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi^{(n-1)}(h)}{n!h} = \frac{1}{n!} \lim_{h\to 0} \left(\frac{f^{(n-1)}(x_0 + h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h} - f^{(n)}(x_0) \right) = 0,$$

jo

$$\lim_{h\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x_0 + h) - f^{(n-1)}(x_0)}{h} = f^{(n)}(x_0).$$

Tadā veidā ir pierādīta Teilora formulas piemērotība izvirzītajam uzdevumam. Teilora formulu bieži pieraksta šādi:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{n!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o(h^n).$$

Locekli $o(h^n)$ šajā formulā sauc par funkcijas $f(x)$ Teilora formulas punkta x_0 apkārtnē atlikuma locekli un apzīmē ar $R_n(x)$, $R_n(x)$ raksturo dotās funkcijas novirzi no polinoma.

No matemātiskās analīzes kursa ir zināmas dažādas Teilora formulas atlikuma locekļa $R_n(x)$ formas. Visbiežāk izmanto Lagranža formu

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \Theta(x - x_0))}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

un Košī formu

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \Theta(x - x_0))}{n!}(1 - \Theta)^n(x - x_0)^{n+1},$$

kur $0 < \Theta < 1$, abām formām pieņem, ka punkta x_0 apkārtnē eksistē atvasinājums $f^{(n+1)}$.

Teilora formula $f(x) = P_n(x) + R_n(x)$ ir viena no diferenciālrēķinu centrālajām formulām. Šī formula ir svarīgs pētīšanas darbarīks matemātiskajā analīzē un tās pielikumos, jo tā palīdz izteikt funkciju $f(x)$, ka tā ir pietiekoši daudzas reizes diferencējama un definēta punkta x_0 apkārtnē, kā n-tās pakāpes polinoma un atlikuma locekļa summu, pie tam atlikuma loceklis, kad x tuvojas x_0, ir augstākas kārtas bezgalīgi maza funkcija salīdzinājumā ar $|x - x_0|^{n+1}$.

Teilora formulas speciālgadījums ir formula

$$f(x) = f(x_0) + R_0(x),$$

kur $R_0(x) = f'(x_0 + \Theta(x - x_0))(x - x_0)$ jeb

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(x_0 + \Theta(x - x_0)).$$

Kā zināms, šo formulu sauc par Lagranža formulu par galīgiem pieaugumiem. Tā apgalvo, ka nepārtrauktas un diferencējamas punkta x_0 apkārtnē funkcijas pieaugums, pie dotā $h = x - x_0$, ir vienāds ar šīs funkcijas diferenciāli punktā $\xi = x_0 + \Theta h$, pie tā paša h.

Atzīmēsim, ja $f(x)$ interpretēt, kā materiāla punkta kustības likumu, tad $f(x) - f(x_0)$ ir pārvietojums laika posmā $x - x_0$. Tad Lagranža formula nozīmē, ka materiālā punkta ātrums f' kādā laika momentā ξ (no laika intervālā x_0 līdz x), ir tāds, ka, ja šajā laika intervālā materiālais punkts kustētos vienmērīgi ar konstantu ātrumu $f'(\xi)$, tad punkts veiktu attālumu $f(x) - f(x_0)$. Lielumu $f'(\xi)$ dabiski uzskatīt par kustības vidējo ātrumu laika intervālā no x_0 līdz x, tas ir,

$$f'(\xi) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

3. Mērs un integrālis

Iepriekšējos paragrāfos mēs izpētījām attēlojumu vispārīgās īpašības, izmantojot punkta apkārtnes jēdzienu. Tika apskatīts neliels skaits aksiomu, kuras apmierina punkta apkārtnes. Tomēr mēs nenodarbojāmies ar mērīšanu, t.i., ar kvantitatīvu intervālu garumu novērtējumu. Visi apskatītie matemātiskās analīzes jēdzieni (funkcija, robeža, nepārtrauktība un c.) un to īpašības varēja apskatīt gan pietiekoši mazā intervālā, gan visā reālā taisnē. Izpētīto kopu īpašības nemainījās savstarpēji viennozīmīgos un savstarpēji nepārtrauktos attēlojumos (attiecībā pret šiem attēlojumiem apskatītās īpašības bija invariantās, t.i., neatkarīgas no metrikas). Tagad mēs interesēsimies arī par kopas mērīšanas jautājumiem, pirmām kārtām par kopas mēru. Kopas mērs ir nogriežņa garuma, figūras laukuma, ķermeņa tilpuma jēdzienu vispārinājums. Tas intuitīvi asociējas ar "kopas masu" pie noteikta kopas sadalījuma telpā. Kopas mēra jēdziens parādās reālā mainīgā funkciju teorijā sakarā ar integrāļa jēdziena pētīšanu un vispārināšanu.

Lai patvaļīgai ierobežotai kopai E kopā $\mathbb{R}$ noteiktu mēru, vajag atrast tādu skaitli mE, ko sauc par kopas E mēru, lai izpildītos šādi nosacījumi:

1. Kopas E mērs ir nenegatīvs skaitlis, t.i., $mE \geqslant 0$;
2. Ja kopas E_1 un E_2 ir kongruentas, tad $mE_1 = mE_2$ (invariances īpašība attiecībā uz kustību);
3. Ja $E = \bigcup\limits_k E_k$, kur $E_k \cap E_{k'} = \varnothing$, ja $k \neq k'$, tad $mE = \sum\limits_k mE_k$ (aditivitātes īpašība);
4. Ja $E = [0;1]$, tad $mE = 1$ (etalona izvēle).

Jāatzīmē, ka trešajā nosacījumā, ja $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_{k_1}$, (t.i., sanumurējama jeb pilna aditivitāte), tad izvirzītais uzdevums nav atrisināms pat telpā $R = R_1$.

Ja $E = \bigcup\limits_{k=1}^{n} E_k$, (galīga aditivitāte), tad saskaņā ar Banaha teorēmu, izvirzītajam uzdevumam ir pozitīvs atrisinājums telpās R_1 un R_2, tomēr telpās R_n $(n \geqslant 3)$ uzdevums nav atrisināms (Hausdorfa teorēma) (šeit R_k $(k \in \mathbb{N})$ ir k-dimensiju Eiklīda telpa).

