DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE

MATEMĀTIKAS KATEDRA

Vallija Gedroica

VIENA ARGUMENTA FUNKCIJU INTEGRĀLRĒĶINI

2004

ANOTĀCIJA

Mācību līdzeklis satur īsu teorijas izklāstu un uzdevumus no tēmām, kas atbilst matemātiskās analīzes kursa programmai. Darbā iekļauti uzdevumu atrisināšanas paraugi, auditorijā un mājās atrisināmie uzdevumi. Pielikumā apkopoti uzdevumi studentu individuālajam darbam. Auditorijā risināmie uzdevumi un mājas darba uzdevumi ir sanumurēti katrai tēmai atsevišķi.

1. nodaļa

NENOTEIKTAIS INTEGRĀLIS

1.1. Primitīvā funkcija un nenoteiktais integrālis

Integrālrēķinu pamatuzdevums ir pēc funkcijas atvasinājuma atjaunot pašu funkciju.

1.1. definīcija. Funkciju $F(x)$ sauc par **funkcijas** $f(x)$ **primitīvo funkciju intervālā** $(a;b)$, ja katrā šī intervāla punktā tās atvasinājums ir vienāds ar $f(x)$, t.i., visiem $x \in (a;b)$ $F'(x) = f(x)$.

Acīmredzot, funkcijai $f(x)$ primitīvo funkciju dotajā intervālā var atrast ar precizitāti līdz konstantam saskaitāmajam, pie tam funkcijas jebkuras divas primitīvās funkcijas var atšķirties tikai ar konstanti.

1.2. definīcija. Funkcijas $f(x)$ visu primitīvo funkciju kopu intervālā $(a;b)$ sauc par **nenoteikto integrāli** un apzīmē ar simbolu $\int f(x)dx$.

Tātad

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Nenoteiktā integrāļa atrašanu sauc par integrēšanu. Nenoteiktajam integrālim piemīt šādas **īpašības**:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x);$

2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$

3. $\displaystyle\int dF(x) = F(x) + C;$

4. $\displaystyle\int F'(x)dx = F(x) + C;$

5. $\displaystyle\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, ($k$=const, $k \neq 0$);

6. $\displaystyle\int \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$

Lai integrētu, ir jāzina pamatintegrāļu tabula:

$$1.\ \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1);$$
$$2.\ \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$
$$3.\ \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C;$$
$$\int e^x dx = e^x + C;$$
$$4.\ \int \cos x dx = \sin x + C;$$
$$5.\ \int \sin x dx = -\cos x + C;$$
$$6.\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$
$$7.\ \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$$
$$8.\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C;$$
$$9.\ \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C;$$
$$10.\ \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C;$$
$$11.\ \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C;$$
$$12.\ \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$$

$$13.\ \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

Lai atvieglotu integrēšanu, pamatintegrāļu tabulu var papildināt ar šādiem biežāk sastopamiem integrāļiem:

$$14.\ \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C;$$

$$15.\ \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C;$$

$$16.\ \int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C;$$

$$17.\ \int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C;$$

$$18.\ \int \sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C;$$

$$19.\ \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^3}\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{ax}{a^2+x^2}\right) + C;$$

$$20.\ \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$$

$$21.\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C;$$

$$22.\ \int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C;$$

$$23.\ \int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\frac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right| + C.$$

1.1. piemērs. Atrast integrāli $\displaystyle\int \frac{dx}{6x^5}$. Veikt pārbaudi.

$\int \frac{dx}{6x^5} = \frac{1}{6}\int x^{-5}dx = \frac{1}{6}\cdot\frac{x^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{24x^4} + C.$

Pārbaude. $\left(-\frac{1}{24x^4} + C\right)' = \left(-\frac{1}{24}x^{-4}\right)' + C' = -\frac{1}{24}\left(-4x^{-5}\right) = \frac{1}{6x^5}.$

1.2. piemērs. Atrast $\int\left(4x^3 - 2\sin x + \frac{3}{\sin^2 x}\right)dx$. Veikt pārbaudi.

$$\int\left(4x^3 - 2\sin x + \frac{3}{\sin^2 x}\right)dx = 4\int x^3dx - 2\int \sin x dx + 3\int\frac{dx}{\sin^2 x} =$$
$$= 4\frac{x^4}{4} + C_1 - 2(-\cos x) + C_2 + 3(-\operatorname{ctg} x) + C_3 = x^4 + 2\cos x - 3\operatorname{ctg} x + C,$$

kur $C = C_1 + C_2 + C_3$ (parasti patvaļīgu konstanšu summa tiek aizstāta ar vienu konstanti).

Pārbaude. $\left(x^4 + 2\cos x - 3\operatorname{ctg} x + C\right)' = 4x^3 - 2\sin x + \frac{3}{\sin^2 x}$.

1.2. Integrēšanas pamatmetodes

Ir šādas **integrēšanas pamatmetodes**:

1. zemintegrāļa funkcijas sadalīšana saskaitāmajos,
2. parciālā integrēšana,
3. substitūciju metode (integrēšana ar mainīgā aizvietošanu).

1. Šīs metodes būtību atklāj tās nosaukums, to var uzskatāmi ilustrēt ar piemēriem.

1.3. piemērs. Atrast $\displaystyle\int \frac{x\sqrt{x} + x^3 - 5}{x^2\sqrt{x}} dx$.

$$\int \frac{x\sqrt{x} + x^3 - 5}{x^2\sqrt{x}} dx = \int \left(\frac{1}{x} + \sqrt{x} - \frac{5}{x^2\sqrt{x}}\right) dx =$$
$$= \int \frac{dx}{x} + \int x^{\frac{1}{2}} dx - 5\int x^{-\frac{5}{2}} dx = \ln|x| + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 5\frac{x^{-\frac{3}{2}}}{-\frac{3}{2}} + C =$$
$$= \ln|x| + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{10}{3} \cdot \frac{1}{x\sqrt{x}} + C.$$

1.4. piemērs. Atrast $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x dx$.

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx =$$
$$= \operatorname{tg} x - x + C.$$

1.5. piemērs. Atrast $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2 - 4} dx$.

$$\int \frac{x^4}{x^2-4}dx = \int \frac{\left(x^4-16\right)+16}{x^2-4}dx = \int \left(\frac{x^4-16}{x^2-4} + \frac{16}{x^2-4}\right) dx =$$
$$= \int \frac{\left(x^2-4\right)\left(x^2+4\right)}{x^2-4}dx + 16\int \frac{dx}{x^2-4} =$$
$$= \int \left(x^2+4\right) dx + 16\int \frac{dx}{x^2-2^2} = \frac{x^3}{3} + 4x + 4\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C.$$

1.6. piemērs. Atrast $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)}$.

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)} = \int \frac{\left(x^2+2\right)-\left(x^2+1\right)}{(x^2+1)(x^2+2)}dx =$$
$$= \int \frac{x^2+2}{(x^2+1)(x^2+2)}dx - \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)(x^2+2)}dx =$$
$$= \int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{x^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} = \operatorname{arctg} x - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

2. Parciālās integrēšanas būtību izsaka formula:

$$\boxed{\int u dv = uv - \int v du,}$$

kur $u = u(x)$ un $v = v(x)$ ir intervālā $\mathfrak{I}$ diferencējamas funkcijas.

Šī formula dod iespēju no integrāļa $\int u(x)dv(x)$ pāriet uz integrāli $\int v(x)du(x)$, kas nav sarežģītāks par doto (pie pareizas funkcijas u un diferenciāļa dv izvēles).

1.7. piemērs. Atrast $\int x \sin x dx$.

$$\int x\sin x dx = \left|\begin{array}{c} u = x,\ du = dx, \\ dv = \sin x dx,\ v = -\cos x \end{array}\right| =$$
$$= x(-\cos x) - \int (-\cos x)dx =$$
$$= -x\cos x + \int \cos x dx = -x\cos x + \sin x + C.$$

Parciālās integrēšanas formulu var pielietot arī vairākkārtīgi.

1.8. piemērs. Atrast $\int \left(x^2+1\right) e^x dx$. Veikt pārbaudi.

$$\int \left(x^2+1\right) e^x dx = \left| \begin{array}{c} u = x^2+1,\ du = 2xdx, \\ dv = e^x dx,\ v = e^x \end{array} \right| =$$

$$= \left(x^2+1\right) e^x - \int e^x 2xdx = \left| \begin{array}{c} u = 2x,\ du = 2dx, \\ dv = e^x dx,\ v = e^x \end{array} \right| =$$

$$= \left(x^2+1\right) e^x - 2\left(xe^x - \int e^x dx\right) = \left(x^2+1\right) e^x - 2xe^x + 2e^x + C.$$

Pārbaude.

$$\left(\left(x^2+1\right)e^x - 2xe^x + 2e^x + C\right)' =$$
$$= 2xe^x + \left(x^2+1\right)e^x - 2e^x - 2xe^x + 2e^x = \left(x^2+1\right)e^x.$$

Atkārtoti pielietojot parciālās integrēšanas formulu, dažreiz nonāk pie izteiksmes, kas satur doto integrāli. Tad no iegūtās vienādības izsaka doto integrāli.

1.9. piemērs. Atrast $\int e^{-x} \cos x dx$.

$$\int e^{-x} \cos x dx = \left| \begin{array}{c} u = e^{-x},\ du = -e^{-x} dx, \\ dv = \cos x dx,\ v = \sin x \end{array} \right| =$$

$$= e^{-x} \sin x - \int \sin x \left(-e^{-x}\right) dx = e^{-x} \sin x + \int e^{-x} \sin x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} u = e^{-x},\ du = -e^{-x} dx, \\ dv = \sin x dx,\ v = -\cos x \end{array} \right| = e^{-x} \sin x + e^{-x}(-\cos x) -$$

$$- \int (-\cos x)(-e^{-x}) dx = e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x dx.$$

Ja apzīmē doto integrāli ar $\mathfrak{I}$, t.i., $\mathfrak{I} = \int e^{-x} \cos x dx$, tad iegūst vienādību $\mathfrak{I} = e^{-x} \sin x - e^{-x} \cos x - \mathfrak{I}$; tātad

$$2\mathfrak{I} = e^{-x}(\sin x - \cos x) + C_1,$$

$$\mathfrak{I} = \int e^{-x} \cos x dx = \frac{1}{2} e^{-x}(\sin x - \cos x) + C,$$

kur $C = \frac{C_1}{2}$.

Parciālās integrēšanas metodi lieto, lai atrastu šādus integrāļus:

$$\int P_n(x)e^{ax}dx,\ \int P_n(x)\cos axdx,\ \int P_n(x)\sin axdx,\ \int P_n(x)\ln^k xdx,$$
$$\int P_n(x)\operatorname{arctg}^k xdx,\ \int P_n(x)\arcsin xdx,\ \int P_n(x)\arcsin^k xdx,$$

kur $P_n(x)$ ir n-tās pakāpes polinoms, $a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$.

Pirmajos trijos integrāļos ar u apzīmē polinomu, pārējos - atbilstošās transcendentās funkcijas.

3. Substitūciju metodes būtību izsaka formula:

$$\boxed{\int f(x)dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt.} \tag{1.1}$$

Formulu var lietot gan no kreisās puses uz labo, t.i., mainīgo x aizstājot ar kāda cita mainīgā t funkciju $\varphi(t)$, gan otrādi, t.i., kādu funkciju apzīmējot ar jaunu mainīgo. Pēc integrēšanas noteikti jāatgriežas pie sākotnējā integrēšanas mainīgā.

1.10. piemērs. trast $\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx.$

$$\int \frac{\cos\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \left| \begin{array}{c} x = t^3, \\ dx = 3t^2dt \end{array} \right| = \int \frac{\cos t}{t^2}3t^2dt = 3\int \cos tdt =$$
$$= 3\sin t + C = 3\sin\sqrt[3]{x} + C.$$

1.11. piemērs. Atrast $\int \cos 16xdx$.

$$\int \cos 16xdx = \left| \begin{array}{c} 16x = t,\ x = \frac{1}{16}t, \\ dx = \frac{1}{16}dt \end{array} \right| = \int \cos t\frac{1}{16}dt = \frac{1}{16}\int \cos tdt =$$
$$= \frac{1}{16}\sin t + C = \frac{1}{16}\sin 16x + C.$$

1.1. piezīme. Šādus vienkāršus integrāļus var atrast arī, izmantojot substitūciju metodi netieši, t.i., ienesot kaut kādu izteiksmi zem diferenciāļa zīmes (1.11. piemērā ienes zem diferenciāļa zīmes 16):

$$\int \cos 16xdx = \frac{1}{16}\int \cos 16x16dx = \frac{1}{16}\int \cos 16xd(16x) =$$
$$= \frac{1}{16}\sin 16x + C.$$

1.12. piemērs. Atrast $\int x^2\sqrt{5+2x^3}dx$.

Tā kā $d(5+2x^3) = 6x^2dx$, tad iepriekš reizinot un dalot zemintegrāļa izteiksmi ar 6, izteiksmi $6x^2$ var ienest zem diferenciāļa zīmes, kā rezultātā iegūst tabulāro integrāli:

$$\int x^2\sqrt{5+2x^3}dx = \frac{1}{6}\int\sqrt{5+2x^3}6x^2dx = \frac{1}{6}\int(5+2x^3)^{\frac{1}{2}}d(5+2x^3) =$$
$$= \frac{1}{6}\frac{(5+2x^3)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{9}\sqrt{(5+2x^3)^3} + C.$$

1.13. piemērs. Atrast $\int \frac{1}{2-3x}dx$.

$$\int \frac{1}{2-3x}dx = \left| \begin{array}{c} d(2-3x) = -3dx, \text{ tāpēc reizina} \\ \text{un dala zemintegrāļa} \\ \text{izteiksmi ar } (-3) \text{ un } -3dx \\ \text{pārraksta kā } d(2-3x) \end{array} \right| =$$
$$= -\frac{1}{3}\int\frac{-3dx}{2-3x} = -\frac{1}{3}\int\frac{d(2-3x)}{2-3x} = -\frac{1}{3}\ln|2-3x| + C.$$

1.14. piemērs. Atrast $\int \frac{1+\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$.

$$\int\frac{1+\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx = \int\frac{dx}{1+x^2} + \int\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx =$$
$$= \operatorname{arctg} x + \int \operatorname{arctg} x d(\operatorname{arctg} x) = \operatorname{arctg} x + \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{2} + C.$$

Lai sekmīgi varētu risināt uzdevumus, izmantojot ienešanu zem diferenciāļa zīmes, ir ļoti labi jāzina funkciju diferenciāļi, t.i.,

$$\begin{array}{rlrl} \frac{dx}{x} &= d(\ln x), & e^x dx &= d(e^x), \\ \cos x dx &= d(\sin x), & -\sin x dx &= d(\cos x), \\ \frac{dx}{\cos^2 x} &= d(\operatorname{tg} x), & -\frac{dx}{\sin^2 x} &= d(\operatorname{ctg} x), \\ \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= d(\arcsin x), & \frac{dx}{1+x^2} &= d(\operatorname{arctg} x) \text{ u.c.} \end{array}$$

Acīmredzami, šī darbība nav viennozīmīga, jo, piemēram, $e^x dx = d(e^x+C)$.

Auditorijā risināmie uzdevumi

I Atrast integrāļus; 1., 4., 5. uzdevumā veikt pārbaudi.

1. $\int \left(2x^3 - 5x^2 + 7x - 3\right) dx;$
2. $\int (x-1)(x+4)dx;$
3. $\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} + x\sqrt{x} + 2\right) dx;$
4. $\int e^x \left(1 + \frac{e^{-x}}{x}\right) dx;$
5. $\int \left(4\sin x - \frac{5}{\sqrt{9-9x^2}}\right) dx;$
6. $\int (1-6^x)^2 dx;$
7. $\int \frac{1 - 4\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx;$
8. $\int \frac{3+x^2}{1+x^2} dx;$
9. $\int \operatorname{ctg}^2 x dx;$
10. $\int 8\sin^2 \frac{x}{2} dx;$
11. $\int \sin 3x dx;$
12. $\int \sqrt[4]{1-5x} dx;$
13. $\int x\sqrt{1+x^2} dx;$
14. $\int \frac{\ln x}{x} dx;$
15. $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx;$
16. $\int x e^{-x^2} dx;$
17. $\int 6^{3-2x} dx;$
18. $\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}};$
19. $\int \frac{dx}{\cos^2 mx};$
20. $\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx;$
21. $\int \frac{1 - 4\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$
22. $\int \frac{dx}{(x^2+1)\operatorname{arctg} x};$
23. $\int e^{4\cos x - 1} \sin x dx;$
24. $\int \frac{x^3 dx}{\sin^2 x^4}.$

II Atrast integrāļus, izmantojot parciālās integrēšanas metodi.

1. $\int x \ln x dx;$
2. $\int (x-5)\cos x dx;$
3. $\int x \operatorname{arctg} x dx;$
4. $\int (x^2+1)\sin x dx;$
5. $\int e^x \sin 3x dx.$

III Atrast integrāļus, izmantojot substitūciju metodi.

1. $\displaystyle\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x + 1}$;
2. $\displaystyle\int \frac{\cos \frac{2}{x^3}}{x^4} dx$;
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} \ \left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t\right)$;
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+5}} dx \ (x+5 = t^2)$;
5. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{x+4} dx$;
6. $\displaystyle\int \sqrt{9-x^2} dx \ (x = 3\sin t)$;
7. $\displaystyle\int \sqrt{e^x - 1} dx \ (e^x - 1 = t^2)$;
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}} \ (x = 2\operatorname{tg} t)$.

Mājas darba uzdevumi

Atrast integrāļus.

1. $\displaystyle\int \left(6t^2 - 2t^3\right) dt$;
2. $\displaystyle\int x^2(x+1)(5x-3) dx$;
3. $\displaystyle\int \frac{\left(4-3\sqrt{x}\right)^2}{x^2} dx$;
4. $\displaystyle\int 3^x e^x dx$;
5. $\displaystyle\int \frac{5 - 4\cos^3 x}{\cos^2 x} dx$;
6. $\displaystyle\int \frac{7 + 2x\sin^2 x}{\sin^2 x} dx$;
7. $\displaystyle\int \operatorname{tg}^2 x dx$;
8. $\displaystyle\int \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx$;
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{(5-3x)^4}$;
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{11-4x}$;
11. $\displaystyle\int \frac{e^x dx}{(e^x-5)^3}$;
12. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[6]{\ln^5 x}}{x} dx$;
13. $\displaystyle\int \frac{e^{\frac{3}{x}}}{x^2} dx$;
14. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^4 x}\sin^2 x}$;
15. $\displaystyle\int \sqrt{1-2\sin x}\cos x dx$;
16. $\displaystyle\int x^2 \cdot 6^{1-x^3} dx$;
17. $\displaystyle\int \frac{e^{5x}}{4-e^{10x}} dx$;
18. $\displaystyle\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}} dx$;
19. $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^3} dx$;
20. $\displaystyle\int \arccos x dx$;
21. $\displaystyle\int \frac{x dx}{\cos^2 x}$;
22. $\displaystyle\int (x^2-3)e^{4x} dx$;

23. $\int 4^x \sin x dx$;

24. $\int \cos\sqrt{x} dx \quad (\sqrt{x} = t)$;

25. $\int \frac{\cos x dx}{2 + \sin^2 x}$;

26. $\int \frac{e^{-\frac{1}{x^4}}}{x^5} dx$;

27. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx$;

28. $\int \sqrt{4 - x^2} dx$;

29. $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+2x}}$;

30. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x} dx \quad \left(x = \frac{5}{\sin t}\right)$.

1.3. Racionālu funkciju integrēšana

1.3. definīcija. Funkciju

$$P_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1} x + a_m,$$

kur $m \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{R}$, sauc par **veselu racionālu funkciju** vai m**-tās pakāpes polinomu** ($k = \overline{0, m}$).

1.4. definīcija. Funkciju

$$R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

kur $P_m(x)$ un $Q_n(x)$ ir polinomi, sauc par **racionālu funkciju**.

Jebkuru polinomu var integrēt, izmantojot nenoteiktā integrāļa 5. un 6. īpašību un pamatintegrāļu tabulas 1. formulu.

Lai integrētu racionālu daļu $R(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, vispirms ir jānosaka, vai racionālā daļa ir īsta vai neīsta.

1.5. definīcija. Racionālu daļu $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ sauc par **īstu**, ja $m < n$, t.i., skaitītāja polinoma pakāpe ir mazāka par saucēja polinoma pakāpi. Pretējā gadījumā (ja $m \geq n$) daļu sauc par **neīstu**.

Katru neīstu racionālu daļu var izteikt kā polinoma un īstas racionālas daļas summu.

Īstas racionālas daļas $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ saucēju var sadalīt reizinātājos:

$$Q_n(x) = b_0 (x-a)^{\alpha} \cdots (x-b)^{\beta} (x^2 + px + q)^{\gamma} \cdots (x^2 + rx + s)^{\lambda},$$

kur $b_0 \in \mathbb{R}$, $\alpha + \dots + \beta + 2\gamma + \dots + 2\lambda = n$; $a, \dots, b$ ir polinoma $Q_n(x)$ reālas saknes ar kārtu atbilstoši $\alpha, \dots, \beta$; bet kvadrāttrinomiem

$$x^2 + px + q, \dots, x^2 + rx + s$$

nav reālu sakņu.

