DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE

MATEMĀTIKAS KATEDRA

Vitolds Gedroics

RINDAS

2005

ANOTĀCIJA

Mācību līdzeklis ir turpinājums iepriekš izdotajiem mācību līdzekļiem.

1. nodaļa

GALVENIE JĒDZIENI

1.1. Skaitļu rinda un tās parciālsummu virkne. Konverğentas un diverğentas rindas. Rindas summa

Kā zināms, aritmētiskā saskaitīšanas darbība ir definēta tikai tad, kad saskaitāmo skaits ir galīgs. Matemātikā saskaitīšanas darbību mēdz vispārināt arī attiecībā uz bezgalīgi daudziem locekļiem.

Apskatīsim bezgalīgu skaitļu virkni $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. šīs virknes locekļus savienosim ar "+" zīmēm un formāli iegūsim izteiksmi no bezgalīgi daudziem "saskaitāmiem". Iegūto izteiksmi sauc par skaitļu rindu.

1.1. definīcija. Par **skaitļu rindu** sauc izteiksmi

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots,$$

kuru apzīmē ar simbolu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Skaitļus $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ sauc par rindas locekļiem; pie patvaļīga n a_n sauc par skaitļu rindas **vispārīgo locekli**.

Daudzpunkti rindas pierakstā pēc a_n norāda, ka šajā izteiksmē nav pēdējā saskaitāmā; pēc katra saskaitāmā seko nākamais saskaitāmais. Tādējādi rindu var uzskatīt par bezgalīgu summa. Tieši šajos daudzpunktos arī slēpjas rindas būtība. Ja ir jāsaskaita galīgs skaits locekļu, tad vienmēr tiek iegūts kāds noteikts skaitlis - summa. Rindas gadījumā, kad summēšana turpinās bezgalīgi, šāda summa (ja tā eksistē) ir jādefinē īpaši. Jānoskaidro, kādām rindām šāds skaitlis - rindas summa eksistē un kā to var aprēķināt.

Apskatīsim skaitļu rindu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots.$$

Katrs šīs rindas loceklis (sākot ar otro) ir divreiz mazāks par iepriekšējo locekli. Aprēķināsim šīs rindas pirmo locekļu summas.

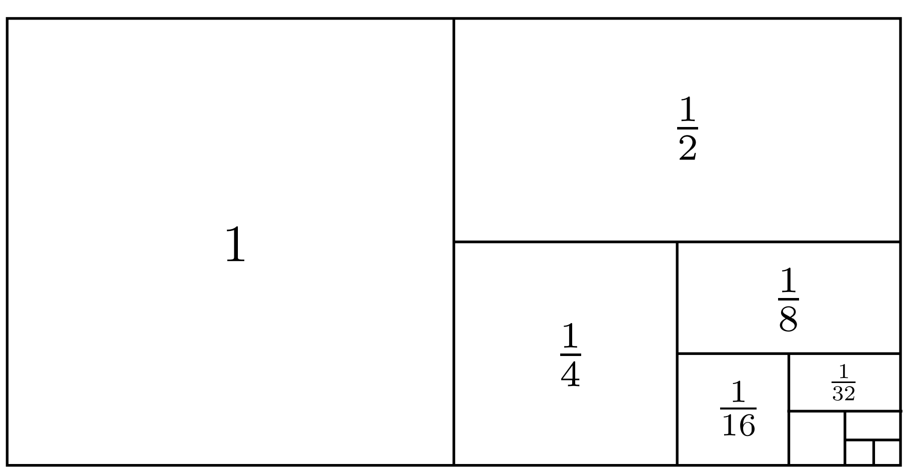
$$\begin{aligned}
S_1 &= 1, \\
S_2 &= 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \\
S_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}, \\
S_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}, \\
S_5 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{31}{16} \quad \text{utt.}
\end{aligned}$$

Šīs summas arvien vairāk tuvojas skaitlim 2. Loģiski būtu skaitli 2 nosaukt par minētās skaitļu rindas summu. Apstiprināsim šos spriedumus ģeometriski. Izvēlēsimies taisnstūri, kura laukums ir 2, bet malas ir 1 un 2 garuma vienības. Sadalīsim šo taisnstūri uz pusēm, pēc tam vienu no šīm pusēm atkal uz pusēm utt. Iegūsim taisnstūrus (1.1. zīm.), kuru laukumi ir

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \text{ utt.}$$

Visu šo taisnstūru apvienojums ir sākotnējais taisnstūris, pie tam tā laukums ir tā daļu laukumu summa, t.i.,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots = 2.$$



1.1. zīm.

Apskatīsim patvaļīgu skaitļu rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ un izveidosim tās pirmo locekļu summas

$$\begin{aligned}
&S_1 = a_1, \\
&S_2 = a_1 + a_2, \\
&S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Šīs summas sauc par rindas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **parciālsummām**.

Tās veido dotās rindas parciālsummu virkni (S_n). Parciālsummu virkne (S_n) var būt kā konverğenta, tā arī diverğenta, pie tam konverğentai parciālsummu virknei atbilst konkrēts skaitlis - tās robeža.

1.2. definīcija. Ja skaitļu rindas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ parciālsummu virknei (S_n) eksistē galīga robeža $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, tad doto rindu sauc par **konverğentu rindu**, pie tam šo robežu S sauc par **rindas summu** un raksta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$. Pretējā gadījumā ($\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$ vai neeksistē) rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sauc par **diverğentu** skaitļu **rindu**.

Ja $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, tad saka, ka rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverğē uz ∞ un raksta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Starp citu, pēc parciālsummu virknes (S_n) var atjaunot rindu. Rindas locekļi

$$a_1 = S_1,\ a_2 = S_2 - S_1,\ a_3 = S_3 - S_2,\ \dots,\ a_n = S_n - S_{n-1},\ \dots$$

Apskatīsim rindu $1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$. Šoreiz

$$S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1, S_4 = 0, \dots$$

un $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ neeksistē. Rinda diverğē.