Matemātiskās analīzes kursā apgabaliem, kurus ierobežo slēgts kontūrs, ir ieviests kvadrējamības jēdziens, analoģiski arī kubējamība. Šie jēdzieni ir saistīti ar mēru Žordāno nozīmē, kas pieprasa galīgas aditivitātes īpašības izpildīšanos. Tādā veidā, Žordāno mēra definīcijas apgabals ir gredzens, kas ir slēgts attiecībā pret galīga skaita kopu apvienojumu. Šis fakts būtiski sašaurina Žordāno mēra pielietošanas robežas. Tomēr Žordāno mēra definēšanai ir izcila pedagoģiska loma.

3.1. Garums un laukums

1. Parasti nogriežņa garuma jēdzienu apraksta ar mērīšanas procesu. Par nogriežņa garumu sauc arī attēlojumu $d(\Delta)$, kas ir definēts visu nogriežņu kopā, bet vērtības pieder kopai $\mathbb{R}$ un apmierina šādus nosacījumus:

1. $d(\Delta) > 0$;
2. ja nogriežņi Δ_1 un Δ_2 ir kongruenti, tad $d(\Delta_1) = d(\Delta_2)$;
3. ja diviem nogriežņiem Δ_1 un Δ_2 nav kopīgu iekšējo punktu, tad $d(\Delta_1 \cup \Delta_2) = d(\Delta_1) + d(\Delta_2)$;
4. par nogriežņa Δ_0, kas ir pieņemts par vienības nogriezni, garumu pieņem skaitli 1, t.i., $d(\Delta_0) = 1$.

Tādā veidā, garums $d(\Delta)$ ir funkcija, kura ir definēta visu nogriežņu kopā, pieņem vērtības no $\mathbb{R}$ un apmierina 1-4 nosacījumus. Citiem vārdiem runājot, garumu definē kā attēlojumu $d : \{\Delta\} \to \mathbb{R}$, kas apmierina 1-4 aksiomas.

Atzīmēsim, ka katram fiksētam vienības nogrieznim Δ_0 eksistē viens vienīgs attēlojums $d : \{\Delta\} \to \mathbb{R}$, kas apmierina 1-4 aksiomas. Šī teorēma par eksistenci un vienīgumu atrisina jautājumu par aksiomātikas nepretrunību. Tāpat ir pierādīta šo četru aksiomu pilnība un neatkarība.

2. Kaut gan laukuma jēdziena ieviešana realizējas pēc tās pašas shēmas, tomēr tai ir savas īpatnības. Atšķirībā no garuma, kas tiek definēts jebkuram nogrieznim, laukums netiek definēts jebkurai figūrai, bet tikai speciālu plakano figūru, kuras sauc par kvadrējamām, klasei. Šādu figūru klasi var izvēlēties dažādi, bet jebkurā gadījumā "vienības" kvadrāts pieder apskatāmajai kvadrējamo figūru klasei.

Kvadrējamo figūru vienkāršākā klase ir visu plakanu daudzstūru klase $\{M\}$. Par laukumu daudzstūru kopai $\{M\}$ sauc attēlojumu $Q : \{M\} \to \mathbb{R}$, kuram izpildās šādi nosacījumi:

1. Daudzstūra laukums $Q(M) \geqslant 0$;
2. Ja M_1 un M_2 ir kongruentie daudzstūri, tad $Q(M_1) = Q(M_2)$, t.i., daudzstūru laukumi ir vienādi;
3. Ja diviem daudzstūriem M_1 un M_2 nav kopīgu iekšējo punktu, tad $Q(M_1 \cup M_2) = Q(M_1) + Q(M_2)$;
4. Vienības kvadrāta M_0 laukums $Q(M_0)$ ir vienāds ar 1.

Tāpat ir spēkā apgalvojums, ka fiksētam vienības kvadrātam M_0 eksistē viens vienīgs attēlojums $Q : \{M\} \to \mathbb{R}$, kas apmierina 1-4 nosacījumus. Laukumu teorija attīstās tālāk paplašinot kvadrējamo figūru klasi. Pēc tās pašas shēmas ir izveidota daudzskaldņu tilpumu teorija.

Matemātiskās analīzes kursā tiek apskatīti kvadrējami un kubējami apgabali, balstoties atbilstoši uz daudzstūra laukuma un daudzskaldņa tilpuma jēdzienu. Tā, piemēram, plaknes "apgabalu" mērīšanas definīcija sastāv no šādiem apgalvojumiem:

1. Par apgabala P iekšējo laukumu sauc daudzstūru, kas iekļaujas apgabalā P, laukumu kopas infīmu (augšējo slieksni vai precīzo augšējo robežu).

2. Par apgabala P ārējo laukumu sauc daudzstūru, kas iekļauj sevī apgabalu P, laukumu kopas suprēmu (apakšējo slieksni vai precīzo apakšējo robežu).

3. Ja apgabala P iekšējais un ārējais laukums sakrīt, tad apgabalu P sauc par kvadrējamu, bet iekšējo un ārējo laukumu kopīgo vērtību sauc par apgabala P laukumu.

Patvaļīgas ierobežotas kopas Žordāno mēra definīcijas pamatā ir šī ideja. Apskatīsim šo uzdevumu lineāru kopu gadījumā.

3.2. Kopas Žordāno mērs

Apskatīsim kopā $\mathbb{R}$ ierobežotu kopu E, kura, protams, pieder kādam nogrieznim $[a, b]$.

Sadalīsim nogriezni $[a, b]$ ar punktiem $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ parciālnogriežņos $[x_k, x_{k+1}]$, kur $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Ar A apzīmēsim visu parciālnogriežņu, kas iekļaujas kopā E, garumu summu, bet ar B apzīmēsim visu parciālnogriežņu, kas satur vismaz vienu kopas E punktu, garumu summu. Acīmredzot, $A \leqslant B$.