Īstu racionālu daļu var sadalīt **elementārdaļu** summā:

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \dots + \frac{B_1}{x-b} + \dots + \frac{bB_\beta}{(x-b)^\beta} + \\ + \frac{C_1 x + D_1}{x^2 + px + q} + \dots + \frac{C_\gamma + D_\gamma}{(x^2+px+q)^\gamma} + \dots + \frac{E_1 x + F_1}{x^2 + rx + s} + \\ + \dots + \frac{E_\lambda x + F_\lambda}{(x^2 + rx + s)^\lambda}.$$

Konstantes

$$A_1, \dots, A_\alpha, \dots, B_1, \dots, B_\beta, C_1, D_1, \dots, C_\gamma, D_\gamma, \dots, E_1, F_1, \dots, E_\lambda, F_\lambda$$

atrod ar nenoteikto koeficientu metodi.

Lai atrastu integrāli no īstas racionālas daļas, integrē atsevišķi katru elementārdaļu. Elementārdaļu integrēšana sīkāk ir aplūkota konkrētos piemēros.

Lai atrastu integrāli no neīstas racionālas daļas, vispirms neīsta racionāla daļa ir jāizsaka kā polinoma un īstas racionālas daļas summa.

1.15. piemērs. Atrast $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3} dx$.

Jāintegrē īsta racionāla daļa. Izmantojot nenoteikto koeficientu metodi, to var sadalīt elementārdaļu summā:

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)^3}.$$

Vienādības labajā pusē vienādo saucējus:

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A(x-1)^3 + Bx(x-1)^2 + Cx(x-1) + Dx}{x(x-1)^3}.$$

Lai šīs daļas ar vienādiem saucējiem būtu vienādas, daļu skaitītājiem jābūt vienādiem:

$$x^3 + 1 = A(x-1)^3 + Bx(x-1)^2 + Cx(x-1) + Dx.$$

Savukārt, lai divi polinomi būtu vienādi, jābūt vienādiem koeficientiem pie atbilstošajām x pakāpēm:

$$\begin{cases} 1 = A + B, \\ 0 = -3A - 2B + C, \\ 0 = 3A + B - C + D, \\ 1 = -A. \end{cases}$$

Atrisinot vienādojumu sistēmu, iegūst: $A = -1, B = 2, C = 1, D = 2.$

Tādējādi

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{(x-1)^3}$$

un

$$\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx = -\int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{dx}{(x-1)^3} =$$
$$= -\ln|x| + 2\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C = \ln\frac{(x-1)^2}{|x|} -$$
$$- \frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + C.$$

1.16. piemērs. Atrast $\int \frac{x+1}{x(x^2+x+1)}dx.$

Racionāla daļa ir īsta; to var sadalīt elementārdaļu summā:

$$\frac{x+1}{x(x^2+x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$x + 1 = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)x;$$

$$\begin{cases} 0 = A + B, \\ 1 = A + C, \\ 1 = A; \end{cases}$$

$A = 1, B = -1, C = 0.$

Tādējādi

$$\int \frac{x+1}{x(x^2+x+1)}dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{xdx}{x^2+x+1} =$$
$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)-1}{x^2+x+1}dx =$$
$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\left(\int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} + \int \frac{dx}{x^2+x+1}\right) =$$
$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) + \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$
$$= \ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C =$$
$$= \ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

1.17. piemērs. Atrast $\displaystyle\int \frac{x^5-4x^2-6x-3}{x^4+x^3-x-1}dx.$

Jāintegrē neīsta racionāla daļa. Sadala to polinoma un īstas racionālas daļas summā, izdalot skaitītāja polinomu ar saucēja polinomu:

$$\begin{array}{rrrrrr|l}
- & x^5 & -4x^2 & -6x & -3 & & x^4 \; +x^3 \; -x \; -1 \\
 & x^5 & +x^4 \; -x^2 & -x & & & x \quad -1 \\ \hline
 & & -x^4 \; -3x^2 & -5x & -3 & & \\
- & & -x^4 \; -x^3 & +x & +1 & & \\ \hline
 & & x^3 \; -3x^2 & -6x & -4 & &
\end{array}$$

$$\frac{x^5-4x^2-6x-3}{x^4+x^3-x-1} = x-1+\frac{x^3-3x^2-6x-4}{x^4+x^3-x-1}.$$

Saucēju sadala reizinātājos:

$$x^4+x^3-x-1 = x^3(x+1)-(x+1) = (x+1)(x^3-1) =$$
$$= (x+1)(x-1)(x^2+x+1).$$

Tādējādi

$$\frac{x^3-3x^2-6x-4}{x^4+x^3-x-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1};$$

$$x^3-3x^2-6x-4=A(x-1)(x^2+x+1)+B(x+1)(x^2+x+1)+ \\ +(Cx+D)(x^2-1).$$

Ievietojot šajā identitātē $x=-1, x=1, x=0, x=2$, iegūst sistēmu:

$$\begin{cases} -2 &= -2A, \\ -12 &= 6B, \\ -4 &= -A+B-D, \\ -20 &= 7A+21B+6C+3D. \end{cases}$$

Atrisinot šo vienādojumu sistēmu, iegūst:

$$A=1, B=-2, C=2, D=1.$$

Tādējādi

$$\frac{x^5-4x^2-6x-3}{x^4-x^3-x-1}=x-1+\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x-1}+\frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

un

$$\int \frac{x^5-4x^2-6x-3}{x^4+x^3-x-1}dx = \\ =\int(x-1)dx+\int\frac{dx}{x+1}-2\int\frac{dx}{x-1}+\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx= \\ =\frac{(x-1)^2}{2}+\ln|x+1|-2\ln|x-1|+\ln(x^2+x+1)+C= \\ =\frac{(x-1)^2}{2}+\ln\frac{|x+1|(x^2+x+1)}{(x-1)^2}+C.$$

1.2. piezīme. Nereti, lai atrastu $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$, ir izdevīgi saucējā atdalīt pilno kvadrātu un reducēt šādu integrāli uz vienu no tabulārajiem:

$$\int\frac{dt}{t^2+a^2}\ (14)\ \text{ vai }\ \int\frac{dt}{t^2-a^2}\ (20).$$

1.18. piemērs. Atrast $\int\frac{dx}{-4x^2+8x+5}$.

Saucējā atdala starpības pilno kvadrātu:

$$-4x^2+8x+5=-4\left(x^2-2x-\frac{5}{4}\right)=-4\left((x^2-2x+1)-1-\frac{5}{4}\right)= \\ =-4\left((x-1)^2-\frac{9}{4}\right).$$

$$\int \frac{dx}{-4x^2+8x+5} = -\frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x-1)^2-\frac{9}{4}} = -\frac{1}{4}\int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2} =$$
$$= -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{3}{2}}\ln\left|\frac{(x-1)-\frac{3}{2}}{(x-1)+\frac{3}{2}}\right| + C = \frac{1}{12}\ln\left|\frac{2x+1}{2x-5}\right| + C.$$

1.19. piemērs. Atrast $\int \frac{dx}{x^2-8x+25}$.

$$\int \frac{dx}{x^2-8x+25} = \int \frac{dx}{(x-4)^2+9} = \int \frac{d(x-4)}{(x-4)^2+3^2} =$$
$$= \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-4}{3} + C.$$

Auditorijā risināmie uzdevumi

1. $\int \frac{10x-3}{2-3x+5x^2}dx$;
2. $\int \frac{dx}{4x^2+12x+9}$;
3. $\int \frac{5-4x}{(x+1)(x-2)}dx$;
4. $\int \frac{x^2+6}{x(x-3)^2}dx$;
5. $\int \frac{x^2-6x-18}{(x-2)(x^2+2x+5)}dx$;
6. $\int \frac{x^4+2x^2}{x^2+1}dx$;
7. $\int \frac{5x-10-x^2}{x^2-4x+3}$;
8. $\int \frac{dx}{1-x^3}$;
9. $\int \frac{dx}{x^2+10x+34}$;
10. $\int \frac{dx}{-x^2+4x+21}$.

Mājas darba uzdevumi

1. $\displaystyle\int \frac{xdx}{x^3+x^2-x-1}$;
2. $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x^3-x^2-6x}dx$;
3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+x^2}$;
4. $\displaystyle\int \frac{x^4+3x^3-1}{x^2+2x+1}dx$;
5. $\displaystyle\int \frac{x^7}{1-x^4}dx$;
6. $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{x^2+2x+3}$;
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{6x-9x^2-1}$;
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{2x^2+2x+5}$;
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2-16x-9}$.

1.4. Iracionālu funkciju integrēšana

Apskata gadījumus, kad iracionālu funkciju integrēšanu var reducēt uz racionālu funkciju integrēšanu.

1)

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_1}{s_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_n}{s_n}}\right)dx.$$

Lai atrastu šādu integrāli, lieto substitūciju $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$, kur s ir daļu $\frac{r_1}{s_1}, \dots, \frac{r_n}{s_n}$ kopsaucējs.

1.20. piemērs. Atrast $\displaystyle\int \frac{dx}{\left(\sqrt[4]{x+3}-1\right)\sqrt{x+3}}$.

$$\int \frac{dx}{\left(\sqrt[4]{x+3}-1\right)\sqrt{x+3}} = \left| \begin{array}{c} x+3=t^4; \\ dx = 4t^3dt \end{array} \right| = \int \frac{4t^3dt}{(t-1)t^2} =$$
$$= 4\int \frac{tdt}{t-1} = 4\int \frac{(t-1)+1}{t-1}dt = 4\int \left(1+\frac{1}{t-1}\right)dt =$$
$$= 4\left(t+\ln|t-1|\right)+C = 4\left(\sqrt[4]{x+3}+\ln\left|\sqrt[4]{x+3}-1\right|\right)+C.$$

1.21. piemērs. Atrast $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}\frac{dx}{x}$.

$$\int \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}\frac{dx}{x} = \left| \begin{array}{c} \frac{x-2}{x+2} = t^2;\ x = \frac{2(1+t^2)}{1-t^2} \\ dx = \frac{8t}{(1-t^2)^2}dt \end{array} \right| = \int \frac{8t^2}{(1-t^2)^2}\frac{(1-t^2)dt}{2(1+t^2)} =$$

$$= 4\int \frac{t^2dt}{(1-t^2)(1+t^2)} = 4\cdot\frac{1}{2}\int \frac{(1+t^2)-(1-t^2)}{(1-t^2)(1+t^2)}dt =$$

$$= 2\left(\int \frac{dt}{1-t^2} - \int \frac{dt}{1+t^2}\right) = \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| - 2\,\mathrm{arctg}\, t + C,$$

kur $t = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$.

2)

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx.$$

Šādu integrāļu atrašanai var izmantot vienu no trim **Eilera substitūcijām**:

1. ja $a > 0$, tad $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x$,
2. ja $c > 0$, tad $\sqrt{ax^2+bx+c} = tx - \sqrt{c}$,
3. ja $D = b^2 - 4ac > 0$, tad $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\alpha)$, kur α ir viena no kvadrāttrinoma ax^2+bx+c saknēm.

1.22. piemērs. Atrast $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+4}}$.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x+4}} = \left| \begin{array}{c} a = 1 > 0,\ \text{tāpēc var lietot} \\ \text{Eilera 1. substitūciju.} \\ \sqrt{x^2+2x+4} = t - x; \\ x^2+2x+4 = t^2 - 2tx + x^2;\ x = \frac{t^2-4}{2(t+1)}; \\ dx = \dfrac{t^2+2t+4}{2(t+1)^2}dt; \\ \sqrt{x^2+2x+4} = t - x = t - \frac{t^2-4}{2(t+1)} = \frac{t^2+2t+4}{2(t+1)} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{t^2+2t+4}{2(t+1)^2}}{\frac{t^2-4}{2(t+1)}\cdot\frac{t^2+2t+4}{2(t+1)}}dt = \int \frac{(t^2+2t+4)4(t+1)^2}{2(t+1)^2(t^2-4)(t^2+2t+4)}dt =$$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2-4} = 2\cdot\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2+2x+4}-2}{x+\sqrt{x^2+2x+4}+2}\right| + C.$$

1.23. piemērs. Atrast $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$.

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}} = \left| \begin{array}{c} a=-1<0,\ c=1>0, \\ \text{tāpēc var lietot Eilera 2. substitūciju.} \\ \sqrt{1-2x-x^2}=tx-1; \\ 1-2x-x^2=(tx-1)^2; \\ 1-2x-x^2=t^2x^2-2tx+1; \\ x=\frac{2(t-1)}{t^2+1};\ dx=\frac{-2(t^2-2t-1)}{(t^2+1)^2}dt; \\ 1+\sqrt{1-2x-x^2}= \\ =1+tx-1=tx=\frac{2t(t-1)}{t^2+1} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{-2(t^2-2t-1)}{(t^2+1)^2}}{\frac{2t(t-1)}{t^2+1}}dt = -\int \frac{t^2-2t-1}{t(t-1)(t^2+1)}dt.$$

Iegūts racionālas funkcijas integrālis.

Jāintegrē īsta racionāla daļa; tā jāsadala elementārdaļu summā.

$$\frac{t^2-2t-1}{t(t-1)(t^2+1)} = \frac{A}{t} = \frac{B}{t-1} + \frac{Ct+D}{t^2+1};$$
$$t^2-2t-1 = A(t-1)(t^2+1) + Bt(t^2+1) + (Ct+D)t(t-1);$$

Ja $t=1$, tad $B=-1$.

Ja $t=0$, tad $A=1$.

Salīdzina atbilstošos koeficientus:

$$\begin{cases} C=-1, \\ D=2, \end{cases}$$

tādējādi

$$-\int \frac{t^2-2t-1}{t(t-1)(t^2+1)}dt = -\int \frac{dt}{t} + \int \frac{dt}{t-1} + \int \frac{t-2}{t^2+1}dt =$$
$$= \ln|t| + \ln|t-1| + \frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{t^2+1} - 2\int \frac{dt}{t^2+1} =$$
$$= \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| + \frac{1}{2}\ln(t^2+1) - 2\operatorname{arctg} t + C,$$

kur $t = \frac{\sqrt{1-2x-x^2}+1}{x}$.

1.24. piemērs. Atrast $\int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2+5x-2}}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-2x^2+5x-2}} = \left| \begin{array}{c} a=-2<0,\ c=-2<0, \\ \text{bet } -2x^2+5x-2 = -2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right), \\ \text{tāpēc var izmantot Eilera 3. substitūciju.} \\ \sqrt{-2x^2+5x-2} = t(x-2); \\ -2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right) = t^2(x-2)^2; \\ 1-2x = t^2x - 2t^2;\ x = \frac{2t^2+1}{t^2+2}; \\ dx = \frac{6t}{(t^2+2)^2}dt; \\ \sqrt{-2x^2+5x-2} = t(x-2) = \\ = t\left(\frac{2t^2+1}{t^2+2}-2\right) = \frac{-3t}{t^2+2} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{6t(t^2+2)}{(t^2+2)^2(-3)t}dt = -2\int \frac{dt}{t^2+2} = -\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{t}{\sqrt{2}} + C,$$

kur $t = \dfrac{\sqrt{-2x^2+5x-2}}{x-2}$.

1.3. piezīme. Nereti, lai atrastu $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, ir izdevīgi zemsaknes izteiksmē atdalīt pilno kvadrātu un reducēt šādu integrāli uz vienu no tabulārajiem:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{a^2-t^2}} \quad (15) \quad \text{vai} \quad \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+a}}. \quad (21)$$

Piemēram, 1.24. piemēru varētu risināt šādi:

$$\mathfrak{I} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{8} - \left(\sqrt{2}x - \frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d\left(\sqrt{2}x - \frac{5}{2\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{\frac{9}{8} - \left(\sqrt{2}x - \frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \arcsin \frac{\sqrt{2}x - \frac{5}{2\sqrt{2}}}{\frac{3}{2\sqrt{2}}} + C = \frac{\sqrt{2}}{2} \arcsin \frac{4x-5}{3} + C.$$

3)

$$\int x^m(a+bx^n)^p dx.$$

Izteiksmi $x^m(a+bx^n)^p dx$, kur $a, b \in \mathbb{R}$, $m, n, p \in \mathbb{Q}$, sauc par **binomiālo diferenciāli**.

Binomiālo diferenciāli iespējams integrēt galīgā veidā trijos gadījumos, lietojot atbilstošo substitūciju:

1. ja p ir vesels skaitlis, tad apzīmē $x = t^s$, kur s ir m un n kopsaucējs;
2. ja $\frac{m+1}{n}$ ir vesels skaitlis, tad apzīmē $a + bx^n = t^s$, kur s ir daļas p saucējs;
3. ja $\frac{m+1}{n} + p$ ir vesels skaitlis, tad apzīmē $ax^{-n} + b = t^s$, kur s ir daļas p saucējs.

1.25. piemērs. Atrast $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[6]{x}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2}$.

Tā kā

$$\frac{1}{\sqrt[6]{x}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2} = (x)^{-\frac{1}{6}}\left(x^{\frac{1}{3}}-1\right)^{-2}$$

un $m = -\frac{1}{6}$, $n = \frac{1}{3}$ un $p = -2$ ir vesels skaitlis, tad tas ir binomiālā diferenciāļa integrēšanas pirmais gadījums.

$$\begin{aligned}\mathfrak{I} &= \int \frac{dx}{\sqrt[6]{x}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2} = \left| \begin{array}{c} x = t^6; \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = \int \frac{6t^5 dt}{t(t^2-1)^2} = \\ &= 6\int \frac{t^4 dt}{(t^2-1)^2} = 6\int \left(1 + \frac{2t^2-1}{(t^2-1)^2}\right) dt = 6t + 6\int \frac{2t^2-1}{(t^2-1)^2} dt.\end{aligned}$$

Lai atrastu pēdējo integrāli, zemintegrāļa funkcija, kas ir īsta racionāla daļa, jāsadala elementārdaļu summā. Tā rezultātā iegūst:

$$\begin{aligned}\mathfrak{I} &= 6t + 6\cdot\frac{1}{4}\int\left(\frac{3}{t-1} - \frac{3}{t+1} + \frac{1}{(t-1)^2} + \frac{1}{(t+1)^2}\right) dt = \\ &= 6t + \frac{3}{2}\left(3\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \left(\frac{1}{t-1} + \frac{1}{t+1}\right)\right) + C = \\ &= 6t + \frac{9}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| - \frac{3t}{t^2-1} + C = \\ &= 6\sqrt[6]{x} + \frac{9}{2}\ln\left|\frac{\sqrt[6]{x}-1}{\sqrt[6]{x}+1}\right| - \frac{3\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}-1} + C.\end{aligned}$$

1.26. piemērs. Atrast $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx.$

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} m=-\frac{1}{2};\ n=\frac{1}{4};\ p=\frac{1}{3}. \\ \dfrac{m+1}{n} = \dfrac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2\ \text{ – vesels skaitlis;} \\ 1+x^{\frac{1}{4}} = t^3;\ x=(t^3-1)^4; \\ dx = 12t^2(t^3-1)^3dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \left((t^3-1)^4\right)^{-\frac{1}{2}}\left(t^3\right)^{\frac{1}{3}}12t^2\left(t^3-1\right)^3dt = 12\int \left(t^3-1\right)^{-2+3}t^3dt =$$

$$= 12\int (t^3-1)t^3dt = 12\int \left(t^6-t^3\right)dt = 12\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)+C =$$

$$= 12\left(\frac{\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\right)^7}{7} - \frac{\left(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\right)^4}{4}\right)+C.$$

1.27. piemērs. Atrast $\int \frac{\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}}{\sqrt{x}}dx.$

$$\int \frac{\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}}}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(1-x^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} m=-\frac{1}{2};\ n=-\frac{1}{3};\ p=\frac{1}{2};\ a=1;\ b=-1. \\ \dfrac{m+1}{n}+p = \dfrac{-\frac{1}{2}+1}{-\frac{1}{3}}+\dfrac{1}{2} = -\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2} = -1\ \text{ – vesels skaitlis.} \\ x^{\frac{1}{3}}-1=t^2;\ x=(t^2+1)^3; \\ dx = 6t(t^2+1)^2dt; \\ \text{Ir lietderīgi izteikt } 1-x^{-\frac{1}{3}} \text{ atkarībā no } t: \\ \dfrac{1}{x^{-\frac{1}{3}}}-1=t^2;\ \dfrac{1-x^{-\frac{1}{3}}}{x^{-\frac{1}{3}}}=t^2;\ 1-x^{-\frac{1}{3}}=t^2x^{-\frac{1}{3}}; \\ 1-x^{-\frac{1}{3}} = t^2(t^2+1)^{-1}. \end{array} \right| =$$

$$= 6\int \left((t^2+1)^3\right)^{-\frac{1}{2}}\left(t^2(t^2+1)^{-1}\right)^{\frac{1}{2}}t(t^2+1)^2dt =$$

$$= 6\int (t^2+1)^{-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}+2} t^2 dt = 6\int (t^2+1)^0 t^2 dt =$$
$$= 6\int t^2 dt = 2t^3 + C = 2\sqrt{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^3} + C.$$

1.4. piezīme. Lai atrastu integrāļus

$$\int R\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right) dx, \ \int R\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right) dx, \ \int R\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right) dx,$$

ir izdevīgi lietot trigonometriskās substitūcijas:

$$x = |a| \operatorname{tg} t \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right),$$
$$x = |a| \sin t \left(-\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2}\right),$$
$$x = \frac{|a|}{\cos t} \left(\begin{cases} 0 \le t \le \pi \\ t \ne \frac{\pi}{2} \end{cases}\right).$$

Piemēram, $\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$ varētu reducēt uz racionālas funkcijas integrāli, izmantojot Eilera 2. vai 3. substitūciju, integrējot kā binomiālo diferenciāli (3. gad.), taču tā rezultātā iegūtu diezgan sarežģītus racionālu funkciju integrāļus (pārliecinieties par to).