Rindu $\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \cdots$ var uzskatīt kā skaitļa $\frac{1}{3} = 0,333\dots$ citu pierakstu, tāpēc šī skaitļu rinda konverğē, pie tam tās summa ir $\frac{1}{3}$.

Vēlāk noskaidrosim, ka rindas

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\cdots,$$

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$

ir konverğentas rindas un to summas atbilstoši ir $\frac{\pi}{4}$ un $\frac{\pi^2}{6}$. Pie tam šīs rindas var izmantot, lai aptuveni izskaitļotu π vērtību.

1.1. uzdevums. Izpētīt uz konverğenci rindas. Konverğentām rindām atrast to summas.

a) $\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}+\cdots;$

b) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots;$

c) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\cdots.$

a) Apskatīsim parciālsummas

$$\begin{aligned}
&S_1=a_1=\ln 2;\\
&S_2=S_1+a_2=\ln 2+\ln\frac{3}{2}=\ln\left(2\cdot\frac{3}{2}\right)=\ln 3;\\
&S_3=S_2+a_3=\ln 3+\ln\frac{4}{3}=\ln\left(3\cdot\frac{4}{3}\right)=\ln 4;\\
&S_4=S_3+a_4=\ln 4+\ln\frac{5}{4}=\ln\left(4\cdot\frac{5}{4}\right)=\ln 5;\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots;\\
&S_n=S_{n-1}+a_n=\ln n+\ln\frac{n+1}{n}=\ln(n+1);\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\ln(n+1)=+\infty.$$

Rinda diverğē.

b) Apskatīsim parciālsummu

$$\begin{aligned}
S_n&=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\\
&=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\\
&=1-\frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Rinda konverģē un tās summa ir 1.

c) Rindas vispārīgo locekli $a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ uzrakstīsim elementārdaļu summas veidā.

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}.$$

No šejienes

$$A(n+1)(n+2) + Bn(n+2) + Cn(n+1) \equiv 1.$$

Ievietosim n vietā $0, -1, -2$ un iegūsim, ka $A = \frac{1}{2}, B = -1, C = \frac{1}{2}$. Tātad

$$a_n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2}$$

jeb

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right).$$

Pārveidosim rindas parciālsummu

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{2}{2} + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{4} + \frac{1}{5}\right) + \dots + \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right). \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{4}.$$

Rinda konverģē un tās summa ir $S = \frac{1}{4}$.

1.2. Ģeometriskā rinda un tās summa

Apskatīsim rindu, kuru veido bezgalīgas ģeometriskās progresijas locekļi, t.i., rindu

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} \ (a_1 \neq 0).$$

Šādu rindu sauc par **ģeometrisko rindu**.

Tās parciālsumma

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \cdots + a_1 q^{n-1} = a_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Atradīsim $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Acīmredzami, ja $|q| < 1$, tad

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q},$$

jo

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

Ģeometriskā rinda konverģē un tās summa $S = \frac{a_1}{1-q}$.

Ja $|q| > 1$, tad

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

un ģeometriskā rinda diverģē, pie tam uz ∞.

Ja $q = 1$, tad $S_n = na_1$ un $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$. Rinda diverģē.

Ja $q = -1$, tad iegūsim arī diverģentu rindu $a_1 - a_1 + a_1 - a_1 + \cdots$. Šoreiz $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ neeksistē. Tādējādi ģeometriskā rinda konverģē, ja $|q| < 1$, pie tam

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Ja $|q| \geq 1$, tad ģeometriskā rinda diverģē. Ģeometriskās rindas bieži izmanto, lai pētītu uz konverģenci citas rindas.

Starp citu, vēsturiski ģeometriskā rinda bija pirmā skaitļu rinda, kurai tika aprēķināta summa. Arhimēds (III gs. p.m.ē.), lai izskaitļotu paraboliskā segmenta laukumu, summēja bezgalīgas dilstošas ģeometriskās progresijas $\left(q = \frac{1}{4}\right)$ locekļus. Pēc Arhimēda līdz 16. gs. matemātiķi ar rindām nenodarbojās.

Rindas atsāka pētīt tikai tad, kad sāka izzināt mainīgus procesus. Matemātiķi sāka izskaitļot skaitļu rindu summas. Piemēram, rindai

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots$$

summu $\frac{\pi}{4}$ aprēķināja Leibnics, bet rindai

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

summu $\frac{\pi^2}{6}$ aprēķināja Eilers. Toreiz kļūdaini uzskatīja, ka katrai rindai ir summa, ka ar visām rindām var izpildīt tās darbības, kuras var izpildīt ar polinomiem (saskaitīšanu, atņemšanu, reizināšanu, locekļu secības maiņu u.c.). Tika iegūti mistiski rezultāti, piemēram, ka rindai $1-1+1-1+\cdots$ par summu vienlaicīgi var būt $0, 1, \frac{1}{2}$. Šie rezultāti tika iegūti šādi:

$$1-1+1-1+\cdots=(1-1)+(1-1)+\cdots=0;$$
$$1-1+1-1+\cdots=1-(1-1)-(1-1)-\cdots=1.$$

Lai kā summu iegūtu $\frac{1}{2}$, rīkojās šādi: apzīmē ar $S=1-1+1-1+\cdots$, tad no vienādības

$$1-1+1-1+\cdots=1-(1-1+1-1+\cdots)$$

iegūst $S=1-S$ un $S=\frac{1}{2}$. Vēlāk arī kļūdaini uzskatīja, ka summa ir tikai tām skaitļu rindām $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, kurām $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$. Konverģentas rindas jēdziens tika precizēts tikai krietni vēlāk. Konverģentas rindas jēdziens un tās summa kā parciālsummu virknes robeža parādījās matemātikā tikai 19. gs. sākumā. Ar šo periodu sākās sistemātiska rindu apgūšana.