Nogriezni $[a, b]$ var sadalīt bezgalīgi daudzos veidos. Tad summas A un B, vispārīgi runājot, arī var pieņemt bezgalīgi daudz vērtības. Visu iespējamo A vērtību kopa $\{A\}$ ir ierobežota no augšas, tai eksistē precīza augšējā robeža $\sup\{A\}$, bet visu iespējamo B vērtību kopa $\{B\}$ ir ierobežota no apakšas, tai eksistē $\inf\{B\}$. Tā kā vienmēr $A \leqslant B$, tad $\sup\{A\} \leqslant \inf\{B\}$.

$\sup\{A\}$ sauc par kopas E iekšējo mēru un apzīmē $\underline{m}E$, bet $\inf\{B\}$ sauc par kopas E ārējo mēru un apzīmē $\overline{m}E$. Ja iekšējais un ārējais mērs sakrīt, tad kopu E sauc par mērojamu Žordāno nozīmē, jeb vienkārši mērojamu, bet iekšējā un ārējā mēra kopējo vērtību mE sauc par kopas E Žordāno mēru. Tātad, $\underline{m}E = \overline{m}E = mE$. Ja $\underline{m}E \neq \overline{m}E$, tad kopu E sauc par nemērojamu Žordāno nozīmē.

No Žordāno mēra definīcijas izriet, ka $m[a, b] = b - a$ un $m(a, b) = b - a$. Viegli redzēt, ja kopa E sastāv no galīga skaita intervāliem vai nogriežņiem, kas savstarpēji nešķeļas, tad šīs kopas E mērs ir vienāds ar visu nogriežņu vai intervālu mēru summu. Tukšas kopas mēru pieņem vienādu ar 0. Beidzot, $m[a, a]$=a-a=0, t.i., punkta mērs ir nulle.

Atzīmēsis dažas īpašības:

1. ja kopa $E \subset [a, b]$ ir mērojama, tad arī kopas E papildinājums līdz nogrieznim $[a, b]$, t.i. CE, ir mērojams;

2. ja E_1 un E_2 ir mērojamas kopas bez kopīgiem iekšējiem punktiem, tad to apvienojums arī ir mērojama kopa, pie kam $m(E_1 \cup E_2) = mE_1 + mE_2$;

3. ja kopas E_1 un E_2 ir mērojamas un $E_1 \subseteq E_2$, tad $mE_1 \leqslant mE_2$ (mēra monotonitātes īpašība);

4. ja kopas E_1 un E_2 ir mērojamas, tad arī kopas $E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2$ un $E_1 \setminus E_2$ ir mērojamas.

Pedējā īpašībā, ja izpildās nosacījums $E_2 \subset E_1$, tad $m(E_1 \setminus E_2) = mE_1 - mE_2$.

Mērojamai kopai E ir pozitīvs mērs tad un tikai tad, ja kopai ir vismaz viens iekšējs punkts.

Atzīmēsim šādu mērojamas Žordāno nozīmē kopas pazīmi:

Kopa $E \subset [a, b]$ ir mērojama tad un tikai tad, ja katram $\varepsilon > 0$, eksistē nogriežņa $[a, b]$ tāds sadalījums parciālnogriežņos ar garumu summām A un B, ka $B - A < \varepsilon$.

Pieņemsim, ka dota mērojama netukša kopa $E \subset \mathbb{R}$. Ja katram punktam $x \in E$ un jebkuram nedeģenerētam nogrieznim Δ ar centru punktā x, šķēluma $\Delta \cap E$ mērs ir pozitīvs lielums, tad kopu E sauc par homogēnu. No šejienes seko, ka:

1. jebkura homogēna kopa ir mērojama kopa un tai ir pozitīvs mērs;

2. jebkura netukša, mērojama, vaļēja kopa ir homogēna;

3. jebkuras mērojamas, vaļējas kopas slēgums ir homogēna kopa;

4. galīga skaita homogēnu kopu apvienojums ir homogēna kopa.

Atzīmēsim, ka uz taisnes jebkurš intervāls ir homogēna kopa; taču kopa, kas sastāv no $[0,1]$ un punktiem $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{1}{4}$, $\ldots$, $1+\frac{1}{n+1}$, ..., kaut gan ir mērojama un mērs ir pozitīvs, taču nav homogēna kopa.

Kā jau tika atzīmēts, mēra definīcija Žordāno nozīmē ir pietiekoši šaura. Piemēram, kopa $Q_{[a,b]}$, t.i., visu nogriežņa $[a,b]$ racionālo punktu kopa, nav mērojama Žordāno nozīmē. Tiešām, lai kā mēs nesadalītu $[a,b]$ parciālnogriežņos, nebūs neviena parciālnogriežņa, kas pilnīgi iekļautos kopā $Q_{[a,b]}$, no tā seko, ka $\underline{m}Q_{[a,b]} = 0$. Tajā pašā laikā katrs parciālnogrieznis satur kopas $Q_{[a,b]}$ punktus, no tā seko, ka $\overline{m}Q_{[a,b]} = b-a$. Tātad, $\overline{m}Q_{[a,b]} \neq \underline{m}Q_{[a,b]}$, no kurienes seko, ka kopa $Q_{[a,b]}$ nav mērojama Žordāno nozīmē (sīkāk skat.: [4], 1.9. (lineāru kopu gadījumā); [15] (plakanu un telpisku kopu gadījumā); [6] 1. paragrāfs (n-dimensionālas eiklīda telpas kopas gadījumā)).

3.3. Par integrālrēķinu pamatu izveidi

Integrālrēķini sākumā attīstījās neatkarīgi no diferenciālrēķiniem, bet vēlāk tie kļuva savstarpēji saistīti, jo visas pamatproblēmas ir savstarpēji apgrieztas.

Savstarpējā saikne starp šīm divām matemātiskās analīzes centrālajām nozarēm parādās integrēšanas teorijas loģiskajās konstrukcijās. Vienā gadījumā integrēšanu definē kā operāciju, kas ir apgriezta diferencēšanai, otrā gadījumā abas operācijas definē neatkarīgi, pēc tam norādot to savstarpējo saikni. Konstruējot integrālrēķinu teoriju, diskusijas izraisa jautājums, ar ko sākt izklāstu: ar nenoteiktā integrāļa jēdzienu vai noteiktā integrāļa jēdzienu?