Izmantojot trigonometrisko substitūciju, risinājums ir nesalīdzināmi vienkāršāks:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}} = \left| \begin{matrix} x = 2\sin t, \ -\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{\pi}{2} \\ dx = 2\cos t dt \end{matrix} \right| = \int \frac{2\cos t dt}{\sqrt{(4-4\sin^2 t)^3}} =$$
$$= \int \frac{2\cos t dt}{\sqrt{4^3(1-\sin^2 t)^3}} = \frac{1}{4}\int \frac{\cos t dt}{\cos^3 t} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{4}\operatorname{tg} t + C.$$

Atgriežas pie dotā integrēšanas mainīgā x:

$$\operatorname{tg} t = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}},$$

tātad

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}} = \frac{x}{4\sqrt{4-x^2}} + C.$$

Auditorijā risināmie uzdevumi

Atrast integrāļus.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}$;
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$;
3. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}-2}{x\left(\sqrt[3]{x}+1\right)}dx$;
4. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$;
5. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4+2x-x^2}}$;
6. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$;
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{(7x-x^2-10)^3}}$;
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}$;
9. $\displaystyle\int x^3\sqrt[3]{7-3x^2}dx$;
10. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[5]{\left(1+\sqrt[4]{x^3}\right)^4}}{x^2\sqrt[20]{x^7}}dx$;
11. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+16}}{x}dx$;
12. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-9}}$.

Mājas darba uzdevumi

Atrast integrāļus.

1. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2+x}}{x}dx$;
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$;
3. $\displaystyle\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}; dx$
4. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{(4x-3)\sqrt{4x-3}}$;
5. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x}{x+5}}\frac{dx}{x^2}$;
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-5x+5}}$;
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$;
8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x-x^2}}$;
9. $\displaystyle\int \frac{6x-7}{\sqrt{5x-4-x^2}}dx$;
10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}\left(\sqrt[8]{x}-1\right)^5}$;
11. $\displaystyle\int \frac{5+\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$;
12. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2\sqrt[5]{x}}dx$;
13. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^4}dx$;
14. $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2-25}}$.

1.5. Trigonometrisku funkciju integrēšana

Apskata $\int R(\sin x;\cos x)dx$ un tā dažādus integrēšanas paņēmienus.

1. **Universālā trigonometriskā substitūcija** $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t$ $(-\pi<x<\pi)$, kas $\int R(\sin x;\cos x)dx$ reducē uz mainīgā t racionālas funkcijas integrāli, jo

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}.$$

1.28. piemērs. Atrast $\displaystyle\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$.

$$\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}=\left|\begin{array}{c}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t;\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2};\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2};\\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{array}\right|=$$

$$=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{8t}{1+t^2}+3\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}=2\int\frac{dt}{(1+t^2)\frac{8t+3-3t^2+5+5t^2}{1+t^2}}=$$

$$=2\int\frac{dt}{2t^2+8t+8}=\int\frac{dt}{t^2+4t+4}=\int\frac{dt}{(t+2)^2}=$$

$$=-\frac{1}{t+2}+C=-\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C.$$

Kaut arī ar universālās trigonometriskās substitūcijas palīdzību $\int R(\sin x;\cos x)dx$ var atrast vienmēr, tā nereti šo integrāli reducē uz sarežģītu racionālas funkcijas integrāli, tāpēc ir svarīgi zināt atsevišķus gadījumus, kad ir izdevīgi lietot citas substitūcijas.

2. a) Ja $R(\sin x;\cos x)$ ir **nepāra** funkcija attiecībā pret $\cos x$ (izpildās $R(\sin x;-\cos x)=-R(\sin x;\cos x)$), tad lieto substitūciju $\sin x=t$;

b) ja $R(\sin x;\cos x)$ ir **nepāra** funkcija attiecībā pret $\sin x$ (izpildās $R(-\sin x;\cos x)=-R(\sin x;\cos x)$), tad lieto substitūciju $\cos x=t$;

c) ja $R(\sin x;\cos x)$ ir **pāra** funkcija attiecībā pret $\sin x$ un $\cos x$, (izpildās $R(-\sin x;-\cos x)=R(\sin x;\cos x)$), tad lieto substitūciju $\operatorname{tg}x=t$ $(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2})$.

1.29. piemērs. Atrast $\displaystyle\int\frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx$.

Tā kā zemintegrāļa funkcija ir nepāra attiecībā pret $\cos x$, tad lieto substitūciju $\sin x = t$:

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x}\cos x dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^6 x}\cos x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{c} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{1-t^2}{t^6}dt = \int \left(t^{-6} - t^{-4}\right) dt = \frac{t^{-5}}{-5} - \frac{t^{-3}}{-3} + C =$$

$$= -\frac{1}{5\sin^5 x} + \frac{1}{3\sin^3 x} + C.$$

1.30. piemērs. Atrast $\int \cos^4 x \sin x dx$.

Tā kā zemintegrāļa funkcija ir nepāra attiecībā pret $\sin x$, tad lieto substitūciju $\cos x = t$:

$$\int \cos^4 x \sin x dx = \left| \begin{array}{c} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right| = -\int t^4 dt = -\frac{t^5}{5} + C =$$

$$= -\frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

1.31. piemērs. Atrast $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sin x - \cos x)^2}$.

$$R(\sin x; \cos x) = \frac{1}{(\sin x - \cos x)^2};$$

$$R(-\sin x; -\cos x) = \frac{1}{(-\sin x + \cos x)^2} = \frac{1}{(\sin x - \cos x)^2} = R(\sin x; \cos x).$$

Tātad zemintegrāļa funkcija ir pāra funkcija attiecībā pret $\sin x$ un $\cos x$, tāpēc

$$\int \frac{dx}{(\sin x - \cos x)^2} = \int \frac{dx}{\sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x} =$$

$$= \int \frac{dx}{1 - \sin 2x} = \left| \begin{array}{c} \operatorname{tg} x = t;\ \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin 2x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 - \frac{2t}{1+t^2}} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{1+t^2-2t} = 2\int \frac{dt}{(1-t)^2} = 2\int (1-t)^{-2} dt =$$

$$= \frac{2}{1-t} + C = \frac{2}{1-\operatorname{tg} x} + C.$$

3. Integrējot trigonometriskās funkcijas, izmanto trigonometriskās formulas (skat. 1.29., 1.31. piemērus), piemēram, reizinājumu pārveido trigonometrisko funkciju summā

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big);$$
$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big);$$
$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big),$$

pazemina pakāpi

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x),$$
$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x),$$
$$\sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$$

u.c.

1.32. piemērs. Atrast $\int \cos 3x \sin 5x dx$.

$$\int \cos 3x\sin 5x dx = \frac{1}{2}\int(\sin 2x+\sin 8x)dx =$$
$$= -\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x + C.$$

1.33. piemērs. Atrast $\int \cos^6 x dx$.

$$\int \cos^6 x dx = \int (\cos^2 x)^3 dx = \int\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3 dx =$$
$$= \frac{1}{8}\int\left(1+3\cos 2x+3\cos^2 2x+\cos^3 2x\right)dx =$$
$$= \frac{1}{8}\left(x+\frac{3}{2}\sin 2x+3\int\frac{1+\cos 4x}{2}dx+\int\cos^2 2x\cos 2x dx\right) =$$
$$= \frac{1}{8}\left(x+\frac{3}{2}\sin 2x+\frac{3}{2}x+\frac{3}{2\cdot 4}\sin 4x+\frac{1}{2}\int(1-\sin^2 x)d(\sin 2x)\right) =$$
$$= \frac{1}{8}\left(\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}\sin 2x+\frac{3}{8}\sin 4x+\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\frac{\sin^3 2x}{3}\right)+C =$$
$$= \frac{5}{16}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{3}{64}\sin 4x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$$

4. Integrāļus $\int \operatorname{tg}^m x dx$, kur m ir vesels pozitīvs skaitlis, var izskaitļot, izmantojot formulu $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, vai arī izmantojot substitūciju $\operatorname{tg} x = t$.

1.34. piemērs. Atrast $\int \operatorname{tg}^4 x dx$.

1.

$$\int \operatorname{tg}^4 x dx = \int \operatorname{tg}^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \int \left(\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^2 x\right) dx =$$
$$= \int \operatorname{tg}^2 x d(\operatorname{tg} x) - \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C.$$

2.

$$\int \operatorname{tg}^4 x dx = \left| \begin{array}{c} \operatorname{tg} x = t,\ -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{t^4}{1+t^2} dt =$$
$$= \int \frac{(t^4 - 1) + 1}{t^2 + 1} dt = \int (t^2 - 1) dt + \int \frac{dt}{t^2 + 1} =$$
$$= \frac{t^3}{3} - t + \operatorname{arctg} t + C = \frac{\operatorname{tg} x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C.$$

Auditorijā risināmie uzdevumi

Atrast integrāļus.

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{4 - 5\sin x}$;
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x}$;
3. $\displaystyle\int \frac{\cos x + \cos^3 x}{1 + \sin^2 x} dx$;
4. $\displaystyle\int \sin^4 x \cos^5 x dx$;
5. $\displaystyle\int \cos^2 3x \sin^4 3x dx$;
6. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^4 x}$;
7. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^3 x}$;
8. $\displaystyle\int \operatorname{ctg}^5 x dx$;
9. $\displaystyle\int \sin 9x \sin x dx$.

Mājas darba uzdevumi

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x + 2\sin x + 3};$

2. $\displaystyle\int \frac{\sin x + \sin^3 x}{\cos 2x} dx;$

3. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\sin^8 x} dx;$

4. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^8 x};$

5. $\displaystyle\int \cos^4 3x dx;$

6. $\displaystyle\int \frac{1 - \cos x}{\sin x + \operatorname{tg} x} dx;$

7. $\displaystyle\int \sin^6 x \cos^4 x dx;$

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x};$

9. $\displaystyle\int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} dx;$

10. $\displaystyle\int \cos 3x \cos 5x \cos 8x dx.$

2. nodaļa

NOTEIKTAIS INTEGRĀLIS

2.1. Noteiktais integrālis un tā izskaitļošana

2.1.1. Noteiktā integrāļa definīcija

Pieņem, ka $f(x)$ ir definēta intervālā $[a;b]$. Sasmalcina intervālu $[a;b]$ elementārdaļās ar punktu palīdzību:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \cdots < x_n = b.$$

Apzīmē ar $\lambda = \max\limits_{1\le k\le n} \Delta x_k$, kur $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Katrā no intervāliem $[x_{k-1}; x_k]$ izvēlas pa patvaļīgam starppunktam ξ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ un izskaitļo funkcijas vērtības katrā no šiem punktiem $f(\xi_k)$.

2.1. definīcija. Par funkcijas $f(x)$ **integrālo summu** intervālā $[a;b]$ sauc summu

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n.$$

Integrālā summa ir atkarīga no intervāla $[a;b]$ sasmalcinājuma un starppunktu ξ_k izvēles.

2.2. definīcija. Par funkcijas $f(x)$ **noteikto integrāli** intervālā $[a;b]$ sauc integrālās summas σ robežu, kad sasmalcinājuma solis $\lambda \to 0$:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Ja funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta intervālā $[a;b]$, tad šī robeža eksistē un tā nav atkarīga no nogriežņa $[a;b]$ sasmalcinājuma un no starppunktu izvēles.

2.1. piemērs. Izmantojot noteiktā integrāļa definīciju, izskaitļot integrāli

1. $\int\limits_a^b C dx$, ja $C =$const.
2. $\int\limits_{-1}^4 (1+x)dx$.

1. Intervālu $[a;b]$ sasmalcina elementārdaļās ar punktu palīdzību:
$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b$$
un sastāda atbilstošo integrālo summu
$$\sigma = C\Delta x_1 + C\Delta x_2 + \dots + C\Delta x_n = \sum_{k=1}^n C\Delta x_k.$$
(Tā kā zemintegrāļa funkcija $f(x) = C$ šoreiz ir konstanta, tad $f(\xi_k) = C$ jebkurai starppunktu ξ_k izvēlei).
Pārveido integrālo summu:
$$\sigma = \sum_{k=1}^n C\Delta x_k = C\sum_{k=1}^n \Delta x_k =$$
$$= C\big((x_1 - a) + (x_2 - x_1) + \dots + (b - x_{n-1})\big) = C(b-a).$$
Acīmredzot, funkcijai $f(x) = C$ integrālā summa nav atkarīga ne no intervāla sasmalcinājuma, ne no starppunktu izvēles. Tātad
$$\int\limits_a^b C dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^n C\Delta x_k = C(b-a).$$

2. Lai atrastu $\int\limits_{-1}^4 (1+x)dx$, izveido intervāla $[-1;4]$ sasmalcinājumu, sadalot intervālu n vienādās daļās. Katrā no intervāliem
$$[x_{k-1}; x_k] = \left[-1 + \frac{5(k-1)}{n}; -1 + \frac{5k}{n}\right]$$

nepārtraukta, augoša funkcija $y = 1 + x$ sasniedz savu vismazāko vērtību intervāla kreisajā galapunktā, bet vislielāko vērtību - šī intervāla labajā galapunktā. Par starppunktiem ξ_k izvēlas, piemēram, elementārintervālu labos galapunktus, t.i., $\xi_k = -1 + \frac{5k}{n}$; tad šoreiz funkcijas $y = 1 + x$ integrālā summa ir vienāda ar augšējo Darbū summu:

$$\sigma = S = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f\left(-1 + \frac{5k}{n}\right)\frac{5}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{5k}{n} \cdot \frac{5}{n} =$$

$$= \frac{25}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k = \frac{25}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

(Izmanto to, ka $\Delta x_k = \frac{5}{n}$ un $\sum\limits_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ kā aritmētiskās progresijas locekļu summa).

$$\int\limits_{-1}^{4} (1 + x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \lim_{n \to \infty} \frac{25n(n+1)}{2n^2} = \frac{25}{2};$$

(Ja intervālu sadala n vienādās daļās, tad nosacījumam $\lambda = \max \Delta x_k \to 0$ līdzvērtīgs ir nosacījums $n \to \infty$).

2.1.2. Noteiktā integrāļa pamatīpašības

1. $\int\limits_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx.$

2. $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx \quad (k = \text{const}).$

No 1. un 2. īpašības izriet **linearitātes** īpašība, t.i.,

$$\int\limits_a^b \big(k_1 f(x) + k_2 g(x)\big)dx = k_1 \int\limits_a^b f(x)dx + k_2 \int\limits_a^b g(x)dx,$$

kur k_1 un k_2 ir konstantes.

3. **Aditivitāte**.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

kur $[a;b] = [a;c] \cup [c;b]$.

4. $\int_a^b f(x)dx \geq 0$, ja $f(x) \geq 0$ visiem $x \in [a;b]$.

5. **Monotonitāte**.

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx,$$

ja $f(x) \leq g(x)$ visiem $x \in [a;b]$.

6. $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \left| \int_a^b |f(x)|dx \right|$.

7. **Novērtējums**.

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a),$$

ja $m \leq f(x) \leq M$ visiem $x \in [a;b]$ $(m, M \in \mathbb{R})$.

8. **Vidējā vērtība**.

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(x_0)\int_a^b g(x)dx,$$

ja f un g ir nepārtrauktas intervālā $[a,b]$ un g saglabā zīmi šajā intervālā; $x_0 \in [a;b]$.

2.1. piezīme.

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

2. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$

3. Ja 8. īpašībā $g(x) = 1$ visiem $x \in [a; b]$, tad iegūst šādu vidējās vērtības īpašību:

   ja $f(x)$ ir intervālā $[a; b]$ nepārtraukta funkcija, tad eksistē tāds punkts $x_0 \in [a; b]$ ka

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(x_0)(b-a).$$

   Vērtību

$$\boxed{f(x_0) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx}$$

   sauc par **funkcijas** $f(x)$ **vidējo vērtību intervālā** $[a; b]$.

2.2. piemērs. Novērtēt integrāļus:

$$a) \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}, \qquad b) \int\limits_0^2 \sqrt{4+x^2}dx.$$

a) Tā kā $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}$ ir nepārtraukta intervālā $[0; 1]$, tad tā sasniedz šajā intervālā vismazāko un vislielāko vērtību. Atrod tās:

$$f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{(2+x-x^2)^3}}, \quad f'(x) = 0, \quad \text{ja} \quad x = \frac{1}{2}.$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3}, \quad f(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

tātad

$$\min_{[0;1]} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} \quad \text{un} \quad \max_{[0;1]} f(x) = f(0) = f(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Tātad,

$$\frac{2}{3} \le f(x) \le \frac{1}{\sqrt{2}}$$

un

$$\frac{2}{3}(1-0) \le \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}} \le \frac{1}{\sqrt{2}}(1-0),$$

t.i.,

$$\frac{2}{3} \le \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}} \le \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b) Funkcija $g(x) = \sqrt{4+x^2}$ ir augoša intervālā $[0;2]$, tāpēc

$$\min_{[0;2]} g(x) = g(0) = 2, \quad \max_{[0;2]} g(x) = g(2) = \sqrt{8},$$

un

$$2(2-0) \le \int\limits_0^2 \sqrt{4+x^2}dx \le \sqrt{8}(2-0)$$

jeb

$$4 \le \int\limits_0^2 \sqrt{4+x^2}dx \le 4\sqrt{2}.$$

2.3. piemērs. Salīdzināt integrāļus $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}$ un $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$.

Intervālā $[0,1]$ $x^2 < x$, tāpēc

$$\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+x^2}$$

un

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x} < \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$$

2.4. piemērs. Atrast funkcijas $f(x) = 1+x$ vidējo vērtību intervālā $[-1;4]$.

Izmanto noteiktā integrāļa vidējās vērtības īpašību: tā kā funkcija $f(x) = 1+x$ ir nepārtraukta intervālā $[-1;4]$, tad eksistē tāds punkts x_0, ka

$$\int\limits_{-1}^4 (1+x)dx = f(x_0)\big(4-(-1)\big).$$

Tā kā
$$\int_{-1}^{4}(1+x)dx=\frac{25}{2},$$
tad
$$\frac{25}{2}=f(x_0)5;\ \ f(x_0)=\frac{5}{2};\ \ x_0=\frac{5}{2}-1=\frac{3}{2}.$$
Tātad, funkcijas $f(x)=1+x$ vidējā vērtība intervālā $[-1;4]$ ir $\frac{5}{2}$, un tas ir pie $x=\frac{3}{2}$.

2.1.3. Noteiktā integrāļa izskaitļošana

2.1. teorēma. [**Integrālrēķinu pamatteorēma**]

Ja funkcija f ir nepārtraukta intervālā $[a;b]$ un F ir funkcijas f patvaļīga primitīvā funkcija, tad

$$\boxed{\int_{a}^{b}f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a).}$$

Šo sakarību sauc par ***Ņūtona-Leibnica formulu****.*

2.5. piemērs. Atrast $\displaystyle\int_{1}^{8}\sqrt[3]{x^2}dx.$

$$\int_{1}^{8}\sqrt[3]{x^2}dx=\int_{1}^{8}x^{\frac{2}{3}dx}=\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\Big|_1^8=\frac{3}{5}\left(8^{\frac{5}{3}}-1\right)=\frac{3}{5}(32-1)=\frac{93}{5}.$$

2.1.4. Integrēšanas pamatmetodes noteiktajā integrālī

1. Parciālā integrēšana.

2.2. teorēma. *Ja funkcijas $u=u(x)$ un $v=v(x)$ ir nepārtraukti diferencējamas intervālā $[a;b]$, tad*

$$\boxed{\int_{a}^{b}udv=uv\Big|_a^b-\int_{a}^{b}vdu.}$$

Šī formula izsaka parciālās integrēšanas būtību noteiktajā integrālī.

2.6. piemērs. Izskaitļot $\int\limits_1^e x\ln x dx$.

$$\int\limits_1^e x\ln x dx = \left| \begin{array}{l} u=\ln x;\ du=\frac{dx}{x} \\ dv = xdx;\ v=\frac{x^2}{2} \end{array} \right| = (\ln x)\frac{x^2}{2}\Big|_1^e - \int\limits_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x} =$$

$$= (\ln x)\frac{x^2}{2}\Big|_1^e - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = (\ln e)\frac{e^2}{2} - (\ln 1)\frac{1}{2} - \left(\frac{e^2}{4}-\frac{1}{4}\right) = \frac{e^2+1}{4}.$$

2. Integrēšana ar mainīgā aizvietošanu.

2.3. teorēma. *Ja funkcija $f(x)$ ir nepārtraukta intervālā $[a;b]$, funkcija $\varphi(t)$ ir nepārtraukti diferencējama intervālā $[\alpha;\beta]$ un tā attēlo intervālu $[\alpha;\beta]$ par intervālu $[a;b]$, pie tam $\varphi(\alpha)=a$ un $\varphi(\beta)=b$, tad*

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt.}$$

Šī formula izsaka integrēšanas ar mainīgā aizvietošanu būtību noteiktajā integrālī. Jāievēro, ka izdarot mainīgā aizvietošanu noteiktajā integrālī, ir jānosaka integrēšanas robežas, kādās mainās integrēšanas mainīgais, ar kuru aizstāj doto integrēšanas mainīgo.

2.7. piemērs. Izskaitļot $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$.

$$\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx = \left| \begin{array}{c} x=\sin t;\ dx=\cos t dt; \\ \text{ja } x_1=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \text{tad } t_1=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4} \\ \text{ja } x_2=1,\ \text{tad } t_2=\arcsin 1=\frac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\sin^2 t}}{\sin^2 t}\cos t dt = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 t}{\sin^2 t}dt =$$

$$= \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt = (-\operatorname{ctg} t - t)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) + \left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right) = 1-\frac{\pi}{4}.$$

Nereti, lai atvieglotu noteiktā integrāļa izskaitļošanu, izmanto šādas likumsakarības:

1. Ja f ir pāra funkcija, t.i., $f(-x) = f(x)$ un integrēšanas intervāls ir simetrisks attiecībā pret koordinātu sākuma punktu, tad
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx.$$
2. Ja f ir nepāra funkcija, t.i., $f(-x) = -f(x)$ un integrēšanas intervāls ir simetrisks attiecībā pret koordinātu sākuma punktu, tad
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$$

Auditorijā risināmie uzdevumi

Izskaitļot integrāļus.