1.2. uzdevums. Izpētīt uz konverģenci rindas

a) $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\cdots+\frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}+\cdots$,

b) $5+5(1+0,2)+5(1+0,2)^2+\cdots+5(1+0,2)^{n-1}+\cdots$,

c) $3-0,3+0,03-0,003+\cdots$.

a) Rindas locekļi veido ģeometrisko progresiju, kuras pirmais loceklis $a_1=1$ un kvocients $q=\frac{2}{3}$. Tā kā $|q|<1$, tad rinda konverģē un tās summa
$$S=\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{2}{3}}=3.$$

b) Šoreiz rindas locekļi arī veido ģeometrisko progresiju ar $a_1=5$, $q=1+0,2=1,2$. Tā kā $|q|>1$, tad rinda diverģē. Starp citu, rinda diverģē uz $+\infty$.

c) Arī šīs rindas locekļi veido ģeometrisko progresiju ar $a_1=3$, $q=-0,1$. Tā kā $|q|=0,1<1$, tad rinda konverģē un tās summa

$$S=\frac{3}{1-(-0,1)}=\frac{3}{1,1}=\frac{30}{11}.$$

Rindas vispārīgais loceklis

$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{3}{10^{n-1}}.$$

1.3. Harmoniskā rinda. Rindu konverğences nepieciešamais nosacījums

Apskatīsim rindu, kuras katrs loceklis, sākot ar otro, ir blakusstāvošo locekļu vidējais harmoniskais, t.i.,

$$\frac{1}{a_n} = \frac{\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}}{2}.$$

1.3. definīcija. Rindu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

sauc par **harmonisko rindu**.

Apskatīsim harmoniskās rindas šādas parciālsummas:

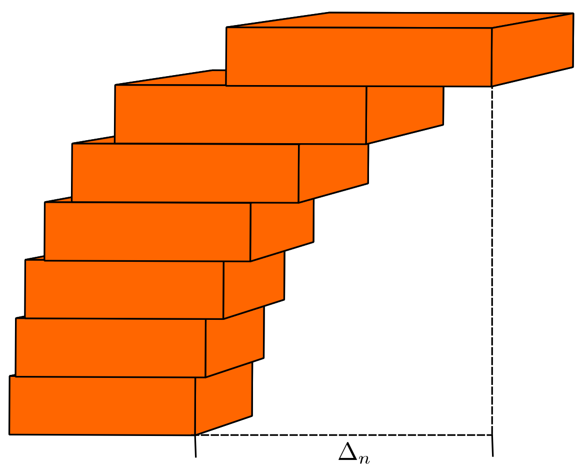
$$\begin{aligned}
&S_1 = 1,\\
&S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 3\cdot\frac{1}{2},\\
&S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > S_2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 3\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 4\cdot\frac{1}{2},\\
&S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > S_4 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} >\\
&\quad > 4\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 5\cdot\frac{1}{2},\\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&S_{2^n} > (n+2)\frac{1}{2} = \frac{n+2}{2},\\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Tā kā $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2^n} = +\infty$, tad harmoniskā rinda diverğē, pie tam tā diverğē uz $+\infty$. Harmoniskās rindas parciālsummas neierobežoti pieaug, pie tam ļoti lēni. Eilers, pētīdams harmonisko rindu, noskaidroja, ka $S_{1000} \approx 7,48$, bet $S_{1000000} \approx 14,39$. Starp citu, $S_{58638018} = 20,766714536\ldots$.

No n ķieģeļiem izveidosim pakāpienus: otro ķieģeli novietosim zem pirmā ķieģeļa tā, lai pirmā ķieģeļa masas centrs projicētos uz otrā ķieģeļa labējā gala. Trešo ķieģeļi novietosim zem otrā ķieģeļa tā, lai pirmā un otrā ķieģeļa kopīgais masas centrs projicētos uz trešā ķieģeļa labējā gala utt. Tādu pakāpienu no $(n-1)$ ķieģeļiem masas centrs projicēsies uz n - tā ķieģeļa labējā gala un šie pakāpieni nesagāzīsies. Ja ℓ -ķieģeļa garums, tad pirmais ķieģelis būs nobīdīts pa labi attiecībā pret otro par $\frac{\ell}{2}$. Otrais ķieģelis būs nobīdīts pa labi attiecībā pret trešo par $\frac{\ell}{4}$, bet trešais attiecībā pret ceturto - par $\frac{\ell}{6}$ utt. $(n-1)$ -ais ķieģelis būs nobīdīts pa labi attiecībā pret n -to ķieģeli par $\frac{\ell}{2(n-1)}$. Visi pakāpieni būs nobīdīti pa labi par

$$\Delta_n = \frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{4} + \frac{\ell}{6} + \cdots + \frac{\ell}{2(n-1)} = \frac{\ell}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right).$$

Iekavās atrodas harmoniskās rindas parciālsumma S_{n-1}. Tā kā $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, tad var izveidot pakāpienus, kas ir pēc patikas tālu nobīdīti pa labi. Δ_n aug, bet aug ļoti lēni. Piemēram, $\Delta_{1000} \approx 3,8\ell$.



1.2. zīm.

1.1. teorēma. [**Rindu konverģences nepieciešamais nosacījums**]

Ja skaitļu rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverģē, tad* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

► Tā kā rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverģē, tad eksistē galīga robeža $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Tā kā $a_n = S_n - S_{n-1}$, tad eksistē robeža šīs vienādības labajai pusei un tā ir nulle. Tātad eksistē robeža šīs vienādības kreisajai pusei un tā arī ir nulle, t.i., eksistē

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0. \quad ◄$$

1.1. piezīme.

1. Teorēmai apgrieztā teorēma nav spēkā. Piemēram, harmoniskai rindai $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ $a_n = \frac{1}{n}$ un $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, bet, kā tika pamatots iepriekš, harmoniskā rinda diverģē.
2. Protams, ja $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$ vai neeksistē, tad rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - diverģē. Piemēram, rindas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{3n-2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n\pi}{4}$ ir diverģentas rindas, jo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n-2} = \frac{2}{3} \neq 0$, bet $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{n\pi}{4}$ - neeksistē.
3. Harmonisko rindu tāpat kā ģeometrisko rindu bieži izmanto, lai pētītu uz konverģenci citas rindas.