Sākot izklāstu ar nenoteiktā integrāļa jēdzienu, noteikto integrāli pēc tam ievieš ar kādu no šādiem paņēmieniem:

1. kā primitīvās funkcijas pieaugumu nogrieznī definētajai funkcijai;

2. kā integrālsummas robežu;

3. kā augšējā un apakšējā Darbū integrāļu kopējo vērtību;

4. kā funkcijas $f(x)$ primitīvās funkcijas $Q(x)$ vērtību starpību $Q(b)-Q(a)$, ko iegūst, izmantojot nenoteiktā integrāļa ģeometrisko interpretāciju - līklīniju trapeces laukums intervālā $[a,x]$, kur $x=b$ ir fiksēts labais galapunkts.

Sākot izklāstu ar noteiktā integrāļa jēdzienu, tālāk visbiežāk integrāli definē kā integrālsummas robežu, atzīmējot, ka tieša integrāļu aprēķināšana ir ļoti sarežģīts uzdevums, tāpēc integrāļa aprēķināšanai nepieciešams sameklēt vienkāršākas metodes. Pēc tam definē primitīvo funkciju un Ņūtona-Leibnica formulu noteiktā integrāļa aprēķināšanai.

Šie izklāsta veidi ir līdzvērtīgi no formālās loģikas viedokļa, tomēr tie ļoti atšķiras no pedagoģiskā viedokļa. Ja izklāsta primārais mērķis ir dot loģisko priekšstatu un idejas, kas ir to pamatā, tad būtu lietderīgi integrālrēķinu teoriju sākt ar uzdevumu, atrast diferencēšanai apgriezto operāciju, kas noved pie primitīvās funkcijas un noteiktā integrāļa jēdziena. Ja teorijas pasniegšanas mērķis ir uzsvērt integrēšanas praktisko pielietojumu, tad izklāstu varētu sākt ar noteiktā integrāļa jēdzienu. Protams, šos ieteikumus nevajag uztvert pārāk kategoriski.

Mācot matemātiku vidusskolā, vienādi svarīgi ir parādīt ne tikai matemātikas loģisko uzbūvi, bet arī praktisko pielietojumu. Tomēr būtu lietderīgi dot priekšroku pirmajai tradicionālai integrālrēķinu teorijas izklāsta shēmai, kura ir realizēta gandrīz visās augstskolas mācību grāmatās. Jau diferencējot funkciju rodas doma par apgrieztas operācijas eksistenci, tādā veidā integrēšana dabiski parādās kā diferencēšanas apgrieztā operācija. Tādējādi, kad nonāk pie integrēšanas praktiskā pielietojuma, jau ir apgūta integrēšanas tehnika. Beidzot, tāda pieeja ir ne tikai integrālrēķinu pamatā, bet arī diferenciālvienādojumu teorijas pamatā.

3.4. Integrālis

1. Visbiežāk, pirms noteiktā integrāļa definēšanas, apskata dažus konkrētus uzdevumus. Piemēram, tādus: ķermeņa noietā ceļa aprēķināšana; mainīga lieluma spēka veiktā mehānikā darba aprēķināšana; līklīnijas trapeces laukuma aprēķināšana, un citus uzdevumus, risinot kurus, izmanto, pēc būtības, vienu un to pašu matemātisko metodi. Šī metode ir konkrēta veida summas robežas noteikšana. Pēc tam no konkrēta uzdevumu risināšanas pāriet uz tā atrisināšanas metodes analītiskās struktūras analīzi. Nogrieznī $[a, b]$ ierobežotas funkcijas $f(x)$ noteikto integrāli $\int\limits_a^b f(x)dx$ definē kā integrālsummas $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$ robežu (ja tāda eksistē), pie nosacījuma, ka $\max \Delta x_k \to 0$. Šo shēmu sauc par integrēšanu Rīmaņa nozīmē, bet pašu integrāli sauc par Rīmaņa integrāli.

Tāda konstruktīva pieeja nodrošina, pirmkārt, šī jēdziena būtības izpratni, otrkārt, saglabā vienotību viendimensijas un daudzdimensijas integrāļu definēšanā.

Īpašu uzmanību jāpievērš integrālsummas $\sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$ robežai, ja $\lambda = \max \Delta x_k \to 0$. Šī robežpāreja ir pietiekoši sarežģīta un savdabīga. Procesu, kad integrālsumma (Rīmaņa) tiecas uz savu robežu, pie nosacījuma, ka $\lambda \to 0$, grūti paskaidrot, pamatojoties uz kādu vienu mainīgo (neatkarīgo), kā bija darīts agrāk. No pirmā acu uzmetiena liekas, ka par tādu mainīgo var paņemt λ, tomēr integrālsumma nav viennozīmīga argumenta λ funkcija, tāpēc, ka katrai izvelētai λ vērtībai atbilst bezgalīgi daudz dažādu "sadalījumu" (T). Ja nolemtu fiksēt arī sadalījumu, tad vienalga punktu ξ_k izvēli parciālnogriežņos var veikt bezgalīgi daudzos veidos.

Funkcijas f integrālsumma $\sigma = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$ ir nogriezņa $[a, b]$ "sadalījuma" T un punktu ξ_k funkcija. Skaitli $I = \int\limits_a^b f(x)dx$ sauc par summas σ robežu, kad $\lambda(T) \to 0$, ja katram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $\delta > 0$, ka jebkuram sadalījumam T, kuram $\lambda(T) < \delta$, un pie jebkuras punktu $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ izvēles izpildās nevienādība $|I - \sigma| < \varepsilon$.

Atzīmēsim, ka, lai I būtu σ robeža, nepieciešams, lai katram $\varepsilon > 0$ eksistētu tāds $\delta > 0$, lai pie $\lambda(T) < \delta$ izpildītos bezglīgi daudzas nevienādības $|I-\sigma| < \varepsilon$, katra no kurām atbilst vienam punktu ξ_k izvēles variantam atbilstošajos parciālnogriežņos ($\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$).