1. $\displaystyle\int_{1}^{16} \sqrt{x}dx;$
2. $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{\ln^2 x}{x}dx;$
3. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx;$
4. $\displaystyle\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{\frac{\pi}{4} - \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx;$
5. $\displaystyle\int_{0}^{1} xe^{-x}dx;$
6. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} (2-x)\sin 3x dx;$
7. $\displaystyle\int_{1}^{e^4} \sqrt{x}\ln x dx;$
8. $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx;$
9. $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}dx;$
10. $\displaystyle\int_{1}^{2} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx.$

Mājas darba uzdevumi

Izskaitļot integrāļus.

1. $\displaystyle\int\limits_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x^2}}$;

2. $\displaystyle\int\limits_{-0,5}^{0,5} \frac{3^x dx}{1+9^x}$;

3. $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)dx$;

4. $\displaystyle\int\limits_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$;

5. $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{xdx}{\sin^2 x}$;

6. $\displaystyle\int\limits_{-1}^0 (2x+3)e^{-x}dx$;

7. $\displaystyle\int\limits_1^3 \frac{\sqrt{x}}{x+1}dx$;

8. $\displaystyle\int\limits_0^2 \sqrt{(4-x^2)^3}dx$;

9. $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3+5\cos x}$.

2.2. Noteiktā integrāļa lietojumi ģeometrijā

2.2.1. Plaknes figūras laukuma aprēķināšana

1. Laukums Dekarta koordinātās.

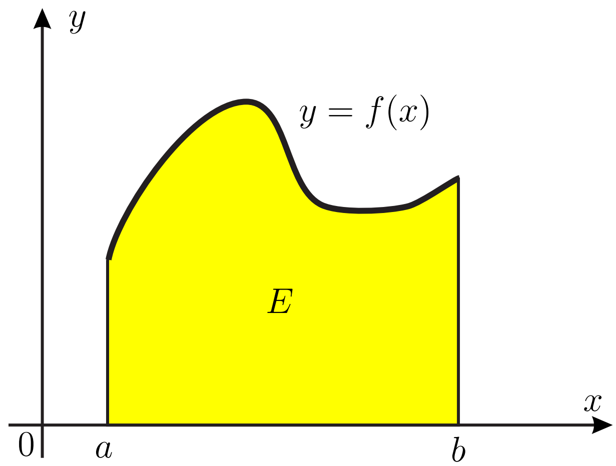
Pieņemsim, ka $f(x) \geq 0$ un $f(x)$ ir nepārtraukta intervālā $[a;b]$. Figūru

$$E = \left\{(x;y)\middle| a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\right\}$$

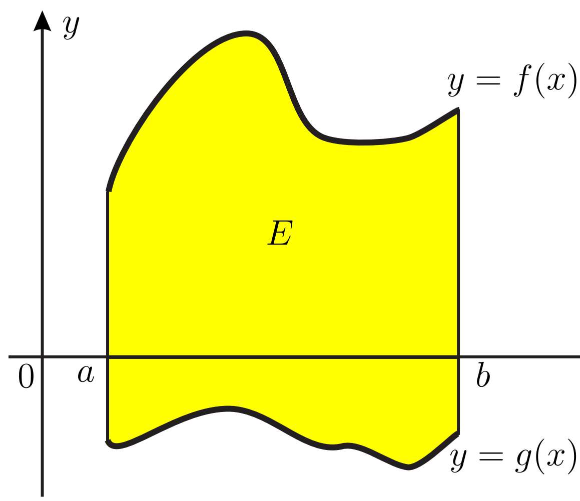
sauc par **līklīnijas trapeci** (2.1. zīm.).

Kā zināms, līklīnijas trapece ir kvadrējama plaknes figūra un tās laukums ir

$$\boxed{S = \int\limits_a^b f(x)dx.}$$



2.1. zīm.



2.2. zīm.

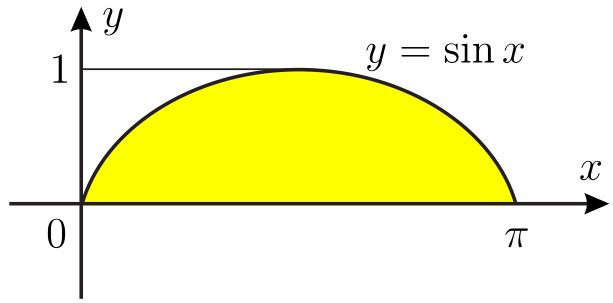
Ja plaknes figūru no apakšas ierobežo intervālā $[a; b]$ nepārtrauktas funkcijas g grafiks, no augšas - šajā intervālā nepārtrauktas funkcijas f grafiks, bet no sāniem - taisnes $x = a$ un $x = b$ (2.2. zīm.), tad laukums

$$\boxed{S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big) dx.}$$

2.2. piezīme.

1. Nepieciešamības gadījumā plaknes figūru sadala divās vai vairākās daļās un aprēķina laukumu katrai daļai atsevišķi.
2. Atsevišķos gadījumos ir lietderīgi par integrēšanas mainīgo ņemt nevis x, bet y.

2.8. piemērs. Aprēķināt laukumu figūrai, ko ierobežo līnijas $y = \sin x$ un $y = 0$, ja $0 \leq x \leq \pi$.

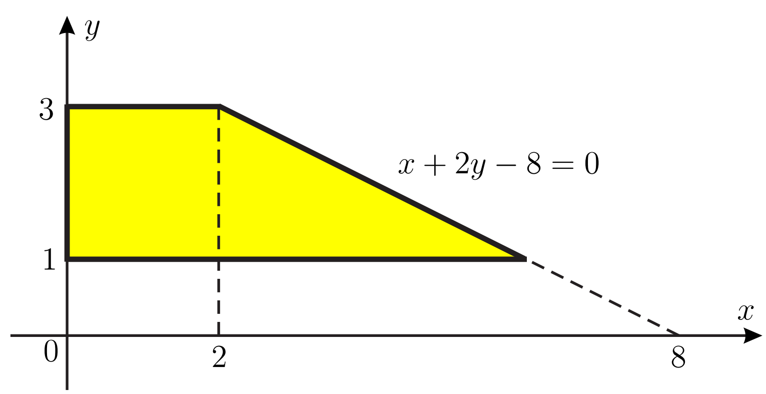


2.3. zīm.

$$S = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2.$$

2.9. piemērs. Aprēķināt laukumu figūrai, ko ierobežo taisnes

$$x + 2y - 8 = 0, \ y = 1, \ y = 3, \ x = 0.$$

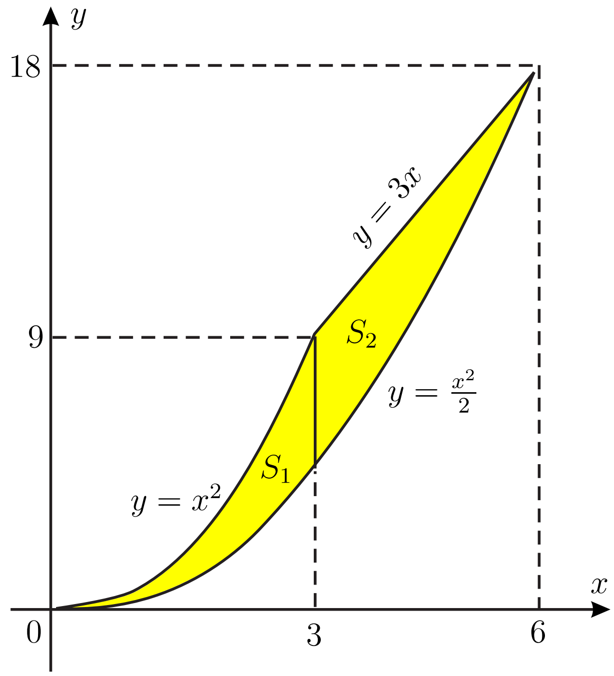


2.4. zīm.

Šoreiz par integrēšanas mainīgo ir lietderīgi ņemt y.

$$S = \int_1^3 (8-2y)dy = (8y - y^2)\Big|_1^3 = 8\cdot 3 - 9 - (8-1) = 15 - 7 = 8.$$

2.10. piemērs. Aprēķināt laukumu figūrai, ko ierobežo līnijas $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = 3x$.



2.5. zīm.

Dotā plaknes figūra jāsadala divās daļās. Vispirms atrod līniju krustpunktu koordinātas:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = 3x \end{cases} \quad (0;0) \text{ un } (3;9);$$

$$\begin{cases} y = \frac{x^2}{2} \\ y = 3x \end{cases} \quad (0;0) \text{ un } (6;18).$$

$$S = S_1 + S_2 = \int\limits_0^3 \left(x^2 - \frac{x^2}{2} \right) dx + \int\limits_3^6 \left(3x - \frac{x^2}{2} \right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{6}\bigg|_0^3 + \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right)\bigg|_3^6 = 13,5.$$

2. Laukuma aprēķināšana līklīnijas trapecei, kuru no augšas ierobežo parametriski uzdota līnija.

Pieņem, ka līnija ir uzdota ar vienādojumiem $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ pie tam x maiņai no a līdz b $(a < b)$ atbilst t maiņa no α līdz β.

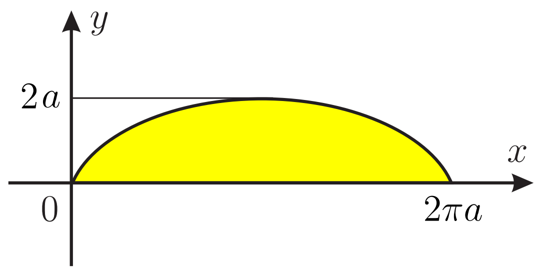
Laukumu līklīnijas trapecei, kuru no augšās ierobežo dotā līnija, var aprēķināt, izmantojot formulu:

$$\boxed{S = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt.}$$

2.11. piemērs. Aprēķināt laukumu figūrai, ko ierobežo cikloīdas

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

viena arka un abscisu ass.



2.6. zīm.

Ja x mainās no 0 līdz $2\pi a$, tad parametrs t mainās no 0 līdz 2π. Atrod $x'(t) = a(1 - \cos t)$.

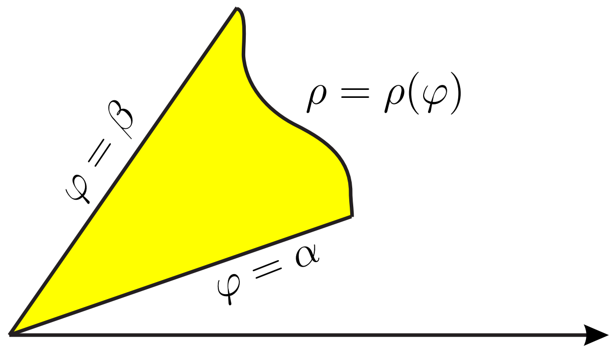
$$S = \int\limits_0^{2\pi} a(1 - \cos t)a(1 - \cos t)dt = a^2 \int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt =$$

$$= a^2 \int\limits_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt = a^2 \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{\sin 2t}{4} \right) \Bigg|_0^{2\pi} = 3\pi a^2.$$

(Funkcijas $\cos^2 t$ primitīvā funkcija atrasta, lietojot pakāpes pazemināšanas formulu).

3. Laukuma aprēķināšana līklīnijas sektoram (laukums polārajās koordinātās).

2.3. definīcija. Plaknes figūru, ko ierobežo divi stari $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ un intervālā $[\alpha, \beta]$ nepārtrauktas un nenegatīvas funkcijas $\rho = \rho(\varphi)$ grafiks, sauc par **līklīnijas sektoru**.



2.7. zīm.

Līklīnijas sektors ir kvadrējama figūra; tā laukumu var aprēķināt pēc formulas:

$$\boxed{S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi.}$$

2.3. piezīme.

1. Ja figūru ierobežo izliekta slēgta līnija, kas iet caur polu, tad taisnes $\varphi = \alpha$ un $\varphi = \beta$ jāaizstāj ar šīs līnijas pieskarēm, kas novilktas polā.

   Piemēram, aprēķinot laukumu figūrai, ko ierobežo trīslapu roze $\rho = a\cos 3\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$ (2.12. piem.).
2. Ja figūru ierobežo slēgta līnija un pols atrodas tās iekšpusē, φ maiņas robežas ir no 0 līdz 2π. Piemēram, atrodot laukumu figūrai, ko ierobežo elipse.

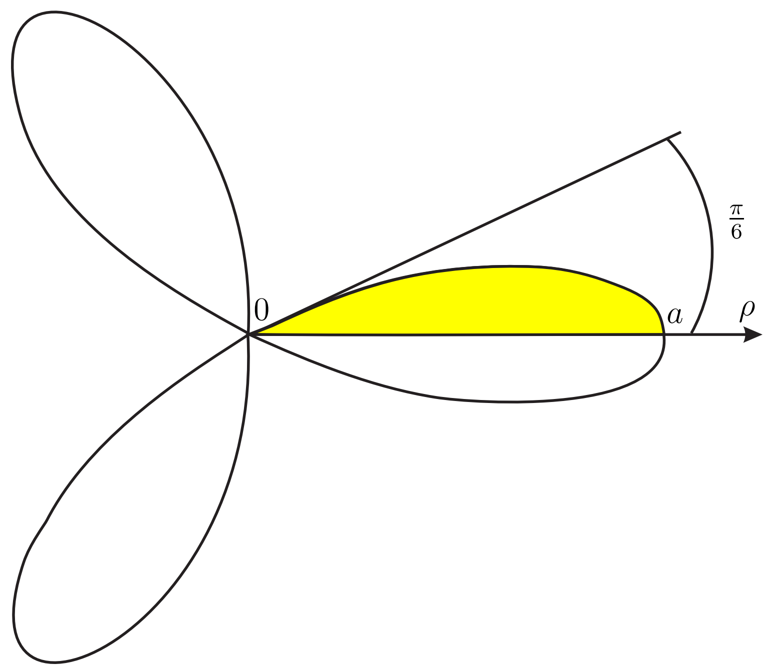
2.12. piemērs. Aprēķināt laukumu figūrai, ko ierobežo trīslapu roze $\rho = a\cos 3\varphi$ (2.8. zīm.).

Izmantojot simetriju, var atrast laukumu sestajai daļai no visa laukuma.

$$S = 6\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(a\cos 3\varphi)^2 d\varphi = 3a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\varphi d\varphi =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos 6\varphi)d\varphi = \frac{3a^2}{2}\left(\varphi + \frac{1}{6}\sin 6\varphi\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{6}} =$$

$$= \frac{3a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

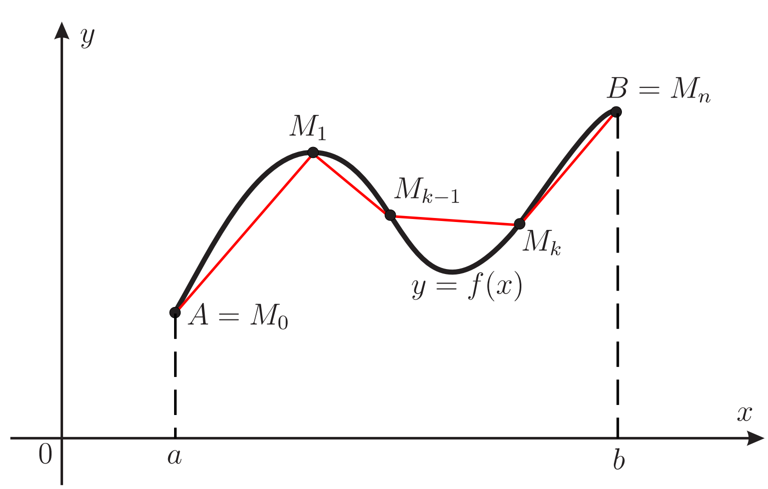


2.8. zīm.

2.2.2. Līknes loka garuma aprēķināšana

1. Loka garuma aprēķināšana, ja līkne ir intervālā $[a; b]$ nepārtraukti diferencējamas funkcijas $f(x)$ grafiks.

2.4. definīcija. Par **līknes loka** AB **garumu** s sauc šajā lokā ievilktas lauztas līnijas garuma robežu, kad lauztās līnijas posmu skaits neierobežoti palielinās, bet to garumi tiecas uz nulli.



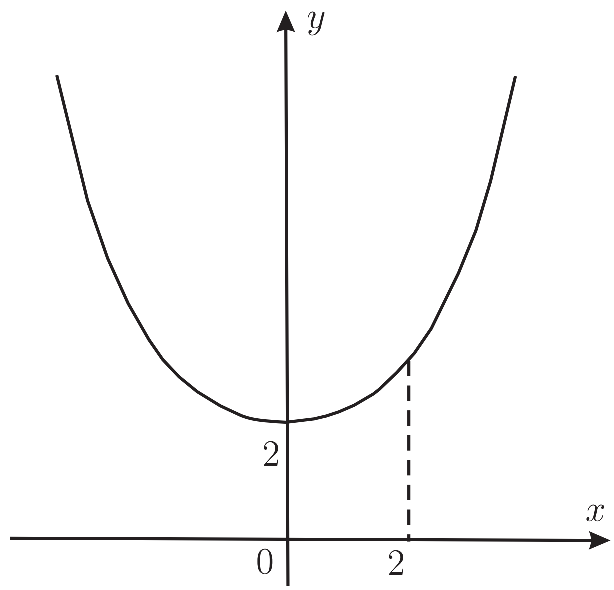
2.9. zīm.

$$s = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} M_{k-1}M_k,$$

kur $\lambda = \max\limits_{1 \le k \le n} M_{k-1}M_k$. Ja šāda robeža eksistē, tad līkni AB sauc par **rektificējamu** jeb **iztaisnojamu**, un tās garumu s aprēķina pēc formulas

$$\boxed{s = \int\limits_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx.} \qquad (*)$$

2.13. piemērs. Aprēķināt ķēdes līnijas $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}$ garumu, ja $0 \le x \le 2$.



2.10. zīm.

Atrod $y' = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)$, tad

$$\sqrt{1 + y'^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(e^x - 2 + e^{-x}\right)} = \sqrt{\frac{e^x + 2 + e^{-x}}{4}} = \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{2}.$$

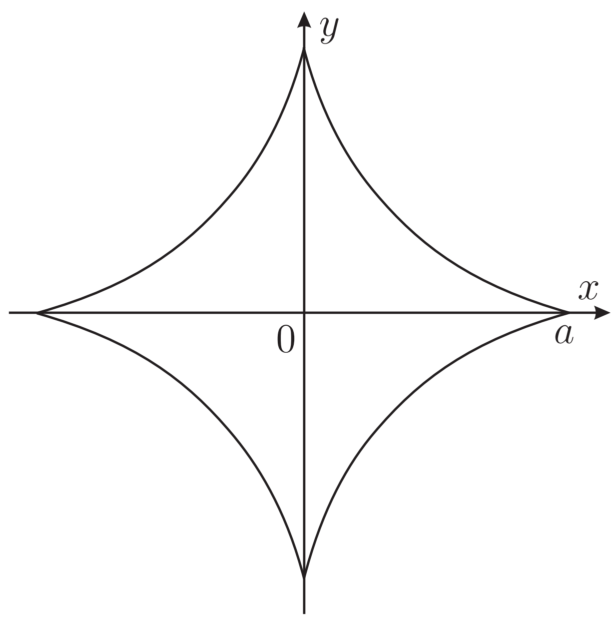
$$s = \int\limits_0^2 \sqrt{1 + y'^2}dx = \int\limits_0^2 \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{2}dx = \left(e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}\right)\Bigg|_0^2 = e - \frac{1}{e} \approx 1,45.$$

2. Parametriski uzdotas līknes loka garuma aprēķināšana.

Pieņem, ka līknes loks ir uzdots ar vienādojumiem $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ $\alpha \leq t \leq \beta$. Izdarot mainīgo aizvietošanu formulā $(*)$, iegūst:

$$\boxed{s = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt.} \qquad (**)$$

2.14. piemērs. Aprēķināt astroīdas $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ garumu.



2.11. zīm.

Tā kā astroīda ir simetriska līkne, tad pietiekami aprēķināt garumu šīs līnijas ceturtajai daļai (parametrs t mainās no 0 līdz $\frac{\pi}{2}$).

Tā kā

$$x' = -3a\cos^2 t \sin t; \quad y' = 3a\sin^2 t \cos t,$$

tad

$$s = 4 \cdot 3a \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t}dt =$$

$$= 12a \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 t \cos^2 t(\sin^2 t + \cos^2 t)}dt = 12a \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t dt =$$

$$= \frac{12a}{2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = 6a \left(-\frac{1}{2} \cos 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -3a(\cos \pi - \cos 0) = 6a.$$

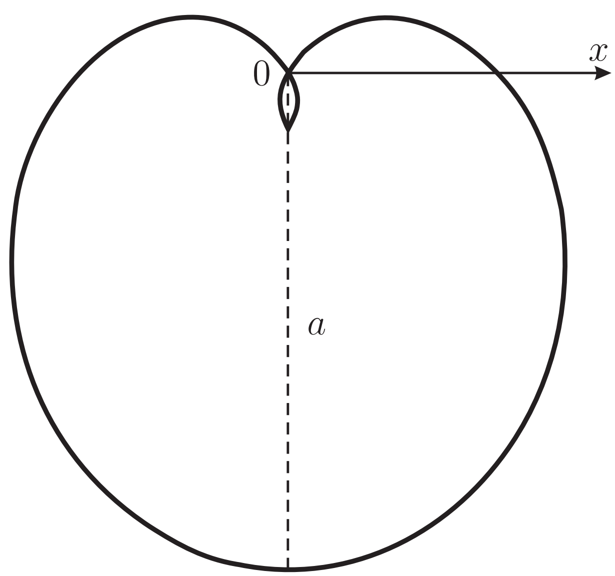
3. Loka garuma aprēķināšana, ja līkne uzdota polārajās koordinātās.