1.3. uzdevums. Izpētīt uz konverģenci rindas

a) $2 + \frac{2^2}{2^{10}} + \frac{2^3}{3^{10}} + \cdots + \frac{2^n}{n^{10}} + \cdots,$

b) $2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \cdots + \frac{n+1}{n} + \cdots,$

c) $\frac{5}{1+0{,}1} + \frac{5}{(1+0{,}1)^2} + \frac{5}{(1+0{,}1)^3} + \cdots,$

d) $\ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \cdots + \ln\frac{n+1}{n} + \cdots.$

a) Rindas vispārīgais loceklis $a_n = \frac{2^n}{n^{10}}$. Atradīsim tā robežu

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n^{10}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(2^n)'}{(n^{10})'} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \ln 2}{10\cdot n^9} =$$
$$= \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{(2^n\cdot \ln 2)'}{(10\cdot n^9)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \ln^2 2}{10\cdot 9\cdot n^8} = \cdots =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \ln^{10} 2}{10!} = +\infty$$

(Desmit reizes tika pielietota Lopitāla kārtula). Rinda diverģē, jo neizpildās rindas konverģences nepieciešamais nosacījums.

b) Rindas vispārīgais loceklis $a_n = \frac{n+1}{n}$ un tā robeža

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0.$$

Rinda diverģē.

c) Šoreiz $a_n = \frac{5}{(1+0{,}1)^n}$ un $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{1{,}1^n} = 0$. Rindu konverğences nepieciešamais nosacījums izpildās. Jautājums par rindas konverğenci tomēr paliek atklāts. Rindas locekļi veido ğeometrisko progresiju ar $a_1 = \frac{5}{1{,}1}$ un $q = \frac{1}{1{,}1} < 1$. Tātad rinda konverğē, pie tam tās summa

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{5}{1,1}}{1 - \frac{1}{1,1}} = \frac{5}{1,1-1} = \frac{5}{0,1} = 50.$$

d) Šoreiz $a_n = \ln \frac{n+1}{n}$ un $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln \frac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$. Neskatoties uz to, ka rindu konverğences nepieciešamais nosacījums izpildās, šī rinda diverğē (skat. 1.1. uzdevuma a) gadījumu).

1.4. Konverğentu rindu vienkāršākās īpašības

1. īpašība. [**Distributīvā īpašība**]

Ja rinda

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1.1}$$

konverğē un tās summa ir $S^{(1)}$, tad konverğē arī rinda

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n \quad (c \in \mathbb{R}) \tag{1.2}$$

un tās summa $S^{(2)} = c \cdot S^{(1)}$.

▶ Apskatīsim rindas (1.2) parciālsummu

$$S_n^{(2)} = ca_1 + ca_2 + \cdots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = cS_n^{(1)},$$

kur $S_n^{(1)}$ - rindas (1.1) parciālsumma. Tātad $S_n^{(2)} = cS_n^{(1)}$. Robeža no šīs vienādības labās puses eksistē, jo rinda (1.1) konverğē, un tā ir vienāda ar $cS^{(1)}$. Tāpēc eksistē galīga robeža arī no šīs vienādības kreisās puses un tā arī ir $cS^{(1)}$. Tādējādi rinda (1.2) konverğē un tās summa

$$S^{(2)} = \lim_{n\to\infty} S_n^{(2)} = \lim_{n\to\infty} cS_n^{(1)} = cS^{(1)}. \quad ◀$$

Piezīme. Šī īpašība nozīmē, ka $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, kur $c \in \mathbb{R}$ un $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ - konverģenta rinda.

Sekas. Ja $c \neq 0$ un rinda (1.1) - diverģē, tad rinda (1.2) arī diverģē (viegli pierādīt, pieņemot pretējo un rindas (1.2) katru locekli reizinot ar $\frac{1}{c}$).
Ja $c = 0$, tad neatkarīgi no rindas (1.1) rakstura rinda (1.2) konverģē, jo visi tās locekļi ir nulles.

2. īpašība. [**Rindu saskaitīšana**]
Ja rindas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{1.1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n, \tag{1.3}$$

konverģē un to summas atbilstoši ir $S^{(1)}$, $S^{(3)}$ tad konverģē arī rinda

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \tag{1.4}$$

un tās summa ir

$$S^{(4)} = S^{(1)} + S^{(3)}.$$

▶ Apskatīsim rindas (1.4) parciālsummu

$$\begin{aligned} S_n^{(4)} &= (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \cdots + (a_n + b_n) = \\ &= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = S_n^{(1)} + S_n^{(3)}, \end{aligned}$$

kur $S_n^{(1)}$, $S_n^{(3)}$ ir atbilstoši rindu (1.1), (1.3) parciālsummas. Tā kā rindas (1.1), (1.3) konverģē, tad eksistē galīgas robežas $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(1)} = S^{(1)}$ un $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(3)} = S^{(3)}$. Tātad eksistē $\lim\limits_{n\to\infty} \left(S_n^{(1)} + S_n^{(3)}\right)$ un arī $\lim\limits_{n\to\infty} S_n^{(4)}$, pie tam

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{(4)} = \lim_{n\to\infty} \left(S_n^{(1)} + S_n^{(3)}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n^{(1)} + \lim_{n\to\infty} S_n^{(3)} = S^{(1)} + S^{(3)}.$$

Tādējādi rinda (1.4) konverģē un tās summa

$$S^{(4)} = S^{(1)} + S^{(3)}. \quad ◀$$

1.2. piezīme.

1. Konverğentu rindu 1. un 2. īpašību ar matemātiskās indukcijas metodi var vispārināt uz jebkura galīga skaita konverğentu rindu lineāro kombināciju.
2. Ja saskaita konverğentu un diverğentu rindu, tad iegūst diverğentu rindu (pierāda no pretējā).
3. Ja saskaita divas diverğentas rindas, tad iegūtās rindas raksturs vēl ir jāpēta.