Sadalījumu T, kuram katrā parciālnogrieznī $[x_k, x_{k+1}]$ ir izvēlēts patvaļīgs punkts ξ_k $(k = 0,\ 1,\ 2, \ldots, n-1)$, sauc par "sadalījumu ar atzīmētiem punktiem". Skaitli I sauc par integrālsummas σ robežu, kad $\lambda(T) \to 0$, ja katram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $\delta > 0$, ka katram sadalījumam ar atzīmētiem punktiem, kuram $\lambda(T) < \delta$, izpildās nevienādība $|I - \sigma| < \varepsilon$.

2. Definīcijai "$\varepsilon - \delta$ valodā" var dot ekvivalentu definīciju "virkņu valodā". (skat. [12], 32. paragrāfs)

3. Pierādot teorēmu par to, ka katrai nogrieznī $[a, b]$ nepārtrauktai funkcijai eksistē primitīvā funkcija, kā zināms, apskata funkciju $\varphi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, kur $a \leqslant x \leqslant b$, un kura ir viena no funkcijas $f(x)$ primitīvajām funkcijām nogrieznī $[a, b]$. Tomēr $f(x)$ primitīvās funkcijas φ un F atšķiras par konstanti, tātad, $\varphi(x) - F(x) = C$. Ja $x = a$, tad iegūsim

$\varphi(a) - F(a) = C$. Tā kā $\varphi(a) = 0$, seko $C = -F(a)$. Tāpēc

$$\int\limits_a^x f(t)dt = \varphi(x) = F(x) + C = F(x) - F(a).$$

Tādā veidā, $\int\limits_a^x f(t)dt$ ir funkcijas f tāda primitīvā funkcija, kura vienāda ar nulli, ja $x = a$. Šeit noteiktais integrālis $\int\limits_a^x f(t)dt$ ir primitīvā funkcija, bet lielums $\int\limits_a^b f(t)dt$ ir šīs primitīvās funkcijas parciālā vērtība, ja $x = b$.

4. Eksistē arī citi noteiktā integrāļa uzdošanas paņēmieni. Integrāli var apskatīt kā intervālā aditīvu funkciju. (skat. [10], 9. nod.) Var izmantot arī integrāļa aksiomātiskās uzdošanas iespēju. Pieņemsim, ka katrai gabaliem nepārtrauktai funkcijai $f(x)$ nogriezni $[A, B]$ un katram nogrieznim $[a, b] \subset [A, B]$ atbilst skaitlis $I_a^b(f)$, kuram izpildās šādi nosacījumi:

1. katrai konstantei $k \in \mathbb{R}$ izpildās vienādība $I_a^b(kf) = kI_a^b(f)$;
2. jebkurām gabaliem nepārtrauktām funkcijām f un φ izpildās vienādība:

$$I_a^b(f) + I_a^b(\varphi) = I_a^b(f + \varphi);$$

3. $I_a^b(1) = b - a$;
4. jebkuriem $a < c < b$ izpildās vienādība $I_a^b(f) = I_a^c(f) + I_c^b(f)$;
5. eksistē tāda konstante k, ka izpildās nevienādība:

$$|I_a^b(f)| \leqslant k \sup_{[a,b]} |f|.$$

Jebkurai gabaliem nepārtrauktai funkcijai f izteiksmi $I_a^b(f)$, kurai izpildās šie pieci nosacījumi, sauc par šīs funkcijas noteikto integrāli intervālā $[a, b]$ un apzīmē $\int\limits_a^b f(x)dx$.

5. Bieži, definējot noteikto integrāli, Rīmaņa integrālsummas sarežģīto robežpāreju aizvieto ar citu tai ekvivalentu shēmu, ko nosacīti sauc par "Darbū shēmu". Izmantojot to, sākumposmā var iztikt bez robežpārejas. Nogrieznī $[a, b]$ apskata nepārtrauktu funkciju $f(x)$ un patvaļīgam sadalījumam T konstruē divas Darbū summas: apakšējo $\underline{S}_T = \sum\limits_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k$ un augšējo $\overline{S}_T = \sum\limits_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k$ Darbū summu, kur m_k un M_k ir atbilstoši funkcijas $f(x)$ precīzā apakšējā un augšējā robeža intervālā $[x_k, x_{k+1}]$. Šīs summas, atšķirībā no integrālsummām, ir atkarīgas tikai no sadalījuma T. Jebkuram sadalījumam iegūtās kopas $\{\underline{S}\}$ un $\{\overline{S}\}$ ir ierobežotas. Šīm kopām eksistē $\underline{I} = \sup\{\underline{S_T}\}$ un $\overline{I} = \inf\{\overline{S}_T\}$, ko atbilstoši sauc par apakšējo un augsējo Darbū integrāli. Ja izpildās vienādība $\underline{I} = \overline{I}$, tad šo kopējo vērtību sauc par funkcijas $f(x)$ noteikto integrāli nogrieznī $[a, b]$ un apzīmē $\int\limits_a^b f(x)dx$.

6. Rīmaņa integrāļa jēdzienu var apskatīt arī izmantojot jēdzienus robeža pēc virziena un robeža pēc bāzes. (skat. [18], 301. lpp. un [8],1. sējums, 337.-338. lpp.)

7. Kā zināms no matemātiskās analīzes kursa, funkcijas f ierobežotība nogrieznī $[a, b]$ ir integrējamības nepieciešamā pazīme; funkcijas f nepārtrauktība nogrieznī $[a, b]$ ir integrējamības pietiekamā pazīme. Ierobežotas funkcijas f nogrieznī $[a, b]$ integrējamības nepieciešamā un pietiekamā pazīme ir nosacījuma $\lim\limits_{\lambda \to 0} \overline{S}_T = \lim\limits_{\lambda \to 0} \underline{S}_T$ izpildīšanās. Pēdējā vienādība ir līdzvērtīga nosacījumam $\lim\limits_{\lambda \to 0} \left(\overline{S}_T - \underline{S}_T\right) = 0$, bet tā kā

$$\overline{S}_T - \underline{S}_T = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k)\Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} w(f, \triangle_k)\triangle x_k,$$

kur $\Delta_k = [x_k, x_{k+1}]$ ir sadalījuma parciālnogriežņi, seko, ka nogrieznī $[a, b]$ ierobežota funkcija f ir integrējama Rīmaņa nozīmē tad un tikai tad, ja $\lim\limits_{\lambda \to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega(f, \Delta_k)\Delta x_k = 0$. (Integrējamības Rīmaņa nozīmē kritērijs).