Pieņem, ka līkne uzdota ar vienādojumu $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ un funkcija $\rho = \rho(\varphi)$ ir nepārtraukti diferencējama intervālā $[\alpha; \beta]$.

Tad, parametrizējot šo līkni un izmantojot formulu $(**)$, iegūst:

$$s = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi.$$

2.15. piemērs. Aprēķināt līknes $\rho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$ $(0 \leq \varphi \leq 3\pi)$ garumu.



2.12. zīm.

Tā kā

$$\rho' = 3a \sin^2 \frac{\varphi}{3} \cos \frac{\varphi}{3} \cdot \frac{1}{3} = a \sin^2 \frac{\varphi}{3} \cos \frac{\varphi}{3},$$

tad

$$s = \int_0^{3\pi} \sqrt{a^2 \sin^6 \frac{\varphi}{3} + a^2 \sin^4 \frac{\varphi}{3} \cos^2 \frac{\varphi}{3}} d\varphi =$$

$$= a \int_0^{3\pi} \sqrt{\sin^4 \frac{\varphi}{3} \left(\sin^2 \frac{\varphi}{3} + \cos^2 \frac{\varphi}{3}\right)} d\varphi =$$

$$= a \int_0^{3\pi} \sin^2 \frac{\varphi}{3} d\varphi = \frac{a}{2} \int_0^{3\pi} \left(1 - \cos \frac{2\varphi}{3}\right) d\varphi =$$

$$= \frac{a}{2} \left(\varphi - \frac{3}{2} \sin \frac{2\varphi}{3}\right) \Bigg|_0^{3\pi} = \frac{a}{2} 3\pi = \frac{3\pi a}{2}.$$

2.2.3. Ķermeņa tilpuma aprēķināšana

1. Ķermeņa tilpuma aprēķināšana, ja zināms tā šķērsgriezuma laukums.

Pieņem, ka $S(x)$ ir ķermeņa šķērsgriezuma laukums, pie tam funkcija $S(x)$ ir nepārtraukta intervālā $[a; b]$. Tad ķermeņa tilpums

$$\boxed{V = \int_a^b S(x) dx.}$$

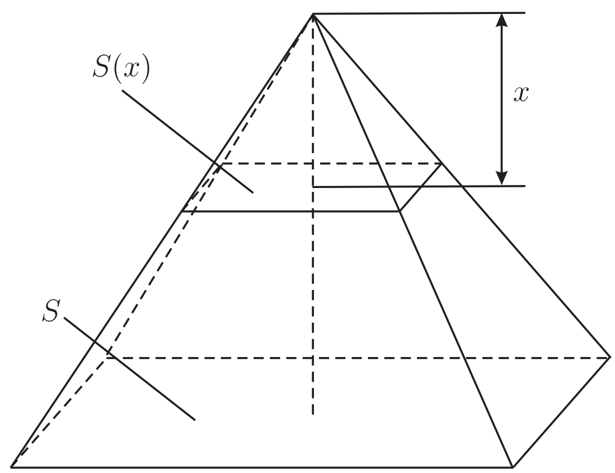
2.16. piemērs. Aprēķināt tilpumu piramīdai, kuras pamata laukums ir S, un augstums ir H (2.13. zīm.).

Ir zināms, ka $\frac{S(x)}{S} = \frac{x^2}{H^2}$; tātad

$$S(x) = \frac{Sx^2}{H^2}$$

un

$$V = \int_0^H \frac{Sx^2}{H^2} dx = \frac{S}{H^2} \int_0^H x^2 dx = \frac{S}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Bigg|_0^H = \frac{1}{3} SH.$$



2.13. zīm.

2.2.4. Rotācijas ķermeņa tilpuma aprēķināšana

Pieņemsim, ka rotācijas ķermenis rodas, līklīnijas trapecei rotējot ap Ox asi.

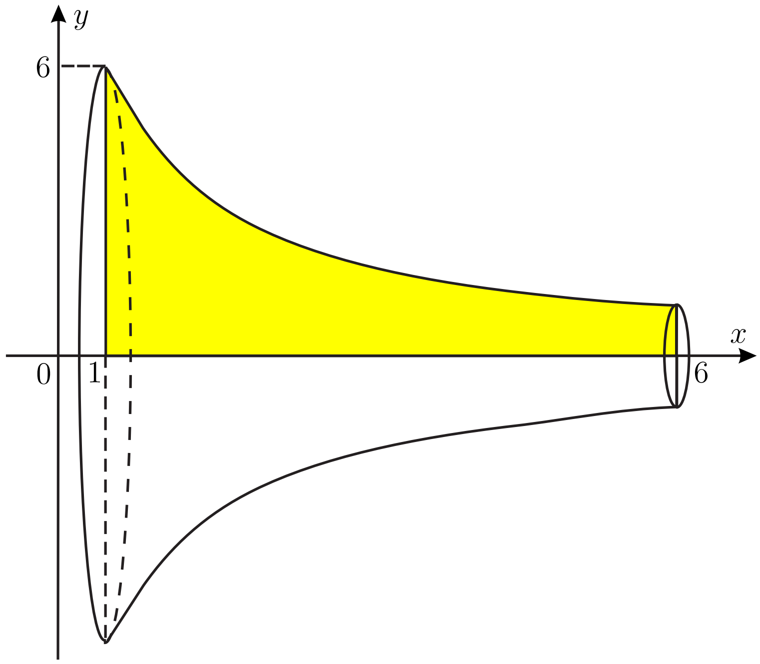
Tā kā rotācijas ķermeņa šķērsgriezums ir riņķis, tad tā šķērsgriezuma laukums ir riņķa laukums, t.i., $S(x) = \pi f^2(x)$, kur $f(x)$ ir riņķa rādiuss un

$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.}$$

2.4. piezīme.

1. Ja ap Ox asi rotē figūra, kuru ierobežo intervālā $[a; b]$ nenegatīvu un nepārtrauktu funkciju $y = f_1(x)$ un $y = f_2(x)$ grafiki, pie tam $f_2(x) \geq f_1(x)$, tad rotācijas ķermeņa tilpumu var aprēķināt pēc formulas:
$$\boxed{V = \pi \int_a^b \left(f_2^2(x) - f_1^2(x)\right) dx.}$$
2. Ja rotācijas ķermenis rodas, līklīnijas trapecei rotējot ap Oy asi, tad šāda ķermeņa tilpumu var aprēķināt pēc formulas:
$$\boxed{V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx.}$$

2.17. piemērs. Aprēķināt tilpumu ķermenim, kas rodas, ap Ox asi rotējot plaknes figūrai, kuru ierobežo līnijas $xy = 6$, $x = 1$, $y = 6$ (2.14. zīm.).



2.14. zīm.

Tā kā $y = \frac{6}{x}$; tad

$$V = \pi \int_1^6 \left(\frac{6}{x}\right)^2 dx = 36\pi \int_1^6 x^{-2} dx = 36\pi \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^6 =$$

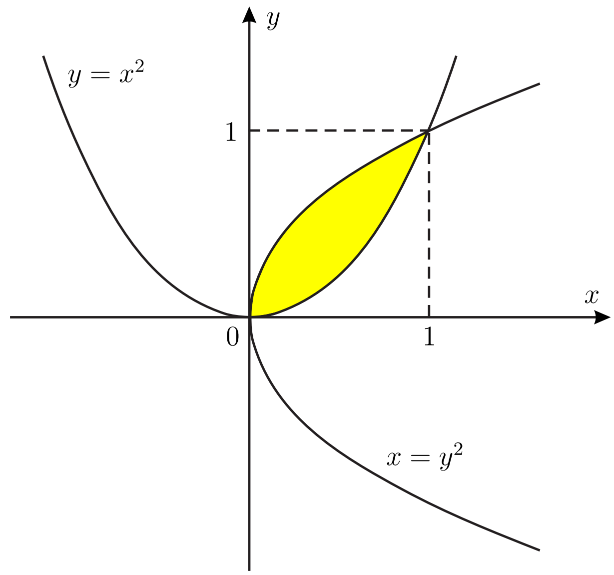
$$= 36\pi \left(-\frac{1}{6} + 1\right) = 30\pi.$$

2.18. piemērs. Aprēķināt tilpumu ķermenim, kas rodas, ap Oy asi rotējot figūrai, kuru ierobežo līnijas $y = x^2$ un $x = y^2$ (2.15. zīm.).

Atrisinot sistēmu $\begin{cases} y = x^2, \\ x = y^2, \end{cases}$ atrod līniju krustpunktus: $(0; 0)$ un $(1; 1)$. Tā kā visiem $y \in [0; 1]$ ir spēkā nevienādība $\sqrt{y} \geq y^2$, tad

$$V = \pi \int_0^1 \left((\sqrt{y})^2 - (y^2)^2\right) dy = \pi \int_0^1 (y - y^4) dy = \pi \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^5}{5}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3\pi}{10}.$$

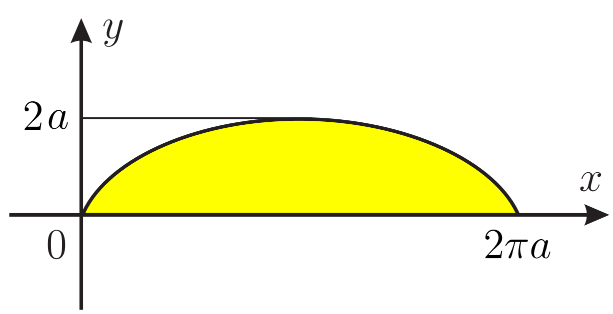


2.15. zīm.

2.19. piemērs. Aprēķināt tilpumu ķermenim, kas rodas, ap Ox asi rotējotfigūrai, kuru ierobežo cikloīdas

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$$

viena arka un Ox ass.



2.16. zīm.

Izmanto formulu $V = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$, izdarot mainīgā aizvietošanu. Tā kā $0 \le x \le 2\pi a$, tad $0 \le t \le 2\pi$; $dx = a(1 - \cos t)dt$.

$$V = \pi \int\limits_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 a(1 - \cos t)dt = \pi a^3 \int\limits_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt =$$

$$= \pi a^3 \int\limits_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cos^2 t - \cos^3 t)dt = \pi a^3 (t - 3\sin t)\Big|_0^{2\pi} +$$

$$+ \frac{3\pi a^3}{2} \int\limits_0^{2\pi} (1 + \cos 2t)dt - \pi a^3 \int\limits_0^{2\pi} (1 - \sin 2t) d(\sin t) =$$

$$= \pi a^3 2\pi + \frac{3\pi a^3}{2} \left(t + \frac{1}{2}\sin 2t \right) \Bigg|_0^{2\pi} - \pi a^3 \left(\sin t - \frac{\sin^3 t}{3} \right) \Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$= 2\pi^2 a^3 + \frac{3\pi a^3}{2} 2\pi = 2\pi^2 a^3 + 3\pi^2 a^3 = 5\pi^2 a^3.$$

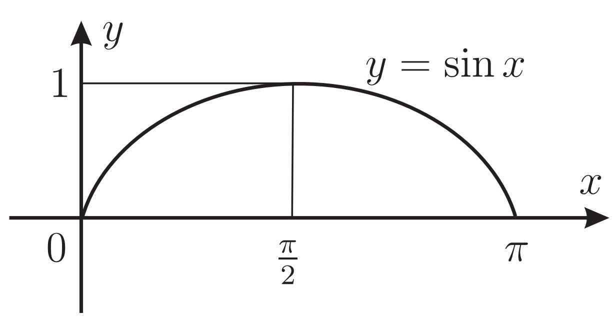
2.2.5. Rotācijas virsmas laukuma aprēķināšana

1. Rotācijas virsmas laukuma izskaitļošana, ja līkne uzdota Dekarta koordinātās.

Laukumu rotācijas virsmai, kas rodas, ap Ox asi rotējot nenegatīvas un nepārtraukti diferencējamas funkcijas $f(x)$ grafikam, aprēķina pēc formulas:

$$\boxed{S = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx.}$$

2.20. piemērs. Izskaitļot laukumu virsmai, kas rodas, rotējot ap Ox asi sinusoīdas $y = \sin x$ lokam, $0 \leq x \leq \pi$.



2.17. zīm.

$$S = 2\pi \int_0^{\pi} \sin x \sqrt{1+\cos^2 x}dx = \left| \begin{array}{c} \cos x = t, \ -\sin x dx = dt; \\ \text{ja } x = 0, \ \text{tad } t = 1, \\ x = \pi, \ \text{tad } t = -1. \end{array} \right| =$$

$$= -2\pi \int_1^{-1} \sqrt{1+t^2}dt = 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1+t^2}dt =$$

$$= \frac{2\pi}{2}\left(t\sqrt{1+t^2} + \ln\left(t + \sqrt{1+t^2}\right)\right)\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= \pi\big(2\sqrt{2} + \ln(3+2\sqrt{2})\big) \approx 14,38.$$

2. Rotācijas virsmas laukuma izskaitļošana, ja līkne uzdota parametriskā veidā.

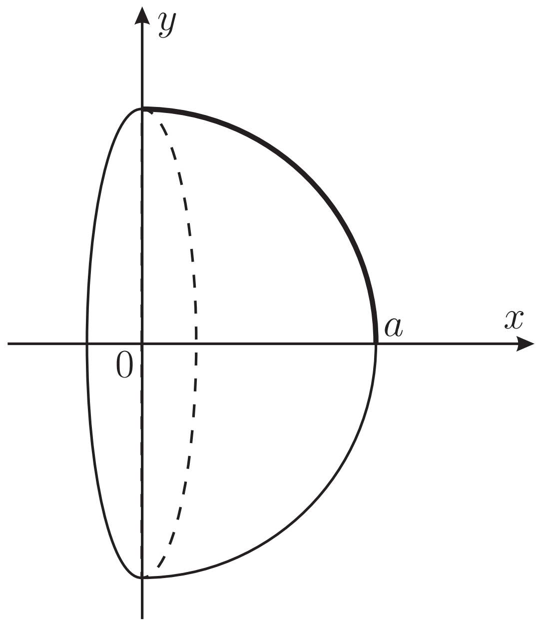
Ja līkne uzdota parametriski, t.i., $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$ $\alpha \leq t \leq \beta$, un funkcijas $\varphi(t)$, $\psi(t)$ ir nepārtraukti diferencējamas, tad rotācijas virsmas laukumu aprēķina pēc formulas:

$$\boxed{S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt.}$$

2.21. piemērs. Izskaitļot laukumu rotācijas virsmai, kas rodas, rotējot ap Ox asi līnijai $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \end{cases}$ $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ (2.18. zīm.).

$$S = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sin t\sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t}dt =$$

$$= 2\pi a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t dt = 2\pi a^2(-\cos t)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi a^2.$$



2.18. zīm.

3. Rotācijas virsmas laukuma izskaitļošana, ja ap polāro asi rotē polārajās koordinātās uzdota līkne.

Ja polārajās koordinātās uzdota līkne $\rho = \rho(\varphi)$ $(\alpha \le \varphi \le \beta)$ rotē ap polāro asi, tad rotācijas virsmas laukumu aprēķina pēc formulas

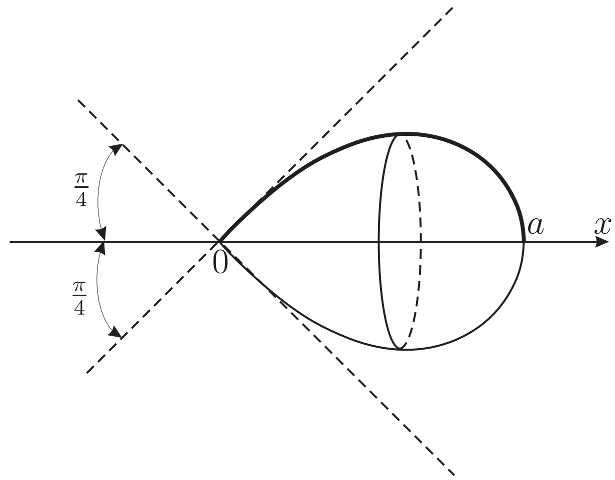
$$\boxed{S = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho(\varphi) \sin\varphi \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}d\varphi.}$$

2.22. piemērs. Izskaitļot laukumu virsmai, kas rodas, rotējot ap polāro asi līknei $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$ $(0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4})$.

$$\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}, \quad \rho' = -\frac{a \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}};$$

$$\rho^2 + \rho'^2 = a^2 \cos 2\varphi + \frac{a^2 \sin^2 2\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{a^2}{\cos 2\varphi}.$$

$$S = 2\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} a\sqrt{\cos 2\varphi} \sin\varphi \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi = 2\pi a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi d\varphi = \left(2 - \sqrt{2}\right) \pi a^2.$$



2.19. zīm.

Auditorijā risināmie uzdevumi

1. Aprēķināt laukumu figūrai, ko ierobežo līnijas
   (a) $y = \frac{x^2}{2},\ x = 1,\ x = 3,\ y = 0;$
   (b) $y = |x| + 1,\ y = 0,\ x = -2,\ x = 1;$
   (c) $y = x^2,\ y = 2 - x^2;$
   (d) $y^2 = 2x + 1,\ x - y - 1 = 0.$
2. Aprēķināt astroīdas $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ ierobežoto laukumu.
3. Aprēķināt laukumu figūrai, ko ierobežo līnijas $x = a(t^2 - 1)$, $y = b(4t - t^3)$ cilpa ($a > 0$, $b > 0$).
4. Aprēķināt laukumu figūrai, ko ierobežo riņķa līnijas $\rho = 2a\cos\varphi$, $\rho = 2a\sin\varphi$.
5. Aprēķināt līnijas $y = \ln\sin x$ loka garumu, ja $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$.
6. Aprēķināt līnijas $x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t$, $y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t$ loka garumu ($0 \le t \le \pi$).
7. Aprēķināt Arhimeda spirāles $\rho = a\varphi$ pirmās vītnes garumu.
8. Aprēķināt tilpumu konusam, kura pamata rādiuss ir R un augstums ir H.
9. Aprēķināt tilpumu ķermenim, kas rodas, rotējot figūrai, kuru ierobežo līnija $y = \sin x$, $0 \le x \le \pi$

(a) ap Ox asi,

(b) ap Oy asi.

10. Aprēķināt tilpumu ķermenim, kas rodas, ap Oy asi rotējot figūrai, kuru ierobežo līnijas $y^2 = 4 - x$, $x = 0$.

11. Aprēķināt tilpumu ķermenim, kas rodas, ap Ox asi rotējot cikloīdai $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Mājas darba uzdevumi

1. Aprēķināt laukumu figūrai, ko ierobežo līnijas

   (a) $y + x^2 = 0,\ x + y = 0;$

   (b) $y = \arcsin 2x,\ x = 0,\ y = -\frac{\pi}{2};$

   (c) $y = \ln x,\ x = e,\ x = e^2,\ y = 0;$

   (d) $y = |x - 1|,\ y = 3 - |x|.$

2. Aprēķināt laukumu figūrai, ko ierobežo parabola $(y - 2)^2 = x - 1$, Ox ass un pieskare parabolai, kas novilkta punktā ar ordināti $y_0 = 3$.

3. Aprēķināt laukumu figūrai, ko ierobežo cikloīda $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$ un taisne $y = 3$ $(0 \leq x \leq 4\pi,\ y \geq 3)$.

4. Aprēķināt laukumu figūrai, ko ierobežo kardioīda $\rho = a(1 - \cos\varphi)$.

5. Aprēķināt laukumu figūrai, ko ierobežo riņķa līnijas $\rho = \sqrt{3}\cos\varphi$, $\rho = \cos\varphi$, ja $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

6. Aprēķināt līnijas $y = \ln x$ loka garumu, ja $\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}$.

7. Aprēķināt līnijas $x = t^2$, $y = t - \frac{t^3}{3}$ loka garumu, ja $0 \leq x \leq 3$.

8. Aprēķināt līnijas $\rho = \sin^3\frac{\varphi}{3}$ loka garumu, ja $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$.

9. Aprēķināt tilpumu ķermenim, kas rodas, ap Ox asi rotējot figūrai, kuru ierobežo līnijas $y^2 = (x - 1)^3$, $x = 2$.

10. Aprēķināt tilpumu ķermenim, kas rodas, ap Oy asi rotējot figūrai, kuru ierobežo līnijas $y = x^3$, $y = 8$ un koordinātu asis.

11. Aprēķināt laukumu virsmai, kas rodas, ap polāro asi rotējot kardioīdai $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

12. Aprēķināt laukumu virsmai, kas rodas, ap Ox asi rotējot figūrai, ko ierobežo līnijas $y = \operatorname{tg} x$, $x = 0$, $x = a$ $(0 \leq a \leq \frac{\pi}{2})$.