3. īpašība. [**Asociatīvā īpašība**]

Ja konverğentā rindā kaut kādā veidā grupē tās locekļus, nemainot to secību, tad iegūst konverğentu rindu, pie tam rindas summa no tā nemainās.

Pierāda analogi, kā 1. vai 2. īpašību.

1.3. piezīme.

1. 3. īpašībai apgrieztais apgalvojums nav spēkā. Piemēram, rinda $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots$ konverğē, bet rinda $1-1+1-1+1-1+\cdots$ diverğē.
2. Ja rinda no grupētajiem locekļiem diverğē, tad diverğē arī sākotnējā rinda (rinda, kuras locekļi nav grupēti).

1.5. Konverğentas rindas atlikums

Apskatīsim rindas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1.1}$$

un

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}, \tag{1.5}$$

kur rinda (1.5) ir iegūta, rindā (1.1) atmetot tās pirmos k locekļus.

1.2. teorēma. *Rindai* (1.1) *un rindai* (1.5) *ir vienādi raksturi.*

▶ Pieņemsim, ka rinda (1.1) konverģē un apskatīsim rindas (1.5) parciālsummu

$$S_n^{(5)} = a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_{k+n} = S_{n+k}^{(1)} - (a_1 + a_2 + \cdots + a_k) = S_{n+k}^{(1)} - S_k^{(1)}.$$

Tā kā rinda (1.1) konverģē, tad eksistē galīga robeža

$$\lim_{n\to\infty} \left(S_{n+k}^{(1)} - S_k^{(1)} \right) = S^{(1)} - S_k^{(1)}.$$

Tātad eksistē arī galīga robeža

$$\lim_{n\to\infty} S_n^{(5)} = S^{(1)} - S_k^{(1)}.$$

Tādējādi rinda (1.5) konverģē un tās summa $S^{(5)} = S^{(1)} - S_k^{(1)}$.

Tagad pieņemsim, ka rinda (1.5) konverģē. Lai pierādītu, ka konverģē arī rinda (1.1), rīkojas analogi iepriekšējam gadījumam un izmanto vienādību

$$S_{n+k}^{(1)} = S_n^{(5)} + S_k^{(1)}.$$

Teorēmas otro daļu (ka no vienas rindas diverģences izriet otras rindas diverģence) pierāda no pretējā. ◀

Sekas.

1. Rindām $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ un $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, kuras atšķiras tikai ar galīga skaita locekļiem, ir vienādi raksturi.
2. Dotajai rindai pieskaitot, atmetot vai izmainot galīga skaita locekļus, raksturs nemainās. Konverģentas rindas gadījumā rindas summa var arī mainīties.

Piemēram,

$$8 - 5 + 12 - 26 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$$

ir konverģenta rinda, jo konverģenta ir rinda

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots$$

(kā ģeometriskā rinda ar $q = \frac{1}{2} < 1$). Sākotnējās rindas summa ir

$$8 - 5 + 12 - 26 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = -9.$$

1.4. definīcija. Par **konverğentas rindas** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **atlikumu** sauc rindas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{n+k}$ (iegūta rindā $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ atmetot tās pirmos k locekļus) summu un apzīmē ar R_k.

Tādā gadījumā konverğentas rindas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ summa S ir vienāda ar tās atlikuma R_k un parciālsummas S_k summu, t.i.,

$$S = R_k + S_k \text{ jeb } S = S_k + R_k.$$

No šīs vienādības izteiksim $R_k = S - S_k$ un pāriesim pie robežas, kad $k \to \infty$. Iegūsim

$$\lim_{k\to\infty} R_k = \lim_{k\to\infty} (S - S_k) = S - \lim_{k\to\infty} S_k = S - S = 0.$$

Tas nozīmē, ka pietiekami lieliem k rindas parciālsumma S_k tuvināti var aizstāt rindas summu S, t.i., $S \approx S_k$.

No virkņu konverğences Košī kritērija seko rindu konverğences Košī kritērijs.

1.3. teorēma. [**Rindu konverğences Košī kritērijs**]

Rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverğē tad un tikai tad, ja jebkuram* $\varepsilon > 0$ *eksistē tāds naturāls skaitlis* N *(atkarīgs no* ε*), ka visiem numuriem* $n > N$ *un katram naturālam* p *izpildās nevienādība*

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

jeb

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

2. nodaļa

POZITĪVU LOCEKĻU RINDAS

2.1. Rindu konverğences salīdzināšanas pazīme

2.1. teorēma. [**Salīdzināšanas pazīme**]

Ja divu skaitļu rindu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1.1}$$

un

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{1.2}$$

locekļi apmierina nevienādības $0 \le a_n \le b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *tad*

1. *rinda* (1.1) *konverğē, ja konverğē rinda* (1.2)*;*
2. *rinda* (1.2) *diverğē, ja diverğē rinda* (1.1)*.*
3. *Pozitīvu locekļu rindām ir vienādi raksturi (abas vai nu konverğē, vai abas diverğē), ja eksistē* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ $(c \ne 0,\ c \ne \infty)$*.*

► Vispirms pieņemsim, ka rinda (1.2) konverğē un visiem numuriem n izpildās nevienādības $0 \le a_n \le b_n$. Tādā gadījumā starp šo rindu parciālsummām pastāv nevienādība $S_n^{(1)} \le S_n^{(2)}$.