Funkcijas nepārtrauktība nogrieznī garantē tās integrējamību šajā nogrieznī. Tomēr eksistē ierobežotas funkcijas ar pārtraukuma punktiem, kas ir integrējamas Rīmaņa nozīmē. Kā piemēru var minēt pārtrauktas nogrieznī monotonas funkcijas. Kā arī var konstruēt ierobežotu, bet nogrieznī neintegrējamu funkciju. Piemēram, funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{ja} \quad x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{ja} \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

nav integrējama nogrieznī $[0, 1]$, tāpēc, ka

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = \begin{cases} 1, & \text{ja} \quad \xi_k \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{ja} \quad \xi_k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

bet tas nozīmē, ka σ robeža neeksistē.

Pie nogriežņa $[a, b]$ sadalījuma parciālnogriežņos un punktu $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ izvēles tika prasīts, lai eksistētu robeža $\sigma = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k$, kas nebūtu atkarīga no punktu $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ izvēles. Punkts ξ_k var būt jebkurš nogriežņa $[x_k, x_{k+1}]$ punkts, tomēr ξ_k izvēle nedrīkst būtiski ietekmēt σ vērtību. To var panākt, ja pietiekoši tuvi punkti ξ_k un ξ'_k nogrieznī $[x_k, x_{k+1}]$ nodrošina lielumu $f(\xi_k)$ un $f(\xi'_k)$ nelielu atšķirību. To var sagaidīt, ja funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta nogrieznī $[a, b]$. Ja funkcija $f(x)$ ir pārtraukta, nevar garantēt, ka, ja $\lambda \to 0$, eksistē σ robeža; šajā gadījumā abscisu tuvums ne vienmēr nodrošina ordinātu nepieciešamo tuvumu.

Rodas jautājums: cik lielā mērā ir pieļaujama funkcijas pārtrauktība un kādai jābūt funkcijas pārtraukumu punktu kopai, lai funkcija būtu integrējama? Pamēģināsim to noskaidrot.

Jau pagājušā gadsimta sākumā Lebegs vispārināja mēra jēdzienu, tādā veidā paplašinot mērojamu kopu klasi. Saskaņā ar Lebegu, kopas E ($E \subset \mathbb{R}$) mērs ir 0, (kopa E ir nulles mēra kopa), ja katram $\varepsilon > 0$ eksistē kopas E pārklājums, kas ir ne vairāk kā sanumurējama intervālu, kuras garumu summa nepārsniedz ε, sistēma.

Viegli redzēt, ka viens punkts un kopa, kas sastāv no galīga punktu skaita, ir nulles mēra kopas. Arī nulles mēra kopu ne vairāk kā sanumurējams apvienojums ir nulles mēra kopa. Nulles mēra kopas apakškopa ir nulles mēra kopa.

Saskaņā ar integrējamības kritēriju, summa $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega(f, \Delta_k)\Delta x_k$ var būt maza, jo reizinātāji $\omega(f, \Delta_k)$ var būt mazi funkcijas nepārtrauktības punktu pietiekoši mazās apkārtnēs. Gadījumā, ja daži nogriežņi Δ_k satur pārtraukuma punktus, tiem $\omega(f, \Delta_k)$ netiecās uz nulli, lai arī cik sīki nesadalītu nogriezni $[a, b]$.

Līdz ar to, $\omega(f, \Delta_k) \leqslant \omega(f, [a, b]) < +\infty$, tāpēc, ka funkcija f ir ierobežota nogriezn $[a, b]$. Saskaņā ar to, summas $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \omega(f, \Delta_k)\Delta x_k$ to saskaitāmo, kas satur pārtraukuma punktus, summa var būt arī pietiekoši maza, ja sadalījuma parciālnogriežņu, kas pārklāj pārtraukuma punktu kopu, garumu summa ir maza. Atzīmēsim, ka reizinātāja $\omega(f, \Delta_k)$ palielināšanās dažiem sadalījuma parciālnogriežņiem Δ_k, kaut kādā mērā, var kompensēt ar otra reizinātāja Δx_k samazināšanos.

Balstoties uz šo spriedumu, izvirza versiju, ka funkcija f var būt integrējama Rīmaņa nozīmē nogriezn $[a, b]$, ja šajā nogriezn funkcijas pārtraukuma punktu kopas mērs ir nulle. Tas arī ir Lebega integrējamības kritērija pamatā. Lebega integrējamības kritērijs: lai nogriezn $[a, b]$ ierobežota funkcija f būtu integrējama, nepieciešami un pietiekami, lai šīs funkcijas pārtraukumu punktu kopas mērs Lebega nozīmē būtu nulle. Šajā gadījumā saka, ka nogriezn $[a; b]$ ierobežotai funkcijai f jābūt gandrīz visur nepārtrauktai nogriezn $[a, b]$, lai tā būtu integrējama šajā nogriezn. (pierādījumu sk. [4], 3.8.)

8. Pieņemsim, ka kopa E ir patvaļīga lineārā kopa uz $[a, b]$. Apskatīsim funkciju

$$e(x) = \begin{cases} 1, & \text{ja} \quad x \in E, \\ 0, & \text{ja} \quad x \in [a, b] \setminus E. \end{cases}$$

Šo funkciju, kas ir definēta nogriezn $[a, b]$, sauc par kopas E raksturfunkciju kopā $[a, b]$.