2.3. Noteiktā integrāļa lietojumi fizikā

2.3.1. Materiāla punkta noietā ceļa izskaitļošana

Ja punkts pārvietojas ar ātrumu $v = f(t)$, tad punkta noieto ceļu laika intervālā $[t_1; t_2]$ aprēķina pēc formulas

$$\boxed{s = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)dt.}$$

2.23. piemērs. Punkts pārvietojas ar ātrumu $v = 0,1t^3$ m/s. Izskaitļot punkta noieto ceļu pēc 10 sekundēm no kustības sākuma.

$$s = \int\limits_0^{10} 0,1t^3 dt = 0,1\frac{t^4}{4}\Bigg|_0^{10} = 250\ (m).$$

2.3.2. Mainīga spēka padarītā darba izskaitļošana

Darbu, ko veic mainīgs spēks $F = f(x)$, pārvietojot materiālu punktu pa Ox asi no punkta $x = a$ līdz punktam $x = b$, aprēķina pēc formulas

$$\boxed{A = \int\limits_a^b f(x)dx.}$$

Risinot uzdevumu par darba aprēķināšanu, bieži izmanto **Huka likumu**:

$$F = kx,$$

kur F - spēks;
x - absolūtais atsperes pagarinājums, ko izraisa spēks F;
k - proporcionalitātes koeficients.

2.24. piemērs. Izskaitļot darbu, kas jāveic, izstiepjot atsperi par 6 cm, ja tās izstiepšanai par 1 cm nepieciešams $10N$ liels spēks.

Izmantojot Huka likumu, aprēķina proporcionalitātes koeficientu:

$$k = \frac{10}{0,01} = 1000.$$

Tātad $F = 1000x$ un

$$A = \int_{0}^{0,06} 1000x dx = 500x^2 \Big|_0^{0,06} = 500 \cdot 0,0036 = 1,8 \ (J).$$

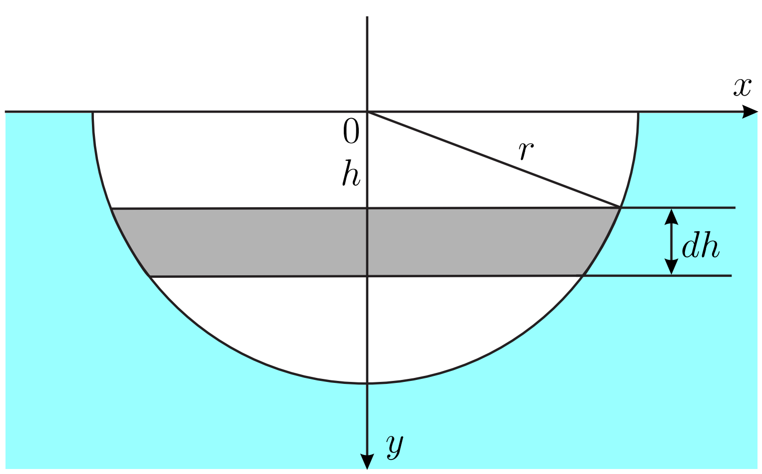
2.3.3. Šķidruma spiediena spēka izskaitļošana

Šķidruma spiediena spēka izskaitļošanai izmanto **Paskāla likumu**

$$P = \gamma h S,$$

kur P - šķidruma spiediena spēks;
h - virsmas iegremdēšanas dziļums;
S - virsmas laukums;
γ - šķidruma īpatnējais svars.

2.25. piemērs. Atrast hidrostatisko spiedienu uz pusriņķi, kas vertikāli iegremdēts ūdenī tā, ka pusriņķa diametrs atrodas uz ūdens virsmas.



2.20. zīm.

Dotā pusriņķa laukumu sadala joslās, kas paralēlas ūdens virsmai. Katras joslas, kas atrodas attālumā h no ūdens virsmas, laukums ir

$$dS = 2xdh = 2\sqrt{r^2 - h^2}dh.$$

Spiediena spēks, kas darbojas uz šo joslu, ir

$$dP = \gamma h dS = 2\gamma h\sqrt{r^2 - h^2}dh,$$

kur $\gamma = 1$.

$$P = 2\int\limits_0^r h\sqrt{r^2 - h^2}dh = -\frac{2}{3}(r^2 - h^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^r = \frac{2}{3}r^2.$$

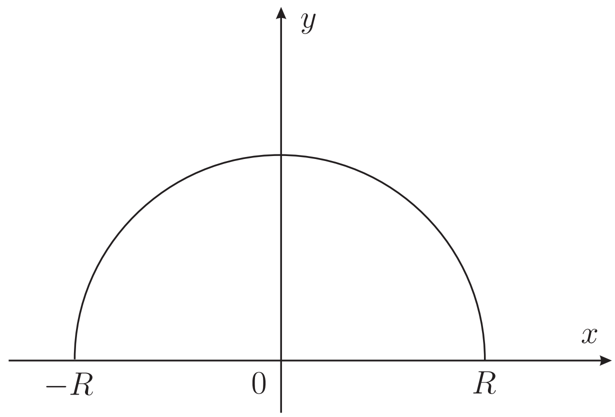
2.3.4. Materiālas līnijas masas, spēka momentu un masas centra aprēķināšana

Ja materiālas līnijas masu apzīmē ar m, spēka momentus pret attiecīgām koordinātu asīm - M_x un M_y, masas centra koordinātas - ar x_c, y_c, tad

$$\boxed{\begin{aligned} m &= \int\limits_a^b \mu(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx; \\ M_x &= \int\limits_a^b f(x)\mu(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx; \\ M_y &= \int\limits_a^b x\mu(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx; \\ x_c &= \frac{M_y}{m}; \quad y_c = \frac{M_x}{m}; \end{aligned}}$$

$\mu(x)$ - līnijas lineārais blīvums,
$y = f(x)$ - materiālas līnijas vienādojums dotajā intervālā $[a; b]$.

2.26. piemērs. Aprēķināt masu riņķa līnijas pusei, ja tās lineārais blīvums jebkurā punktā ir vienāds ar šī punkta attālumu līdz diametram, kas savieno tās galapunktus.



2.21. zīm.

Riņķa līniju novieto xOy plaknē tā, lai tās centrs sakristu ar koordinātu sākumpunktu, bet diametrs atrastos uz Ox ass.

Riņķa līnijas vienādojums ir $x^2 + y^2 = R^2$, bet tās jebkura punkta attālums līdz diametram ir y. Tad $\mu(x) = y$ un pēc attiecīgās formulas

$$m = \int_{-R}^{R} y\sqrt{1 + y'^2}dx.$$

No riņķa līnijas vienādojuma

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}},$$

tad

$$m = \int_{-R}^{R} \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2}dx =$$

$$= - \int_{-R}^{R} Rdx = Rx\Big|_{-R}^{R} = 2R^2.$$

2.5. piezīme. Ja līnija ir homogēna (μ =const), tad tās masas, spēka momentu un smaguma centra aprēķināšanas formulas ir vienkāršākas:

$$m = \mu \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx;$$

$$M_x = \mu \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}dx;$$

$$M_y = \mu \int_a^b x\sqrt{1 + f'^2(x)}dx;$$

$$x_c = \frac{M_y}{s}; \;\; y_c = \frac{M_x}{s},$$

kur s ir līnijas loka garums.

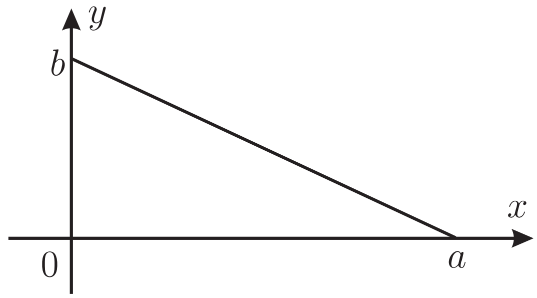
2.3.5. Homogēnas plaknes figūras (līklīnijas trapeces) spēka momentu un masas centra aprēķināšana

Ja homogēnas plaknes figūras, kas ir līklīnijas trapece, spēka momentus pret attiecīgām koordinātu asīm apzīmē ar M_x un M_y, tās masas centra koordinātas - ar x_c, y_c, tad

$$\boxed{\begin{array}{ll} M_x = \frac{1}{2}\mu \int_a^b f^2(x)dx; & M_y = \mu \int_a^b xf(x)dx; \\ x_c = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{S}\int_a^b xf(x)dx; & y_c = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{2S}\int_a^b f^2(x)dx, \end{array}}$$

μ =const - materiālas figūras blīvums;
$y = f(x)$ - nepārtraukta, nenegatīva funkcija, kuras grafiks ierobežo līklīnijas trapeci no augšas;
m - līklīnijas trapeces masa $m = \mu S$,
S - līklīnijas trapeces laukums.

2.27. piemērs. Atrast spēka momentus attiecībā pret koordinātu asīm trijstūrim, ko ierobežo taisnes $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $x = 0$, $y = 0$.



2.22. zīm.

No taisnes $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ vienādojuma izsaka y:

$$y=b\left(1-\frac{x}{a}\right);$$

Tad

$$M_x=\frac{1}{2}\int_0^a b^2\left(1-\frac{x}{a}\right)^2dx=\frac{b^2}{2}\left(x-\frac{2}{a}\cdot\frac{x^2}{2}+\frac{1}{a^2}\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a=\frac{ab^2}{6};$$

$$M_y=b\int_0^a x\left(1-\frac{x}{a}\right)dx=b\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{a}\cdot\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a=\frac{a^2b}{6}.$$

Auditorijā risināmie uzdevumi

1. Izskaitļot spēku, ar kādu ūdens spiež uz taisnstūrveida vārtiem, kuru platums ir 20 m un augstums 16 m, ja vārtu augšējā mala atrodas ūdens līmenī.

2. Vertikāls trijstūris ar pamatu 10 m un augstumu 8 $m$ir iegremdēts ar virsotni uz leju ūdenī tā, ka trijstūra pamats atrodas uz ūdens virsmas. Izskaitļot ūdens spiedienu uz šo trijstūri.

3. Izskaitļot darbu, kas jāveic, lai izsūknētu ūdeni no rezervuāra, kam ir pussfēras veids ar rādiusu $0,6$ m.

4. Izskaitļot darbu, kas jāveic, lai izsūknētu ūdeni no vertikālas cilindriskas mucas, kuras rādiuss ir 2 m un augstums ir 5 m.

Mājas darba uzdevumi

1. Aizsprostam ir trapeces veids; trapeces augšējais pamats ir $20m$, augstums 6 m un apakšējais pamats 10 m. Izskaitļot ūdens spiedienu un aizsprostu.
2. Kāds darbs ir jāveic, lai izstieptu atsperi par 6 cm, ja 1 kG liels spēks izstiepj to par 1 cm.
3. Izskaitļot darbu, kas jāveic, lai izsūknētu šķidrumu no cilindrveidīgas cisternas, kuras garums ir a un diametrs ir d.
4. Izskaitļot darbu, kas jāveic, lai izsūknētu ūdeni no puscilindrveidīgas siles, kuras garums ir 10 m un rādiuss 4 m.

3. nodaļa

NEĪSTIE INTEGRĀĻI

Par **neīstajiem integrāļiem** sauc integrāļus ar bezgalīgām integrēšanas robežām un integrāļus no neierobežotām funkcijām.

3.1. Integrāļi ar bezgalīgām integrēšanas robežām jeb 1. veida neīstie integrāļi

Pieņem, ka funkcija $f(x)$ ir definēta un nepārtraukta visiem $x \in [a; +\infty)$. Neīsto integrāli ar bezgalīgu augšējo integrēšanas robežu definē šādi:

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx.}$$

Ja šī robeža eksistē un ir galīga, tad neīsto integrāli sauc par **konverğentu**, ja robeža ir bezgalīga vai neeksistē - par **diverğentu**.

Analogi definē neīsto integrāli ar bezgalīgu apakšējo integrēšanas robežu

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)dx}$$

un neīsto integrāli, kam abas integrēšanas robežas ir bezgalīgas:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^c f(x)dx + \lim_{b \to +\infty} \int_c^b f(x)dx,}$$

$c \in \mathbb{R}$.

3.2. Integrāļi no neierobežotām funkcijām jeb 2. veida neīstie integrāļi

Integrāļus no intervālā $[a;b]$ neierobežotām funkcijām sauc par **otrā veida neīstajiem integrāļiem**.

1. Pieņem, ka $f(x)$ ir intervālā $[a;b)$ nepārtraukta funkcija, kas ir neierobežota punkta b apkārtnē. Ja ε ir pēc patikas mazs pozitīvs skaitlis, tad otrā veida neīsto integrāli $\int\limits_a^b f(x)dx$ definē šādi:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.}$$

   Ja eksistē galīga robeža, tad saka, ka neīstais integrālis **konverģē** un šo robežu sauc par **neīstā integrāļa vērtību**. Pretējā gadījumā neīstais integrālis **diverģē**.

2. Analogi apzīmē un definē neīsto integrāli no funkcijas, kas ir neierobežota punkta a apkārtnē:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.}$$

3. Ja zemintegrāļa funkcija ir neierobežota intervāla $[a;b]$ iekšējā punkta c apkārtnē, tad šādu neīsto integrāli definē kā divu iepriekš apskatīto integrāļu summu:

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.}$$

   Šāds otrā veida integrālis konverģē, ja konverģē abi labās puses integrāļi.

   Ja zemintegrāļa funkcijai $f(x)$ var atrast primitīvo funkciju, tad neīstā integrāļa aprēķināšana īpašas grūtības nesagādā, piemēram,

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \big(F(b)-F(a)\big) = \lim_{b\to+\infty} F(b)-F(a).$$

Ja rodas grūtības atrast primitīvo funkciju, tad neīstā integrāļa konverğenci vai diverğenci var noteikt, izmantojot t.s. **salīdzināšanas teorēmu**.

3.1. teorēma. *Ja f, g - intervālā $[a; +\infty)$ nepārtrauktas funkcijas un visām argumenta vērtībām no šī intervāla ir spēkā nevienādība* $0 \leq f(x) \leq g(x)$, *tad*

1. ja $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$ *konverğē, tad konverğē arī* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$,

2. ja $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *diverğē, tad diverğē arī* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)dx$.

3.1. piemērs. Izskaitļot neīstos integrāļus:

$$a)\ \int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}; \qquad b)\ \int\limits_{-\infty}^{0} e^x dx; \qquad c)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1};$$

$$d)\ \int\limits_0^{4} \frac{dx}{x\sqrt{x}}; \qquad e)\ \int\limits_0^{9} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}.$$

a) $$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^{b} \frac{dx}{x^3} = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{1}{2x^2}\right)\Bigg|_1^b = \lim_{b\to+\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2b^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

b) $$\int\limits_{-\infty}^{0} e^x dx = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^{0} e^x dx = \lim_{a\to-\infty} e^x\Bigg|_a^0 = \lim_{a\to-\infty} (1 - e^a) = 1.$$

c)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^{0} \frac{dx}{x^2+1} + \lim_{b\to+\infty} \int\limits_0^{b} \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} \operatorname{arctg} x\Bigg|_a^0 + \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x\Bigg|_0^b =$$

$$= \lim_{a\to-\infty} (-\operatorname{arctg} a) + \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b = -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

Acīmredzot, pirmie trīs dotie neīstie integrāļi konverğē.

d) Zemintegrāļa funkcija $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$ ir neierobežota punkta $x = 0$ apkārtnē, bet šoreiz punkts $x = 0$, ir apakšējā integrēšanas robeža, tāpēc dotais integrālis ir neīstais.

$$\int_0^4 \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^4 \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-\frac{2}{\sqrt{x}} \right) \bigg|_\varepsilon^4 = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-1 + \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} \right) = +\infty,$$

tātad neīstais integrālis diverğē.

c) Zemintegrāļa funkcija $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ ir neierobežota punkta $x = 1$ apkārtnē, punkts $x = 1$ kas ir intervāla $[0; 9]$ iekšējais punkts.

$$\int_0^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_0^{1-\varepsilon_1} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_{1+\varepsilon_2}^9 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0} 3\sqrt[3]{x-1} \bigg|_0^{1-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} 3\sqrt[3]{x-1} \bigg|_{1+\varepsilon_2}^9 =$$

$$= 3 \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \left(\sqrt[3]{-\varepsilon} - \sqrt[3]{-1} \right) + 3 \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \left(\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{\varepsilon_2} \right) = 9,$$

tātad neīstais integrālis konverğē.

3.2. piemērs. Izpētīt uz konverğenci integrāļus:

$$1. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3+4}; \qquad\qquad 2. \int_2^4 \frac{3+\cos x}{(x-2)^2} dx.$$

1. Ja $x \geq 1$, tad $0 < \dfrac{1}{x^3+4} \leq \dfrac{1}{x^3}$, bet integrālis $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$ ir konverğents (skat. 3.1. a) piemēru).

   Izmantojot 3.1. teorēmu, var apgalvot, ka dotais neīstais integrālis konverğē.

2. Dotais integrālis ir neīstais, jo zemintegrāļa funkcija $f(x) = \dfrac{3+\cos x}{(x-2)^2}$ ir neierobežota punkta $x = 2$ apkārtnē. Tā kā visiem $x \in (2; 4]$ ir spēkā nevienādība

$$\frac{e^x}{(1-x)^2} > \frac{1}{(1-x)^2}$$

un

$$\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^2}$$

diverğē (par to pārliecinieties paši), tad var izmantot 3.1. teorēmai analogu teorēmu priekš neīstajiem integrāļiem ar neierobežotu zemintegrāļa funkciju. Seko, ka dotais integrālis diverğē.

Auditorijā risināmie uzdevumi

Izmantojot definīciju vai salīdzināšanas teorēmas, izpētīt uz konverğenci šādus neīstos integrāļus

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^4}$;
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$;
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+9}$;
4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$;
5. $\displaystyle\int_0^{4} \frac{dx}{x\sqrt[3]{x}}$;
6. $\displaystyle\int_0^{9} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$;
7. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^3+1}dx$;
8. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2\cdot e^x}$;
9. $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x^2}}dx$;
10. $\displaystyle\int_1^{3} \frac{2^x dx}{(x-3)^4}$.

Mājas darba uzdevumi

Izmantojot definīciju vai salīdzināšanas teorēmas, izpētīt uz konverģenci šādus neīstos integrāļus

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^5}$;

2. $\displaystyle\int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$;

3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} xe^x dx$;

4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$;

5. $\displaystyle\int_0^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}$;

6. $\displaystyle\int_0^{3} \frac{dx}{(x-2)^4}$;

7. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt[4]{x}}$;

8. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}dx$;

9. $\displaystyle\int_0^{5} \frac{dx}{\sqrt{x}+6x^4}$;

10. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{e^x dx}{(1-x)^2}$;

11. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{4+\sin x}{x^2}dx$.

4. nodaļa

PIELIKUMS

I. Atrast integrāļus, izdarīt pārbaudi.

1. a) $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$; b) $\int \frac{\arccos^3 x - 1}{\sqrt{1-x^2}}dx$; c) $\int \frac{\ln xdx}{x^3}$;
2. a) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; b) $\int \frac{1+\ln x}{x}dx$; c) $\int x\ln^2 xdx$;
3. a) $\int \frac{x^2dx}{5x^3+1}$; b) $\int \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{\cos^2(x+1)}dx$; c) $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$;
4. a) $\int \frac{x^2dx}{x^6+1}$; b) $\int \frac{x^2+\ln^2 x}{x}dx$; c) $\int e^x \sin xdx$;
5. a) $\int 3^{5x^2}xdx$; b) $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}dx$; c) $\int \operatorname{arctg} xdx$;
6. a) $\int xe^{-3x^2+1}dx$; b) $\int \frac{4\operatorname{arctg} x - x}{1+x^2}dx$; c) $\int x\sin x\cos xdx$;
7. a) $\int \frac{3xdx}{\cos^2 2x^2}$; b) $\int \frac{8x - \operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}dx$; c) $\int \ln^2 xdx$;
8. a) $\int \frac{\sin xdx}{1+\cos^2 x}$; b) $\int \frac{x-\operatorname{arctg}^4 x}{1+x^2}dx$; c) $\int \frac{\ln xdx}{\sqrt{x}}$;
9. a) $\int \frac{\cos xdx}{1+\sin^2 x}$; b) $\int \sqrt{e^{2x}-3}e^{2x}dx$; c) $\int xe^{-2x}dx$;
10. a) $\int \frac{e^xdx}{\sqrt{e^x+1}}$; b) $\int \frac{\operatorname{ctg}(x-1)}{\sin^2(x-1)}dx$; c) $\int (x+1)\cos xdx$;
11. a) $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt[3]{\cos x}}$; b) $\int \frac{2^xdx}{3+2^x}$; c) $\int x5^xdx$;
12. a) $\int \frac{x^2dx}{4+x^3}$; b) $\int \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx$; c) $\int \sin(\ln x)dx$;

13. $a)$ $\int \sqrt[3]{1-2x}dx$; $b)$ $\int \frac{x\cos x+\sin x}{(x\sin x)^2}dx$; $c)$ $\int x\cos^2 xdx$;

14. $a)$ $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$; $b)$ $\int \operatorname{tg} x \ln\cos xdx$; $c)$ $\int (x^2-x)\cos xdx$;

15. $a)$ $\int x(2x^2+3)^4dx$; $b)$ $\int \frac{2-\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; $c)$ $\int xe^{4-x}dx$;

16. $a)$ $\int \frac{xdx}{(x^2+1)^3}$; $b)$ $\int \frac{\sqrt[5]{\operatorname{arctg} x}-3}{1+x^2}dx$; $c)$ $\int (x-1)lnxdx$;

17. $a)$ $\int \frac{\sin xdx}{\cos^6 x}$; $b)$ $\int \frac{e^{\frac{4}{x}}-x}{x^2}dx$; $c)$ $\int \frac{xdx}{e^x}$;

18. $a)$ $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln x}}$; $b)$ $\int \frac{\cos x}{\sqrt[5]{\sin^2 x}}dx$; $c)$ $\int 2^x\cos xdx$;

19. $a)$ $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}dx}{x}$; $b)$ $\int \cos xe^{1-2\sin x}dx$; $c)$ $\int (x+2)3^xdx$;

20. $a)$ $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^4-1}}$; $b)$ $\int \frac{\sin xdx}{4+\cos^2 x}$; $c)$ $\int \arcsin xdx$;

21. $a)$ $\int x^2e^{x^3}dx$; $b)$ $\int \frac{\cos xdx}{\sin^3 x\sqrt{\sin x}}$; $c)$ $\int \ln(x^2+1)dx$;

22. $a)$ $\int \frac{\cos\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}}$; $b)$ $\int \frac{3-2x}{x^2-3x}dx$; $c)$ $\int x^2\sin 2xdx$;

23. $a)$ $\int \frac{x^2dx}{\cos^2 x^3}$; $b)$ $\int \frac{e^{5x}}{1+e^{10x}}dx$; $c)$ $\int x\operatorname{arcctg} xdx$;

24. $a)$ $\int \frac{(2x-3)dx}{(x^2-3x+2)^3}$; $b)$ $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}-1}{x}dx$; $c)$ $\int x^2\ln xdx$;

25. $a)$ $\int \frac{(-2x-6)dx}{x^2+6x+10}$; $b)$ $\int \sin x\sqrt{1-2\cos x}dx$; $c)$ $\int x^2\arccos xdx$.