Tā kā rinda (1.2) konverğē un tās parciālsummu virkne $\left(S_n^{(2)}\right)$ ir nedilstoša

$$S_{n+1}^{(2)} = S_n^{(2)} + b_{n+1} \le S_n^{(2)},$$

tad

$$S_n^{(2)} \le S^{(2)},$$

kur

$$S^{(2)} = \lim_{n\to\infty} S_n^{(2)}$$

un ir rindas (1.2) summa. Tā kā

$$S_n^{(1)} \le S_n^{(2)} \text{ un } S_n^{(2)} \le S^{(2)},$$

tad rindas (1.1) parciālsummu virkne $\left(S_n^{(1)}\right)$, kura arī ir nedilstoša, ir ierobežota no augšas ar $S^{(2)}$. Virknei $\left(S_n^{(1)}\right)$ eksistē galīga robeža

$$S^{(1)} = \lim_{n\to\infty} S_n^{(1)}.$$

pie tam $S^{(1)} \le S^{(2)}$. Tādējādi rinda (1.1) konverģē un $S^{(1)}$ ir tās summa.

Teorēmas 2. gadījumu viegli pierādīt no pretējā, izmantojot 1. gadījumu.

Tagad apskatīsim teorēmas 3. gadījumu un pieņemsim, ka eksistē galīga un no nulles atšķirīga robeža $c = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$. Tas nozīmē, ka virkne $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ ir konverģenta un tāpēc tā ir ierobežota. Tātad eksistē $m, M > 0$, ka visiem numuriem n izpildās nevienādība

$$m \le \frac{a_n}{b_n} \le M \text{ jeb } mb_n \le a_n \le Mb_n.$$

Ja pieņemtu, ka rinda (1.2) konverģē, tad konverģē arī rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} Mb_n$ un konverģē arī rinda (1.1) (izmantojām nevienādību $a_n \le Mb_n$ un teorēmas 1. gadījumu).

Ja pieņemtu, ka rinda (1.1) konverģē, tad konverģē arī rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} mb_n$ un konverģē arī rinda (1.2) (izmantojām nevienādību $mb_n \le a_n$ un teorēmas 1. gadījumu).

Lai pierādītu, ka abas rindas var būt diverģentas vienlaicīgi, rīkojas līdzīgi kā iepriekš un izmanto teorēmas 2. gadījumu. ◀

2.1. piezīme. Bez praktiskiem lietojumiem salīdzināšanas pazīmei ir liela teorētiskā nozīme. Šo pazīmi izmanto citu pazīmju pierādīšanā. Lietojot šo pazīmi rindu pētīšanā uz konverģenci, ir svarīgi iepriekš paredzēt dotās rindas raksturu. Ja liekas, ka rinda varētu konverģēt, tad salīdzināšanai izvēlas konverģentu rindu ar lielākiem locekļiem. Pretējā gadījumā izvēlas diverģentu rindu ar mazākiem locekļiem.

2.1. uzdevums. Izpētīt uz konverğenci rindas

a) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{n^n} + \cdots$,

b) $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \cdots$,

c) $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$,

d) $\frac{1}{3} + \frac{3}{6} + \frac{5}{11} + \cdots + \frac{2n-1}{n^2+2} + \cdots$.

a) Salīdzināšanai izvēlēsimies konverğentu ğeometrisko rindu

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots.$$

Visiem numuriem n izpildās nevienādība $\frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{2^n}$. Saskaņā ar salīdzināšanas pazīmi dotā rinda konverğē.

b) Doto rindu salīdzināsim ar harmonisko rindu. Visiem n izpildās nevienādība $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$. Tā kā harmoniskā rinda diverğē, tad diverğē arī dotā rinda.

c) Apskatīsim konverğentu ğeometrisko rindu

$$\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots$$

$\left(q = \frac{1}{2} < 1\right)$. Visiem n izpildās nevienādība $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, tāpēc dotā rinda konverğē.

d) Salīdzināšanai izvēlēsimies harmonisko rindu. Vispārīgais loceklis dotajai rindai $a_n = \frac{2n-1}{n^2+2}$, bet harmoniskajai rindai $b_n = \frac{1}{n}$. Atradīsim rindu vispārīgo locekļu attiecības robežu

$$c = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2n-1}{n^2+2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2-n}{n^2+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n^2}} = 2.$$

Tātad eksistē galīga un no nulles atšķirīga robeža. Rindām ir vienādi raksturi. Tādējādi dotā rinda diverğē, jo diverğē harmoniskā rinda.

2.2. uzdevums. Izmantojot salīdzināšanas pazīmi un diverğentu rindu

$$\ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \cdots + \ln\frac{n+1}{n} + \cdots,$$

pierādīt harmoniskās rindas diverğenci.

Apskatīsim virkni (a_n), kur $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Šī virkne ir augoša un konverģē uz e, tāpēc visiem numuriem n izpildās nevienādība $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$. Logaritmēsim šo nevienādību un iegūsim nevienādību

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 \text{ jeb } \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}.$$

Saskaņā ar salīdzināšanas pazīmi varam teikt, ka harmoniskā rinda diverģē, jo diverģē rinda ar vispārīgo locekli

$$a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\frac{n+1}{n}.$$

2.2. Rindu konverģences Dalambēra pazīme

2.2. teorēma. [**Dalambēra**[1] **pazīme**]

Ja skaitļu rindai

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

ar pozitīviem locekļiem eksistē robeža

$$p = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n},$$

tad

1. *rinda konverģē, ja $p < 1$,*
2. *rinda diverģē, ja $p > 1$,*
3. *rindas raksturu nevar noteikt, ja $p = 1$.*

► Tā kā eksistē galīga robeža

$$p = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n},$$

pie tam $p < 1$, tad starp p un skaitli 1 var izvēlēties kādu skaitli q, ka $p < q < 1$.

Izvēlēsimies skaitļa p tādu ε-apkārtni (3. zīm.), lai tā nesaturētu q (skaitļa p ε-apkārtne atrastos pa kreisi no q). Saskaņā ar virknes $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$

[1] Žans Lerons Dalambērs (1717-1783) - franču matemātiķis, mehāniķis, filozofs, astronoms.

robežas definīciju intervālā $(p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ atrodas šīs virknes visi locekļi, sākot ar kādu numuru N (atkarīgs no ε). Tātad visiem numuriem $n \geq N$ ir spēkā nevienādība

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q \text{ jeb } a_{n+1} < a_n q,$$

kur $p < q < 1$.