Saikni starp raksturfunkcijas Rīmaņa integrāli un kopas E Žordāno mēru raksturo šāda teorēma: lineāras kopas $E \subset [a, b]$ raksturfunkcijas apakšējais Darbū integrālis $\underline{I}$ ir vienāds ar $\underline{m}E$, bet augšējais Darbū integrālis $\overline{I}$ ir vienāds ar $\overline{m}E$. Tik tiešām, funkcijas $e(x)$ uz $[a, b]$ augšējā Darbū summa ir $\overline{S}_T = \sum\limits_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k$, tā ir sadalījuma parciālintervālu (x_k, x_{k+1}), kas satur vismaz vienu kopas E punktu, garumu summa. No tā seko, ka, ja $\lambda \to 0$, tad summa $\overline{S}_T$ tiecas uz $\overline{m}E$, no otras puses, $\overline{S}_T$ tiecas uz $\overline{I}$, (ja $\lambda \to 0$) t.i., $\overline{I} = \overline{m}E$.

Tādā pašā veidā var parādīt, ka $\underline{I} = \underline{m}E$.

Ja teorēmas nosacījumos $\underline{I} = \overline{I}$, tas ir, ja kopas E uz $[a, b]$ raksturfunkcija $e(x)$ ir integrējama Rīmaņa nozīmē, tad kopa E ir mērojama un $mE = \int\limits_a^b e(x)dx$.

Šī formula rāda saikni starp Žordana mēru un Rīmaņa integrāli.

9. Pielietojot noteikto integrāli ģeometrijas un fizikas uzdevumu risināšanā, tiek izmantotas divas shēmas. Pirmā shēma definē integrāli kā integrālsummas robežu, bet otrā darbojas tā, ka vispirms sastāda sakarību starp apskatāmo lielumu diferenciāļiem, bet pēc tam ar formulas $\int\limits_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$ palīdzību pāriet uz sakarību starp pašiem lielumiem.

Pirmā shēma aplūko integrāli, kā bezgalīgi daudzu bezgalīgi mazo lielumu summu, bet otrā shēma apgalvo, ja integrālis, kas ir vienāds ar kāda lieluma bezgalīgi mazo pieaugumu summu, ir vienāds ar šī lieluma pilno pieaugumu.

3.5. Integrāļa vispārīgā ideja

1. Pieņemsim, ka E ir ierobežota mērojama kopā Eiklīda telpā $\mathbb{R}_n$ (tā var būt taisne, plakne, trijdimensiju telpa). Par kopas E sadalījumu T nosauksim jebkuru tās izteikšanu, kā pa pāriem nepārklājamu mērojamu kopu e_k galīgu apvienojumu, t.i., $E = \bigcup\limits_{k=0}^{n-1} e_k$. Mērojamas kopas e_k ($k = 1,\ 2, \ldots,\ n-1$) sauksim par "parciālkopām" jeb "šūnām". Par piemēru var kalpot nogriežņa $[a, b]$ sadalījums parciālnogriežņos Δ_k ar punktiem
$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

Skaidrs, ka $mE = \sum\limits_{k=0}^{n-1} me_k$.

Dotajam sadalījumam T ar $\lambda(T)$ apzīmēsim maksimālo no nenegatīviem skaitļiem $d_0,\ d_1,\ d_2, \ldots,\ d_{n-1}$, kur $d_k = \operatorname{diam} e_k$. Par fiksētā sadalījuma T soli nosauksim $\lambda(T) = \max d_k$.

3.1. piezīme. Ja kopa E ir homogēna, tad katram $\varepsilon > 0$ eksistē šīs kopas tāds sadalījums ar soli mazāku par ε, ka katra šūna ir pozitīva mēra kopa. Ja pie tam kopa E ir slēgta kopa, tad var konstruēt sadalījumu, kura šūnas arī ir slēgtas kopas.

Pieņemsim, ka doti divi sadalījumi T un T'. Sadalījumu T' sauc par sadalījuma T turpinājumu, ja katra sadalījuma T' šūna iekļaujās kādā sadalījuma T šūnā. Acīmredzot, sadalījuma T' solis nepārsniedz sadalījuma T soli. Atzīmēsim, ka, ja T un T' ir divi dažādi mērojamas kopas E sadalījumi, tad eksistē sadalījums T'', kas ir gan T, gan T' turpinājums.

Pieņemsim, ka apskatāmajā kopā E ir definēta funkcija $f(x)$, kur $E = \bigcup\limits_{k=0}^{n-1} e_k$, un e_k ir netukšas pa pāriem nepārklājamas šūnas. Katrā šūnā e_k izvēlēsimies punktu P_k. Summu $\sigma = \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(P_k) me_k$ sauc par funkcijas f integrālsummu mērojamā kopā E. Šī summa ir atkarīga no f, no E, no sadalījuma T, no punktu P_k izvēles.

Ja pie $\lambda(T) = \max d_k \to 0$ visas integrālsummas (neatkarīgi no punktu P_k izvēles) neeierobežoti tuvojas konkrētam skaitlim, šo skaitli sauc par integrālsummas robežu.

Skaitli I sauc par funkcijas f integrālsummas σ robežu (ja $\lambda \to 0$), ja katram $\varepsilon > 0$ eksistē $\delta > 0$, ka katram kopas E sadalījumam T ar soli $\lambda(T) < \varepsilon$, un katrai punktu P_k izvēlei izpildās nevienādība $|I - \sigma| < \varepsilon$.

Ja funkcijai f eksistē integrālsummas robeža, tad funkciju sauc par integrējamu kopā E. Funkcijas f integrālsummas robežu sauc par funkcijas f integrāli kopā E un apzīmē $\int\limits_E f(x)dx$. Tātad

$$\int\limits_E f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(P_k) me_k.$$