II. Atrast integrāļus.

1. $a)$ $\int \frac{x^5+x-1}{x^3-4x^2+4x}dx$; $b)$ $\int \frac{4x^2+3x+4}{(x^2+1)(x^2+x+1)}dx$;

2. $a)$ $\int \frac{x^3+4}{x^3-6x^2+8x}dx$; $b)$ $\int \frac{x+4}{(x^2+x+2)(x^2+2)}dx$;

3. $a)$ $\int \frac{x^4+2}{x^3-x}dx$; $b)$ $\int \frac{xdx}{(x^2+1)(x^2+3x+3)}$;

4. $a)$ $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$; $b)$ $\int \frac{x+2}{(x^2+4x+5)(x^2+1)}dx$;

5. a) $\int \frac{2x^4 - 3x^2 - 21x + 1}{x^3 - 3x^2 + 2x} dx$; b) $\int \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x - 1}{(x^2+1)(x^2+2x+2)} dx$;

6. a) $\int \frac{x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 6}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8} dx$; b) $\int \frac{-3x^3 + 13x^2 - 13x + 1}{(x^2+2)(x^2-x+1)} dx$;

7. a) $\int \frac{2x^5 - 2x + 1}{x^2 - x^4} dx$; b) $\int \frac{2x^3 - 4x^2 - 16x - 12}{(x^2+1)(x^2+4x+5)} dx$;

8. a) $\int \frac{2x^5 + 6x^3 + 1}{x^4 - 4x^2} dx$; b) $\int \frac{x^3 + 6x^2 + 9x + 6}{(x^2+1)(x^2+2x+2)} dx$;

9. a) $\int \frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} dx$; b) $\int \frac{x^3 + 4x^2 + 4x + 2}{(x^2+1)(x^2+x+1)} dx$;

10. a) $\int \frac{x^4 - 16x^3 + 5x + 8}{x^3 - 16x} dx$; b) $\int \frac{4x - 3}{(2x^2-3x+3)(x^2+1)} dx$;

11. a) $\int \frac{5x^4 - x^3 + 4x^2 + 8}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$; b) $\int \frac{x + 2}{(x^2+6x+10)(x^2+1)} dx$;

12. a) $\int \frac{x^4 - 4x^3 + x^2 + 16x - 11}{x^3 - 2x^2 - 5x + 6} dx$; b) $\int \frac{5x + 3}{(6x^2+x+2)(x^2+1)} dx$;

13. a) $\int \frac{x^{10}}{x^3 + x^2 - 2x} dx$; b) $\int \frac{3x + 2}{(x^2+2x+3)(x^2+1)} dx$;

14. a) $\int \frac{x^5}{x^4 - 2x^3 + 2x - 1} dx$; b) $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 10x}{(x^2+1)(x^2-x+1)} dx$;

15. a) $\int \frac{x^4}{x^3 + 2x^2 - x - 2} dx$; b) $\int \frac{3x^2 + 5}{(x^2+5)(x^2-4x+8)} dx$;

16. a) $\int \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^3 - x} dx$; b) $\int \frac{2x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x^2+x+1)(x^2+1)} dx$;

17. a) $\int \frac{x^3 - 2x - 2}{x^2 - 2x - 3} dx$; b) $\int \frac{x^2 - 3}{(x^2+x+2)(x^2+4)} dx$;

18. a) $\int \frac{2x^3 + 3}{x^3 + 3x^2 - 10x} dx$; b) $\int \frac{x^2 - x - 12}{(x^2-5x+7)(x^2+1)} dx$;

19. a) $\int \frac{x^3 + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx$; b) $\int \frac{3x^2 + 4x - 1}{(x^2+4)(x^2-x+8)} dx$;

20. a) $\int \frac{x^3}{2x^3 - 3x^2 - 2x} dx$; b) $\int \frac{2x^2 + 3x - 5}{(x^2+2)(x^2-4x+5)} dx$;

21. a) $\int \frac{x^3 + 5}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx$; b) $\int \frac{2x^3 + 11x^2 + 16x + 10}{(x+2)^2(x^2+2x+3)} dx$;

22. a) $\int \frac{3x^4 - 40x - 8}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx$; b) $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 1}{(x^2 + 9)(x^2 - 3x + 6)} dx$;

23. a) $\int \frac{3x^4 - 4}{x^3 - 2x^2 + x} dx$; b) $\int \frac{2x^2 + 8x + 3}{(x^2 + 3)(x^2 - 2x + 7)} dx$;

24. a) $\int \frac{x^4 + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} dx$; b) $\int \frac{5x + 1}{(x^2 + 2)(x^2 - 4x + 6)} dx$;

25. a) $\int \frac{9x^5 - x + 16}{x^2(x - 1)} dx$; b) $\int \frac{2x^3 - 1}{(x^2 - x + 4)(x^2 + 4)} dx$.

III. Atrast integrāļus

1. a) $\int \frac{\sin x dx}{5 + 3\sin x}$; b) $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$;
2. a) $\int \frac{\sin x dx}{2 + \sin x}$; b) $\int \cos^2 3x \sin^4 3x dx$;
3. a) $\int \frac{dx}{\sin^3 x}$; b) $\int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} dx$;
4. a) $\int \frac{dx}{\cos x(1 + \cos x)}$; b) $\int \sin 9x \sin x dx$;
5. a) $\int \frac{\cos x dx}{5 + 4\cos x}$; b) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$;
6. a) $\int \frac{\sin x dx}{(1 + \sin x)^2}$; b) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\cos^4 x}$;
7. a) $\int \frac{\cos x dx}{1 + \cos x - \sin x}$; b) $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}$;
8. a) $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$; b) $\int \cos^6 \frac{x}{2} dx$;
9. a) $\int \frac{dx}{2\cos x + 3\sin x}$; b) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx$;
10. a) $\int \frac{\cos x dx}{2 + \cos x}$; b) $\int \operatorname{tg}^5 x dx$;
11. a) $\int \frac{\cos x dx}{1 + \sin x - \cos x}$; b) $\int \frac{\sin^4 x dx}{\cos^2 x}$;
12. a) $\int \frac{dx}{\sin^x (1 - \cos x)}$; b) $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}$;
13. a) $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$; b) $\int \sin^6 x dx$;

14. $a)\ \int \frac{\sin x dx}{\sin x + 2\cos x}$; $\quad b)\ \int \sin^2 2x \cos^2 2x dx$;

15. $a)\ \int \frac{dx}{5\sin x + \cos x}$; $\quad b)\ \int \cos^2 \frac{x}{2} \sin^4 \frac{x}{2} dx$;

16. $a)\ \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x}$; $\quad b)\ \int \sin 3x \cos 5x dx$;

17. $a)\ \int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}$; $\quad b)\ \int \cos^5 2x \sin^3 2x dx$;

18. $a)\ \int \frac{4 + \operatorname{tg} x}{2\sin^2 x + 18\cos^2 x} dx$; $\quad b)\ \int \frac{\cos x dx}{9 + \sin^2 x}$;

19. $a)\ \int \frac{6\operatorname{tg} x}{3\sin 2x + 5\cos^2 x} dx$; $\quad b)\ \int \cos 5x \cos 3x dx$;

20. $a)\ \int \frac{2\operatorname{tg} x + 3}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx$; $\quad b)\ \int \sin 2x \sin 3x \cos 5x dx$;

21. $a)\ \int \frac{dx}{8 - 4\sin x + 7\cos x}$; $\quad b)\ \int \frac{dx}{\sin x \cos^4 x}$;

22. $a)\ \int \frac{dx}{5 + 4\sin x}$; $\quad b)\ \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx$;

23. $a)\ \int \frac{dx}{7\cos^2 x + 2\sin^2 x}$; $\quad b)\ \int \frac{\cos^4 x}{\sin^2 x} dx$;

24. $a)\ \int \frac{dx}{(1 + \cos x)\sin x}$; $\quad b)\ \int \frac{dx}{\cos^3 x}$;

25. $a)\ \int \frac{6 + \operatorname{tg} x}{9\sin^2 x + 4\cos^2 x} dx$; $\quad b)\ \int \sin^6 3x dx$.

IV. Atrast integrāļus.

1. $a)\ \int \frac{6\sqrt{x+2}}{(x+2)^2\sqrt{x+1}} dx$; $\quad b)\ \int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[4]{x^3}}}{x^2 \sqrt[8]{x}} dx$;

   $c)\ \int \frac{2x - 13}{\sqrt{3x^2 - 3x - 16}} dx$;

2. $a)\ \int \sqrt{\frac{9 - 2x}{2x - 21}} dx$; $\quad b)\ \int \frac{\sqrt{1 + \sqrt[5]{x^4}}}{x^2 \sqrt[5]{x}} dx$;

   $c)\ \int \frac{x - 3}{\sqrt{2x^2 - 4x - 1}} dx$;

3. $a)\ \int \sqrt{\frac{6-x}{x-14}}dx;$ $\quad b)\ \int \frac{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[5]{x^4}\right)^2}}{x^2\sqrt[3]{x}}dx;$

$c)\ \int \frac{x-1}{\sqrt{3x^2-x+5}}dx;$

4. $a)\ \int \sqrt{\frac{4-x}{x-12}}dx;$ $\quad b)\ \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{x\sqrt[3]{x}}dx;$

$c)\ \int \frac{2x+1}{\sqrt{1+x-3x^2}}dx;$

5. $a)\ \int \frac{xdx}{2+\sqrt{2x+1}};$ $\quad b)\ \int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x\sqrt[6]{x^5}}dx;$

$c)\ \int \frac{2x+5}{\sqrt{4x^2+8x+9}}dx;$

6. $a)\ \int \sqrt{\frac{3-2x}{2x-7}}dx;$ $\quad b)\ \int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}dx;$

$c)\ \int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+4x+3}};$

7. $a)\ \int \sqrt{\frac{2-x}{x-6}}dx;$ $\quad b)\ \int x^2\sqrt{x^2+1}dx;$

$c)\ \int \frac{7x-1}{\sqrt{2-3x-x^2}}dx;$

8. $a)\ \int \frac{5\sqrt{x+1}}{(x+1)^2\sqrt{x}}dx;$ $\quad b)\ \int \frac{\sqrt[3]{(2x^3+1)^2}}{x^6}dx;$

$c)\ \int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-x+1}};$

9. $a)\ \int \frac{15\sqrt{x+3}}{(x+3)^2\sqrt{x}}dx;$ $\quad b)\ \int \frac{\sqrt[5]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[5]{x^2}}dx;$

$c)\ \int \frac{2x-10}{\sqrt{1+x-x^2}}dx;$

10. $a)\ \int \sqrt{\frac{6-x}{x-18}}dx;$ $\quad b)\ \int \frac{\sqrt{x}dx}{(1+\sqrt[3]{x})^2};$

$c)\ \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+x+1}};$

11. a) $\int \frac{4\sqrt{x}}{x^2\sqrt{x-1}}dx$; b) $\int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[12]{x^5}}dx$;

c) $\int \frac{x-9}{\sqrt{4+2x-x^2}}dx$;

12. a) $\int \frac{\sqrt{x-2}}{x\sqrt{x+2}}dx$; b) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[5]{x^4}}}{x^2\sqrt[15]{x}}dx$;

c) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}$;

13. a) $\int \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}}\frac{dx}{x}$; b) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$;

c) $\int \frac{x^2+4x}{\sqrt{x^2+2x+2}}dx$;

14. a) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-3}{x}}dx$; b) $\int \frac{\sqrt[4]{\left(1+\sqrt[5]{x^4}\right)^3}}{x^2\sqrt[5]{x^2}}dx$;

c) $\int \frac{x-6}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx$;

15. a) $\int (x-2)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$; b) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx$;

c) $\int \frac{3x-1}{\sqrt{2x^2-5x+1}}dx$;

16. a) $\int \sqrt{\frac{4x-5}{x+1}}dx$; b) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[3]{x^2}}dx$;

c) $\int \frac{5x+2}{\sqrt{x^2+3x-4}}dx$;

17. a) $\int \sqrt{16-x^2}dx$; b) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt{x}}dx$;

c) $\int \frac{x-4}{\sqrt{2x^2-x+7}}dx$;

18. a) $\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-3}{x}}dx$; b) $\int \frac{dx}{x\sqrt[6]{1+x^6}}$;

c) $\int \frac{3x-1}{\sqrt{4x^2+8x+5}}dx$;

19. a) $\int \sqrt{\frac{x}{x+5}}\frac{dx}{x^2}$; b) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[9]{x^4}}dx$;

$c)$ $\displaystyle\int \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-3x+4}}dx;$

20. $a)$ $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{(4x-3)\sqrt{4x-3}};$ $\quad b)$ $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}}{x\sqrt[6]{x^5}}dx;$

$c)$ $\displaystyle\int \frac{(4x+1)dx}{\sqrt{2+x-x^2}};$

21. $a)$ $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}+2}{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[6]{x})\sqrt[6]{x^5}}dx;$ $\quad b)$ $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^2}dx;$

$c)$ $\displaystyle\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+4x-5}}dx;$

22. $a)$ $\displaystyle\int \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}};$ $\quad b)$ $\displaystyle\int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2\sqrt{x}}dx;$

$c)$ $\displaystyle\int \frac{3x+2}{\sqrt{4+2x-x^2}}dx;$

23. $a)$ $\displaystyle\int \sqrt{256-x^2}dx;$ $\quad b)$ $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^2}dx;$

$c)$ $\displaystyle\int \frac{x+5}{\sqrt{3-6x-x^2}}dx;$

24. $a)$ $\displaystyle\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}};$ $\quad$ $\displaystyle\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}};$

$c)$ $\displaystyle\int \frac{2x+4}{\sqrt{3x^2+x-5}}dx;$

25. $a)$ $\displaystyle\int \sqrt{100-x^2}dx;$ $\quad b)$ $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt[5]{1+\frac{1}{x}}};$

$c)$ $\displaystyle\int \frac{7x-2}{\sqrt{x^2-5x+1}}dx.$

V. Izskaitļot noteiktos integrāļus ar precizitāti līdz $\varepsilon = 0,01$.

1. $a)$ $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{4}} \frac{xdx}{\cos^2 x^2};$ $\quad b)$ $\displaystyle\int\limits_2^3 y\ln(y-1)dy;$ $\quad c)$ $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}dx;$

2. a) $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos z \sin^3 z dz;$ b) $\displaystyle\int\limits_{-2}^{0} x^2 e^{-\frac{x}{2}} dx;$ c) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x};$

3. a) $\displaystyle\int\limits_{1}^{e} \frac{\ln^2 x}{x} dx;$ b) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx;$ c) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin^3 2x dx;$

4. a) $\displaystyle\int\limits_{1}^{\sqrt{2}} \frac{x dx}{\sqrt{4-x^2}};$ b) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} x^2 \sin x dx;$ c) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} \sin^4 \frac{x}{2} dx;$

5. a) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4-3x}};$ b) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \arccos x dx;$ c) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x \sin 2x dx;$

6. a) $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{18}}^{\frac{\pi}{6}} 12 \operatorname{ctg} 3x dx;$ b) $\displaystyle\int\limits_{1}^{2} (y-1) \ln y dy;$ c) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg}^2 x dx;$

7. a) $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin z \cos^3 z dz;$ b) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{1}{2}}^{0} x e^{-2x} dx;$ c) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos x \sin 3x dx;$

8. a) $\displaystyle\int\limits_{3}^{8} \sqrt{x+1} dx;$ b) $\displaystyle\int\limits_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cos x dx;$ c) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx;$

9. a) $\displaystyle\int\limits_{1}^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}};$ b) $\displaystyle\int\limits_{1}^{e} \frac{\ln^2 x}{x^2} dx;$ c) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sin^2 x + 1};$

10. a) $\displaystyle\int\limits_{1}^{e} \frac{\sin \ln x}{x} dx;$ b) $\displaystyle\int\limits_{1}^{e^2} \sqrt{x} \ln x dx;$ c) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} dx;$

11. a) $\displaystyle\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{1+x^6};$ b) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx;$ c) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x \cos 5x dx;$

12. a) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} 3\left(x^2 + x^2 e^{x^3}\right) dx;$ b) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\pi} (x+2) \cos \frac{x}{2} dx;$ c) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx;$

13. a) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$; b) $\int\limits_1^2 y^2 \ln y dy$; c) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg}^3 x dx$;

14. a) $\int\limits_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$; b) $\int\limits_{\frac{3}{2}}^2 \operatorname{arctg}(2x-3) dx$; c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cos 3x dx$;

15. a) $\int\limits_0^1 x^3 \sqrt{4+5x^4} dx$; b) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (x+3) \sin x dx$; $\int\limits_0^{\pi} \cos^4 x \sin^2 x dx$;

16. a) $\int\limits_1^e \frac{1+\ln x}{x} dx$; b) $\int\limits_1^e x \ln^2 x dx$; c) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x} dx$;

17. a) $\int\limits_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^4+4}}$; b) $\int\limits_{-3}^0 (x-2) e^{-\frac{x}{3}} dx$; c) $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin 2x}{\cos^3 x} dx$;

18. a) $\int\limits_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$; b) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \arcsin(1-x) dx$; c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{8}} \sin x \sin 3x dx$;

19. a) $\int\limits_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{x^2+1}$; b) $\int\limits_{-1}^0 x \ln(1-x) dx$; c) $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \sin x \sin 2x dx$;

20. a) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx$; b) $\int\limits_0^1 \frac{\arcsin \frac{x}{2}}{\sqrt{2-x}} dx$; c) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx$;

21. a) $\int\limits_0^1 \frac{x^2 dx}{x^2+1}$; b) $\int\limits_1^2 \ln(3x+2) dx$; c) $\int\limits_0^{\pi} \sin^4 \frac{x}{2} dx$;

22. a) $\int\limits_0^{12\sqrt{3}} \frac{12x^5 dx}{\sqrt{x^6+1}}$; b) $\int\limits_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$; c) $\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^3 x}$;

23. $a)$ $\displaystyle\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\sqrt[3]{1+x^2}dx;$ $\quad b)$ $\displaystyle\int\limits_{-1}^{0}(x+1)e^{-2x}dx;$ $\quad c)$ $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos^2 x\sin^4 xdx;$

24. $a)$ $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{z^3}{z^8+1}dz;$ $\quad b)$ $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\,\mathrm{tg}^2\, xdx;$ $\quad c)$ $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x};$

25. $a)$ $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1-\cos^2 x};$ $\quad b)$ $\displaystyle\int\limits_0^{\frac{\pi}{9}}\frac{xdx}{\cos^2 3x};$ $\quad c)$ $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\pi}\sin 2x\sin 3xdx.$

VI. Izskaitļot laukumu figūrai, ko ierobežo dotās līnijas.

1. $a)$ $y=1,\ \ y=-1,\ \ y=x+1,\ \ x=y^2;$

   $b)$ $\begin{cases} x=\sqrt{2}\cos t, \\ y=2\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$

   $y=2\ (y\geq 2);$

2. $a)$ $y=(x-2)^3,\ \ y=4x-8;$

   $b)$ $\begin{cases} x=4(t-\sin t), \\ y=4(1-\cos t), \end{cases}$

   $y=4\ (0<x<8\pi,\ y\geq 4);$

3. $a)$ $y=4-x^2,\ \ y=x^2-2x;$

   $b)$ $\begin{cases} x=2\cos t, \\ y=6\sin t, \end{cases}$

   $y=3\ (y>3);$

4. $a)$ $y=\sqrt{4-x^2},\ \ y=0,\ \ x=0,\ \ x=1;$

   $b)$ $\begin{cases} x=2(t-\sin t), \\ y=2(1-\cos t), \end{cases}$

   $y=3\ (0<x<4\pi,\ y\geq 3);$

5. $a)$ $y^2=x,\ \ x=9;$

   $b)$ $\begin{cases} x=6\cos t, \\ y=2\sin t, \end{cases}$

   $y=\sqrt{3}\ (y\geq\sqrt{3});$

6. *a*) $y = \frac{1}{4}x^2, \;\; x = -2, \;\; x = 6$ un abscisu ass;

   b) $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$

   $y = 3 \; (0 < x < 6\pi, \; y \geq 3)$;

7. *a*) $y = \arccos x, \;\; y = 0, \;\; x = 0$;

   b) $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases}$

   $y = 9 \; (0 < x < 12\pi, \; y \geq 9)$;

8. *a*) $y = (x+1)^2, \;\; y = x + 1$;

   b) $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 8\sin t, \end{cases}$

   $y = 4 \; (y \geq 4)$;