Izvēlēsimies $n = N, N+1, N+2, \ldots$ un iegūsim nevienādības:

$$\begin{aligned}
&a_{N+1} < a_N q,\\
&a_{N+2} < a_{N+1} q < a_N q^2,\\
&a_{N+3} < a_{N+2} q < a_N q^3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

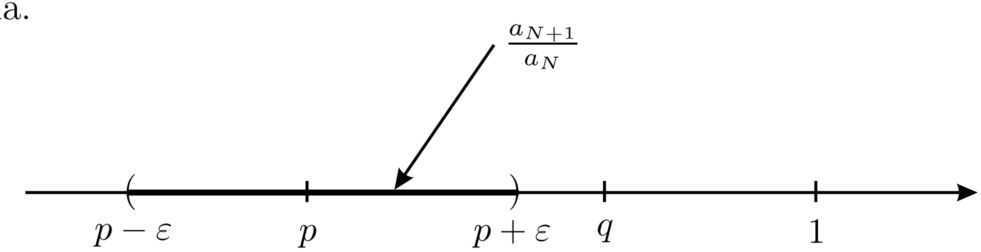
Sastādīsim skaitļu rindu (konverğenta kā ğeometriskā rinda ar $q < 1$)

$$a_N q + a_N q^2 + a_N q^3 + \cdots$$

un ar šo rindu salīdzināsim rindu, kura iegūta no dotās rindas, atmetot tās pirmos N locekļus, t.i., salīdzināsim ar rindu

$$a_{N+1} + a_{N+2} + a_{N+3} + \cdots.$$

Saskaņā ar salīdzināšanas pazīmi tāda rinda konverğē, tāpēc konverğē arī dotā rinda.



2.1. zīm.

Tagad apskatīsim gadījumu, kad eksistē robeža

$$p = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

pie tam $p > 1$. Spriežot tāpat kā iepriekš, var teikt, ka virknes $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ visi locekļi, sākot ar kādu numuru N, ir lielāki par 1. Tātad visiem $n \geq N$ izpildās nevienādība

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \text{ jeb } a_{n+1} > a_n.$$

Tas nozīmē, ka dotās rindas locekļi, sākot ar numuru N, palielinās. Ņemot vērā to, ka $a_n > 0$, var teikt, ka $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ (protams, ja šāda robeža eksistē) nevar būt vienāda ar nulli. Rindai neizpildās konverģences nepieciešamais nosacījums, tātad rinda diverģē.

Lai pamatotu, ka rindas raksturu nevar noteikt, ja $p = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, pietiek apskatīt divus piemērus. Rindām $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (harmoniskā rinda) un $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $p = 1$, tomēr pirmā rinda diverģē, bet otrā rinda konverģē[2]. ◀

2.3. uzdevums. Izpētīt uz konverģenci rindas

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{2^n}$,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{10^n}$,

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

a) Dotajai rindai

$$a_n = \frac{n^3}{2^n}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}.$$

Atradīsim robežu

$$p = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{2^{n+1}}}{\frac{n^3}{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{2n^3} =$$
$$= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 = \frac{1}{2} < 1.$$

Rinda konverģē.

b) Uzrakstīsim

$$a_n = \frac{n!}{10^n}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{10^{n+1}}$$

un atradīsim robežu

$$p = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}}{\frac{n!}{10^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{10} = +\infty.$$

Rinda diverģē, jo $p > 1$.

[2] Šīs rindas konverģence tiks pamatota vēlāk.

c) Šoreiz
$$a_n = \frac{n!}{n^n}, \quad a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}.$$
Atradīsim
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$
Rinda konverğē.

2.3. Rindu konverğences Košī pazīme

2.3. teorēma. [**Košī pazīme**]

Ja skaitļu rindai
$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$
ar pozitīviem locekļiem eksistē robeža
$$p = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n},$$
tad

1. *rinda konverğē, ja $p < 1$,*
2. *rinda diverğē, ja $p > 1$,*
3. *rindas raksturu nevar noteikt, ja $p = 1$.*

▶ Tā kā eksistē robeža $p = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, pie tam $p < 1$, tad starp p un skaitli 1 var izvēlēties kādu skaitli q, ka $p < q < 1$. Izvēlēsimies skaitļa p tādu ε-apkārtni, lai tā nesaturētu q. Saskaņā ar virknes $(\sqrt[n]{a_n})$ robežas definīciju intervālā $(p-\varepsilon, p+\varepsilon)$ atrodas šīs virknes visi locekļi, sākot ar kādu numuru N. Tātad visiem numuriem $n \geq N$ ir spēkā nevienādība
$$\sqrt[n]{a_n} < q \ \text{ jeb } \ a_n < q^n,$$
kur $p < q < 1$.

Izvēlēsimies $n = N, N+1, N+2, \ldots$ un iegūsim nevienādības:

$$\begin{aligned} &a_N < q^N, \\ &a_{N+1} < q^{N+1}, \\ &a_{N+2} < q^{N+2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Saskaņā ar salīdzināšanas pazīmi rinda

$$a_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots$$

konverğē, jo konverğē rinda

$$q^N + q^{N+1} + q^{N+2} + \cdots$$

(ğeometriskā rinda ar $q < 1$). Tādējādi konverğē arī sākotnējā rinda

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots,$$

jo konverğē rinda, kura iegūta, atmetot sākotnējās rindas pirmos N locekļus.

Lai pierādītu teorēmas otro daļu, spriedīsim tāpat kā iepriekš. Tā kā eksistē robeža

$$p = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1,$$

tad virknes $(\sqrt[n]{a_n})$ visi locekļi, sākot ar kādu numuru N, ir lielāki par 1. Tātad visiem $n \geq N$ izpildās nevienādība $\sqrt[n]{a_n} > 1$ jeb $a_n > 1$. Tas nozīmē, ka arī šoreiz neizpildās rindu konverğences nepieciešamais nosacījums. Rinda diverğē.