Integrāļa teorijas konstruēšana uz šādas abstraktas bāzes (šo shēmu var realizēt ļoti vispārinātās telpās) ļauj pēc tam apskatīt parastos, divkāršos un citus specifiskos integrāļus, kā šīs teorijas speciālgadījumu. Gadījumā, kad $E = [a, b] \subset \mathbb{R}$, bet $f(x)$ ir viena mainīgā reālā funkcija, mēs iegūsim viendimensiālo integrāli $\int\limits_{[a,b]} f(x)dx$, jeb, kā parasti to apzīmē, $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Šajā vispārīgajā shēmā jautājumu par noteiktā integrāļa eksistenci atrisina tāpat, kā ierobežotai funkcijai nogrieznī, proti ar teorēmas palīdzību: lai ierobežota funkcija $f(x)$ būtu integrējama mērojamā kopā E, nepieciešami un pietiekami, lai katram $\varepsilon > 0$ eksistētu $\delta > 0$, ka katram kopas E sadalījumam T ar soli $\lambda(T) < \delta$, būtu spēkā nevienādība $\overline{S}_T - \underline{S}_T < \varepsilon$ (kur $\overline{S}_T$ un $\underline{S}_T$ ir Darbū summas). Ir spēkā arī šāda svarīga pietiekamā pazīme: ja funkcija $f(x)$ ir ierobežota mērojamā kopā E un tās pārtraukuma punktu kopa ir mērojama un tās mērs ir nulle, tad funkcija $f(x)$ ir integrējama kopā E (šeit kopa E mērojama Žordāno nozīmē). No šīs teorēmas seko, ka mērojamā kopā nepārtraukta funkcija, kā arī mērojamā kopā ierobežota funkcija ar galīgu pārtraukuma punktu skaitu, ir integrējamas.

2. Pēc A. Hinčina, uzbūvēsim integrēšanas procesa abstraktu fizisko ainu. ([17])

Pieņemsim, ka kopā E ir sadalīta kāda matērija (masa, elektriskais lādiņš utt.), kuras porcijas atbilst katrai kopas E daļai e_k. Matērijas kopējais daudzums $F(E)$, katra kopas E sadalījumam, "summējas" no matērijas porcijām, kas atbilst katrai šūnai e_k:

$$F(E) = F(e_0) + F(e_1) + \cdots + F(e_{n-1}).$$

Uzskicētās shēmas reālai interpretācijai ir svarīgs jēdziens kopas E "matērijas blīvums punktā P". To nosaka noteikts diferencējošais process. Ja par e nosauksim patvaļīgu kopas E daļu, kurai eksistē mērs me, tad attiecību $\frac{F(e)}{me}$ var nosaukt par matērijas vidējo blīvumu kopā e. Pieņemsim, ka P ir patvaļīgs kopas e punkts. Ap P izveidosim apkārtni U ar pietiekami mazu diametru $d(U)$, matērijas vidējais blīvums apkārtnē U raksturo matērijas koncentrāciju punkta P pietiekoši mazā apkārtnē. Ja vidējam blīvumam eksistē robeža $f(P)$, kad $d(U) \to 0$, tad šo robežu sauc par matērijas blīvumu punktā P.

Pieņemsim, ka katrā kopas E punktā P matērijas sadalījuma blīvums ir $f(P)$, un vajag noteikt pilno matērijas daudzumu $F(E)$, kas ir sadalīts kopā E. Tad, sadalot kopu E šūnās e_k $(k = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n-1)$, katrā šūnā izvēlēsimies tādu patvaļīgu punktu P_k, ka $f(P_k)$ ir attiecības $\frac{F(e_k)}{me_k}$ robeža, ja neierobežoti samazina kopas e_k pie nosacījuma, ka joprojām punkts $P_k \in e_k$. Tādā veidā, pie pietiekoši mazām kopām e_k un pie patvaļīgi maza $\varepsilon > 0$ izpildīsies nevienādība

$$\left| f(P_k) - \frac{F(e_k)}{me_k} \right| < \varepsilon,$$

jeb

$$F(e_k) - \varepsilon me_k < f(P_k)me_k < F(e_k) + \varepsilon me_k,$$

ja $k = 0,\ 1,\ 2, \ldots,\ n-1$.

Sasummējot šīs nevienādības, iegūsim

$$F(E) - \varepsilon mE < \sum_{k=0}^{n-1} f(P_k)me_k < F(E) + \varepsilon mE.$$

Neierobežoti samazinoties šūnu diametriem, summas $\sum_{k=0}^{n-1} f(P_k)me_k$ robeža tiecas uz lielumu $F(E)$, kas ir kopējais matērijas daudzums, kas ir sadalīts kopā E.

Skaidrs, ka matērijas kopējo daudzumu $F(E)$ atrod izmantojot matērijas blīvumu $f(P)$ punktā P. To var izdarīt ar integrēšanas procesa palīdzību (E sadala šūnās e_k, izvēlas punktus P_k, sastāda summu $\sum_{k=0}^{n-1} f(P_k)me_k$ un veic robežpāreju), kura formālais apraksts ir paragrāfa sākumā.

LITERATŪRA

[1] S. Abbott. Understanding analysis, Springer, 2001.

[2] R. Beals. Analysis: An Introduction, Cambridge University Press, 2004.

[3] G.R. Exner. Inside Calculus, Springer, 1999.

[4] A. Gricāns, V. Starcevs. Lebega mērs un integrālis. - Daugavpils: izd."Saule", 2004. - 292 lpp.

[5] M.H. Protter. Basic Elements of Real Analysis, Springer, 1998.

[6] V. Starcevs. Mērojamas kopas un integrālis. - Rīga: LVU, 1982.

[7] Н. Бурбаки. Общая топология (основные структуры). - М.: Наука, 1968.

[8] В.А. Зорич. Математический анализ. Т.1, Т.2 - М.: Наука, т.1-1981, т.2-1982.

[9] В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х. Сендов. Математический анализ. - М., 1979.

[10] А.Н. Колмагоров, С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. - М., 1969.

[11] Н.Н. Лизин. Теория функций действительного переменного. - М.:ГУПИ, 1948.

[12] Л.Д. Кудрявцев. Краткий курс математического анализа. - М.; Наука, 1989.

[13] И.Г. Натансон. Теория функций вещественной переменной. - М., 1974.

[14] Д.А. Райков. Одномерный математический анализ. - М.: Вышая школа, 1982.

[15] В.А. Рохлин. Площадь и объем. Энциклопедия элементарной математики. Т.V. - М.: Наука, 1966.

[16] Г.М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. в 3 т. - М.: Наука, 1969.

[17] А.Л. Хинчин. Восемь лекций по математическому анализу. - М., 1948.

[18] Г.Е. Шилов. Математический анализ (функции одного переменного). Ч.1-2 - М.: Наука, 1961.

SATURS