9. *a*) $y^2 = x + 4$ un ordinātu ass;

   b) $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases}$

   $y = 6 \; (0 < x < 12\pi, \; y \geq 6)$;

10. *a*) $y = \sin x, \;\; x = -\frac{2\pi}{3}, \;\; x = -\frac{\pi}{2}$ un abscisu ass;

    b) $\begin{cases} x = 6\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$

    $y = 2\sqrt{3} \; (y \geq 2\sqrt{3})$;

11. *a*) $y = \operatorname{ctg} x, \;\; x = \frac{\pi}{6}, \;\; x = \frac{5\pi}{6}$ un abscisu ass;

    b) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$

    $y = 1, \; (0 < x < 2\pi, \; y \geq 1)$;

12. *a*) $y = 2x - x^2 + 3, \;\; y = x^2 - 4x + 3$;

    b) $\begin{cases} x = 9\cos t, \\ y = 4\sin t, \end{cases}$

    $y = 2 \; (y \geq 2)$;

13. *a*) $y = 2x^3, \;\; y = 6x^2$;

    b) $\begin{cases} x = 8(t - \sin t), \\ y = 8(1 - \cos t), \end{cases}$

$y = 12\ (0 < x < 16\pi,\ y \geq 12);$

14. $a)\ x = (y-2)^3, \quad x = 4y - 8;$

$b)\ \begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 8\sin t, \end{cases}$

$y = 4\sqrt{3}\ (y \geq 4\sqrt{3});$

15. $a)\ y = x^2 - 6x + 5, \quad y = 2x - 7;$

$b)\ \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases}$

$y = 2\ (0 < x < 4\pi,\ y \geq 2);$

16. $a)\ x = 4 - y^2, \quad x = y^2 - 2y;$

$b)\ \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$

$y = 6\ (0 < x < 8\pi,\ y \geq 6);$

17. $a)\ y = (x-1)^2, \quad y^2 = x - 1;$

$b)\ \begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t, \\ y = 5\sqrt{2}\sin t, \end{cases}$

$y = 5\ (y \geq 5);$

18. $a)\ y = 2x - x^2, \quad y = -x;$

$b)\ \begin{cases} x = 24\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$

$x = 9\sqrt{3}\ (x \geq 9\sqrt{3});$

19. $a)\ x = 4 - (y-1)^2, \quad x = y^2 - 4y + 3;$

$b)\ \begin{cases} x = 16\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$

$x = 2\ (x \geq 2);$

20. $a)\ y = e^x, \quad y = e^{-x}, \quad x = \ln 4;$

$b)\ \begin{cases} x = 16\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$

$x = 6\sqrt{3}\ (x \geq 6\sqrt{3});$

21. $a)\ x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 = 2y + 1;$

$b)\ \begin{cases} x = 32\cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases}$

$x = 4\ (x \geq 4);$

22. $a)$ $x=\sqrt{4-y^2}, \quad x=0, \quad y=0, \quad y=1;$

$b)$ $\begin{cases} x=8\cos^3 t, \\ y=8\sin^3 t, \end{cases}$

$x=1 \ (x\geq 1);$

23. $a)$ $y=\operatorname{tg} x, \quad x=\dfrac{\pi}{3}$ un Ox ass;

$b)$ $\begin{cases} x=8\cos^3 t, \\ y=4\sin^3 t, \end{cases}$

$x=3\sqrt{3} \ (x\geq 3\sqrt{3});$

24. $a)$ $x=\arccos y, \quad x=0, \quad y=0;$

$b)$ $\begin{cases} x=16\cos^3 t, \\ y=2\sin^3 t, \end{cases}$

$x=2 \ (x\geq 2);$

25. $a)$ $x^2+y^2=36, \quad x=3, \quad x=3\sqrt{3};$

$b)$ $\begin{cases} x=8\sqrt{2}\cos^3 t, \\ y=\sqrt{2}\sin^3 t, \end{cases}$

$x=4 \ (x\geq 4).$

VII. Izskaitļot loka garumu dotajām līknēm.

1. $a)$ $\begin{cases} x=5(t-\sin t), \\ y=5(1-\cos t), \end{cases}$

$0\leq t\leq \pi,$

$b)$ $\rho=3e^{\frac{3\varphi}{4}}, \quad -\dfrac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\dfrac{\pi}{2};$

2. $a)$ $\begin{cases} x=10\cos^3 t, \\ y=10\sin^3 t, \end{cases}$

$0\leq t\leq \dfrac{\pi}{2};$

$b)$ $\rho=2e^{\frac{4\varphi}{3}}, \quad -\dfrac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\dfrac{\pi}{2};$

3. $a)$ $\begin{cases} x=3(2\cos t-\cos 2t), \\ y=3(2\sin t-\sin 2t), \end{cases}$

$0\leq t\leq 2\pi;$

$b)$ $\rho=\sqrt{2}e^{\varphi}, \quad -\dfrac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\dfrac{\pi}{2};$

4. $a)$ $\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 6\sin^3 t, \end{cases}$

$0 \le t \le \dfrac{\pi}{3};$

$b)$ $\rho = 5e^{\frac{5\varphi}{12}}, \quad -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2};$

5. $a)$ $\begin{cases} x = 4(\cos t + t\sin t), \\ y = 4(\sin t - t\cos t), \end{cases}$

$0 \le t \le 2\pi;$

$b)$ $\rho = 1 - \sin\varphi, \quad -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le -\dfrac{\pi}{6};$

6. $a)$ $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t, \end{cases}$

$0 \le t \le \dfrac{\pi}{6};$

$b)$ $\rho = 4e^{\frac{4\varphi}{3}}, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3};$

7. $a)$ $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$

$0 \le t \le 2\pi;$

$b)$ $\rho = 2(1 - \cos\varphi), \quad -\pi \le \varphi \le -\dfrac{\pi}{2};$

8. $a)$ $\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$

$\pi \le t \le 2\pi;$

$b)$ $\rho = 12e^{\frac{12\varphi}{5}}, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3};$

9. $a)$ $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$

$0 \le t \le \pi;$

$b)$ $\rho = 3(1 + \sin\varphi), \quad -\dfrac{\pi}{6} \le \varphi \le 0;$

10. $a)$ $\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t), \\ y = 3(\sin t - t\cos t), \end{cases}$

$0 \le t \le \dfrac{\pi}{3};$

$b)$ $\rho = 6e^{\frac{12\varphi}{5}}, \quad -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2};$

11. $a)$ $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t, \end{cases}$

$\dfrac{\pi}{6} \le t \le \dfrac{\pi}{4};$

$b)$ $\rho = 6\cos\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3};$

12. $a)$ $\begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$

$\dfrac{\pi}{2} \le t \le \dfrac{2\pi}{3};$

$b)$ $\rho = 8(1 - \cos\varphi), \quad -\dfrac{2\pi}{3} \le \varphi \le 0;$

13. $a)$ $\begin{cases} x = 2(\cos t + t\sin t), \\ y = 2(\sin t - t\cos t), \end{cases}$

$0 \le t \le \dfrac{\pi}{2};$

$b)$ $\rho = 2\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{3}{4};$

14. $a)$ $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$

$\dfrac{\pi}{6} \le t \le \dfrac{\pi}{4};$

$b)$ $\rho = 8\sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4};$

15. $a)$ $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t, \end{cases}$

$0 \le t \le \dfrac{\pi}{4};$

$b)$ $\rho = 3\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{3}{4};$

16. $a)$ $\begin{cases} x = 3,5(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3,5(2\sin t - \sin 2t), \end{cases}$

$0 \le t \le \dfrac{\pi}{2};$

$b)$ $\rho = 4(1 - \sin\varphi), \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{6};$

17. $a)$ $\begin{cases} x = 6(\cos t + t\sin t), \\ y = 6(\sin t - t\cos t), \end{cases}$

$0 \le t \le \pi.$

b) $\rho = 2\cos\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{6};$

18\. *a*) $\begin{cases} x = 2,5(t - \sin t), \\ y = 2,5(1 - \cos t), \end{cases}$

$\dfrac{\pi}{2} \le t \le \pi.$

b) $\rho = 5(1 - \cos\varphi), \quad -\dfrac{\pi}{3} \le \varphi \le 0;$

19\. *a*) $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases}$

$\dfrac{\pi}{2} \le t \le \pi.$

b) $\rho = 8\cos\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{4};$

20\. *a*) $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$

$0 \le t \le \dfrac{\pi}{2};$

b) $\rho = 6(1 + \sin\varphi), \quad -\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le 0;$

21\. *a*) $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$

$0 \le t \le \dfrac{\pi}{3};$

b) $\rho = 5\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{12}{5};$

22\. *a*) $\begin{cases} x = 8(\cos t + t\sin t), \\ y = 8(\sin t - t\cos t), \end{cases}$

$0 \le t \le \dfrac{\pi}{4};$

b) $\rho = 7(1 - \sin\varphi), \quad -\dfrac{\pi}{6} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{6};$

23\. *a*) $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$

$0 \le t \le \pi.$

b) $\rho = 2\sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{6};$

24\. *a*) $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{4}\cos 2t, \\ y = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{4}\sin 2t, \end{cases}$

$$\frac{\pi}{2} \le t \le \frac{2\pi}{3};$$

$$b)\ \rho = 2\varphi,\ \ 0 \le \varphi \le \frac{5}{12};$$

$$25.\ \ a)\ \begin{cases} x = (t^2-2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2-t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases}$$

$$0 \le t \le 3\pi;$$

$$b)\ \rho = 6\sin\varphi,\ \ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}.$$

VIII. Plaknes figūra, kuru ierobežo dotās līnijas, rotē ap norādīto asi. Izskaitļot iegūtā rotācijas ķermeņa tilpumu ar precizitāti līdz $\varepsilon = 0,01$.

1. $y^2 = 4 - x,\ x = 0,\ Oy.$
2. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2},\ x = 0,\ y = 0,\ Ox.$
3. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1,\ Oy.$
4. $y^3 = x^2,\ y = 1,\ Ox.$
5. $x = 6(t - \sin t),\ y = 6(1 - \cos t),\ Ox.$
6. $x = 3\cos t,\ y = 4\sin t\ \left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right),\ Oy.$
7. $y^2 = x,\ x^2 = y,\ Ox.$
8. $y^2 = (x-1)^3,\ x = 2,\ Ox.$
9. $x = \sqrt{1-y^2},\ y = x,\ y = 0,\ Ox.$
10. $y^2 = 4x,\ x^2 = 4y,\ Ox.$
11. $x = 2\cos t,\ y = 5\sin t,\ Oy.$
12. $y = x^2,\ 8x = y^2,\ Oy.$
13. $y = e^x,\ x = 0,\ y = 0,\ x = 1,\ Ox.$
14. $y^2 = \frac{4x}{3},\ x = 3,\ Ox.$
15. $y = 2x - x^2,\ y = 0,\ x.$
16. $y = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{1} = 1,\ x.$
17. $xy = 4,\ 2x + y - 6 = 0,\ Ox.$

18. $y = 2 - x^2,\ y = x^2,\ Ox.$

19. $y = -x^2 + 8,\ y = x^2,\ Ox.$

20. $y = x^3,\ x = 0,\ y = 8,\ Oy.$

21. $2y = x^2,\ 2x + 2y - 3 = 0,\ Ox.$

22. $y = x - x^2,\ y = 0,\ Ox.$

23. $y = 2 - \frac{x^2}{2},\ x + y = 2,\ Oy.$

24. $y^2 = (x + 4)^3,\ x = 0,\ Ox.$

25. $x = \sqrt{3}\cos t,\ y = 2\sin t,\ Oy.$

IX.

1. Izskaitļot spēku, ar kādu ūdens spiež uz taisnstūra vārtiem, kuru platums ir 20 m un augstums 16 m, ja vārtu augšējā mala atrodas ūdens līmenī.

2. Divi ķermeņi iesāk kustību pa taisni no viena un tā paša punkta vienā un tajā pašā virzienā. Pirmais ķermenis kustas ar ātrumu $v = 3t^2$ m/s, otrais ķermenis - ar ātrumu $v = 6t^2 + 10$ m/s. Kādā attālumā ķermeņi atradīsies viens no otra pēc 10 sekundēm?

3. Aizsprostam ir vienādsānu trapeces forma; tās augšējais pamats ir 20 m, augstums 6 m un apakšējais pamats ir 10 m. Izskaitļot ūdens spiedienu uz aizsprostu.

4. Trijstūris ar pamatu 10 m un augstumu 8 m ir iegremdēts ar virsotni uz leju ūdenī tā, ka trijstūra pamats atrodas uz ūdens virsmas. Izskaitļot ūdens spiedienu uz šo trijstūri.

5. Izskaitļot smaguma centra koordinātas plaknes figūrai, ko ierobežo līnijas $2x + 3y = 6$, $x = 0$, $y = 0$ $(\rho = 1)$.

6. Izskaitļot spēka momentu attiecībā pret Oy asi $(\rho = 1)$ plaknes figūrai, ko ierobežo līnijas $y = x$ un $y = x^2$.

7. Izskaitļot darbu, kas jāveic, lai izsūknētu ūdeni no rezervuāra, kam ir pussfēras veids ar rādiusu $0,6$ m.

8. Saspiežot atsperi par $0,05$ m, patērēja 25 J lielu darbu. Kāds darbs jāveic, lai atsperi saspiestu par $0,1$ m?

9. Lai izstieptu atsperi par $0,04$ m, ir jāveic 20 J liels darbs. Par cik metriem var izstiept atsperi, veicot 80 J lielu darbu?

10. Punkta kustības ātrums ir $v = te^{-0{,}01t}$ m/s. Izskaitļot punkta noieto ceļu no kustības sākuma līdz tā apstāšanās momentam.

11. Izskaitļot darbu, kas jāveic, lai izsūknētu ūdeni no koniskas tvertnes, kuras pamata rādiuss ir R un augstums H, ja konusa virsotne ir vērsta uz leju.

12. Izskaitļot inerces momentu attiecībā pret Oy asi ($\rho = 1$)plaknes figūrai, ko ierobežo līnijas $y = x^2$, $x = 2$, $y = 0$.

13. Izskaitļot darbu, kas jāveic, lai izsūknētu šķidrumu no cisternas, kura garums ir a un diametrs d?

14. Taisns rezervuārs, kura pamats ir kvadrāts ar malu 3 m, bet augstums ir 2 m, piepildīts ar ūdeni. Izskaitļot darbu, kas nepieciešams, lai no rezervuāra izsūknētu ūdeni.

15. Aprēķināt gāzes spēka paveikto darbu, gāzei izplešoties no tilpuma V_1 līdz V_2, ja ir spēkā Boila-Mariota likumam: $pV = C$, ($C = const$).

16. Kvadrātiska plāksnīte ar malu a iegremdēta vertikāli ūdenī tā, ka viena tās virsotne pieskaras ūdens virsmai, bet viena diagonāle paralēla tai. Aprēķināt spiediena spēku uz plāksnīti.

17. Izskaitļot darbu, kas jāveic, lai izsūknētu ūdeni no puscilindrveidīgas siles, kuras garums ir 8 m un rādiuss 3 m.

18. 60 N spēks atsperi izstiepj par $0,02$ m. Atsperes sākotnējais garums ir $0,15$ m. Kāds darbs ir jāveic, lai atsperi izstieptu līdz $0,2$ m?

19. Izskaitļot inerces momentu attiecībā pret Ox asi plaknes figūrai, ko ierobežo līnijas $y^2 = 2(2 + x)$, $y^2 = 2(2 - x)$.

20. Izskaitļot smaguma centra koordinātas riņķa līnijas

$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t \end{cases}$$

ceturtajai daļai.

21. Izskaitļot smaguma centra koordinātas figūrai, ko ierobežo kardioīda $\rho = a(1 + \cos\varphi)$. Figūra ir homogēna.

22. Kāds darbs jāpatērē, lai ķermeni, kura masa ir m, paceltu no Zemes ar rādiusu R augstumā h?

23. Punkta ātrums ir $v = 3t^2 - 2t$. Atrast ceļu s, ko noiet punkts laikā $t = 4s$ no kustības sākuma.

24. Izskaitļot trijstūra inerces momentu attiecībā pret tā pamatu, ja trijstūra augstums ir h, pamata mala b.

25. Rādija sabrukšanas ātrums katrā laika momentā ir proporcionāls tā sākuma daudzumam. Atrast rādija sabrukšanas likumu, ja sākuma momentā $t = 0$ bija Q_0 grami rādija, bet pēc $T = 1600$ gadiem rādija daudzums samazinājās divas reizes.

X. Izskaitļot neīstos integrāļus vai pierādīt to diverğenci.

1. $a)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{xdx}{16x^4+1}$; $\qquad b)\ \int\limits_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$.

2. $a)\ \int\limits_1^{+\infty} \frac{16xdx}{16x^4-1}$; $\qquad b)\ \int\limits_1^{3} \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}$.

3. $a)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^3dx}{\sqrt{16x^4+1}}$; $\qquad b)\ \int\limits_0^{\frac{1}{3}} \frac{1+x}{x^2}dx$.

4. $a)\ \int\limits_1^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{16x^2-1}}$; $\qquad b)\ \int\limits_1^{3} \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}$.

5. $a)\ \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$; $\qquad b)\ \int\limits_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{\ln(3x-1)}{3x-1}dx$.

6. $a)\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{(x^3+8)^4}}$; $\qquad b)\ \int\limits_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{dx}{20x^2-9x+1}$.

7. $a)$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{(16+x^2)^5}}$; $\qquad b)$ $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{\ln 2\,dx}{(1-x)\ln^2(1-x)}$.

8. $a)$ $\displaystyle\int_4^{+\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-4x+1}}$; $\qquad b)$ $\displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}}{2-3x}dx$.

9. $a)$ $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{\pi(x^2+4x+5)}$; $\qquad b)$ $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x\,dx}{1-x^4}$.

10. $a)$ $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^2+4x+5}$; $\qquad b)$ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}}dx$.

11. $a)$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\pi(1+4x^2)}dx$; $\qquad b)$ $\displaystyle\int_0^{1} \frac{2x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

12. $a)$ $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} \frac{16x\,dx}{\pi(4x^2+4x+5)}$; $\qquad b)$ $\displaystyle\int_{-\frac{1}{3}}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}$.

13. $a)$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,dx}{x^2+4x+5}$; $\qquad b)$ $\displaystyle\int_{\frac{3}{4}}^{1} \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}$.

14. $a)$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(x+2)\,dx}{\sqrt[3]{(x^2+4x+1)^4}}$; $\qquad b)$ $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}dx$.

15. $a)$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{3-x^2}{x^2+4}dx$; $\qquad b)$ $\displaystyle\int_0^{1} \frac{2e^{1-\frac{2}{\pi}\arcsin x}}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx$.

16. $a)$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1+4x^2}dx$; $\qquad b)$ $\displaystyle\int_1^{2} \frac{dx}{\sqrt[5]{4x-x^2-4}}$.

17. $a)$ $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$; $\qquad b)$ $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}$.

18. a) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} x\sin x dx$; b) $\displaystyle\int\limits_{-\frac{3}{4}}^{0} \frac{dx}{\sqrt{4x+3}}$.

19. a) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{(x^2-4x)\ln 5}$; b) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3\sin^3 x dx}{\sqrt{\cos x}}$.

20. a) $\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{3}}^{+\infty} \frac{\pi dx}{(1+9x^2)\operatorname{arctg}^2 3x}$; b) $\displaystyle\int\limits_{0}^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{9x^2-9x+2}$.

21. a) $\displaystyle\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\pi\operatorname{arctg} x}}$; b) $\displaystyle\int\limits_{1}^{2} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2-1)^3}\ln 2}$.

22. a) $\displaystyle\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2x)\ln^3 x}$; b) $\displaystyle\int\limits_{0}^{3} \frac{\sqrt[3]{9}xdx}{\sqrt[3]{9-x^2}}$.

23. a) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-3x}dx$; b) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} \frac{x^4dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$.

24. a) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{0} \left(\frac{x^2}{x^3-1}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx$; b) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2} \frac{x^2dx}{\sqrt{64-x^6}}$.

25. a) $\displaystyle\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-2x+1}$; b) $\displaystyle\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$.

LITERATŪRA

[1] Dz. Bože, I. Biezā, B. Siliņa, A. Strence. Uzdevumu krājums augstākajā matemātikā. - R.: Zvaigzne, 1986.

[2] M. Grebenča, S. Novoselovs. Matemātiskās analīzes kurss. 1. daļa - R.: LVI, 1952.

[3] E. Kronbergs, P. Rivža, Dz. Bože. Augstākā matemātika. 1. daļa. - R.: Zvaigzne, 1988.

[4] V. Gedroics. Viena argumenta funkciju integrālrēķini. - Daugavpils: DPI, 1992.

[5] Дворецкий Б.Д. Математический анализ. Интегральное исчисление функций одной переменной. - Даугавпилс: ДПИ, 1990.

[6] Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. - М.: Наука, 1977.

[7] Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах. - М.: Высшая школа, 1984.

[8] Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.П., Головач Г.П. Математический анализ в примерах и задачах. Ч.I. Введение в анализ, производная, интеграл. - Киев: Вышейшая школа, 1974.

[9] Райков Д.А. Однородный математический анализ. Учебное пособие. - М.: Высшая школа, 1982.

[10] Задачи и упражнения по математическому анализу под ред. Демидовича Б.П. - Москва, 1978.

[11] Задачник по курсу математического анализа. Под редакцией Н.Я. Виленкина Ч.1. - М.: Просвещение, 1971.

[12] Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике. - М.: Высшая школа, 1983.

[13] Рябушко А.П., Бархатов В.В., Державец В.В., Юруть И.Е. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Часть 2. - Минск: Вышэйшая школа, 1991.

SATURS