Lai pamatotu, ka rindas raksturu nevar noteikt, ja

$$p = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1,$$

pietiek apskatīt divus piemērus. Arī šoreiz noder rindas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. ◀

2.2. piezīme.

1. Ja, lietojot Dalambēra vai Košī pazīmi, atbilstošā robeža neeksistē, tad par rindas raksturu neko nevar pateikt. Rindas pētīšanai uz konverğenci ir jāizvēlas cits paņēmiens.
2. Košī pazīme ir "spēcīgāka" par Dalambēra pazīmi. Košī pazīme var sniegt atbildi par rindas konverğenci reizēm arī tad, kad Dalambēra pazīme atbildi nedod. Ja Košī pazīme atbildi nedod, tad Dalambēra pazīmi, protams, nav vērts lietot.

2.4. uzdevums. Izpētīt uz konverğenci rindas

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{n\sqrt{3}}{2n+1}$,

c) $(1+0,2)+(1+0,2)^2+(1+0,2)^3+\cdots$,

d) $\frac{1}{1+0,1}+\frac{1}{(1+0,1)^2}+\frac{1}{(1+0,1)^3}+\cdots$.

a) Dotajai rindai $a_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$. Atradīsim robežu

$$p = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1.$$

Rinda konverğē.

b) Šoreiz $a_n = \arcsin^n \frac{n\sqrt{3}}{2n+1}$ un

$$p = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \arcsin \frac{n\sqrt{3}}{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2+\frac{1}{n}} =$$

$$= \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3} > 1.$$

Rinda diverğē.

c) Rindas vispārīgais loceklis $a_n = (1+0,2)^n$, bet

$$p = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} (1+0,2) = 1,2 > 1.$$

Rinda diverğē.

d) Dotajai rindai $a_n = \frac{1}{(1+0,1)^n}$, bet

$$p = \frac{1}{1+0,1} = \frac{10}{11} < 1.$$

Rinda konverğē.

2.4. Rindu konverğences integrālā pazīme

2.4. teorēma. [**Integrālā pazīme**]

Ja skaitļu rindas

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

locekļi ir pozitīvi un neaugoši, t.i.,

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots,$$

eksistē intervālā $[1, +\infty)$ *nepārtraukta un neaugoša funkcija* $f(x)$*, ka*

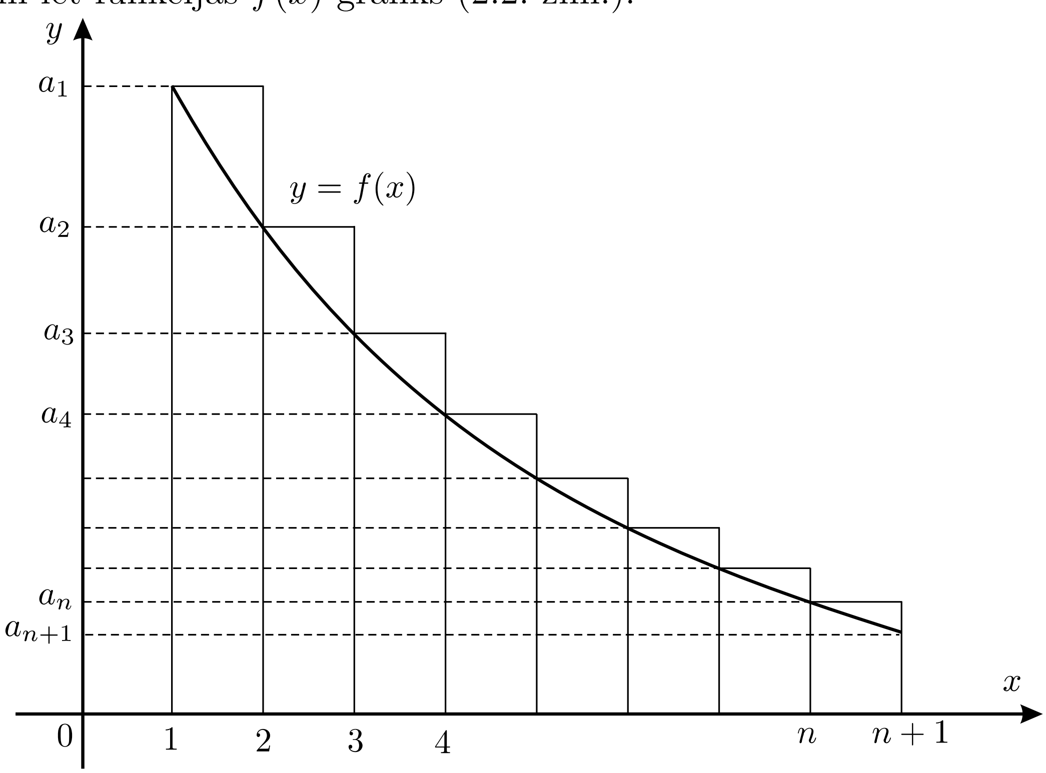
$$f(1) = a_1, f(2) = a_2, f(3) = a_3, \ldots, f(n) = a_n, \ldots,$$

tad

1. rinda konverğē, ja konverğē neīstais integrālis $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$*;*

2. rinda diverğē, ja diverğē neīstais integrālis $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$*.*

▶ Koordinātu plaknē atzīmēsim punktus, kuru abscisas ir $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$, bet ordinātas - atbilstoši $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$. Caur šiem punktiem iet funkcijas $f(x)$ grafiks (2.2. zīm.).



2.2. zīm.

Izvēlēsimies slēgtu intervālu $[1, n+1]$ un šajā intervālā izveidosim funkcijas $f(x)$ Darbū summas (par intervāla dalījuma punktiem kalpo šī intervāla veselie punkti). Apakšējā Darbū summa ir

$$s = a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 1 + \cdots + a_{n+1} \cdot 1 = S_{n+1} - a_1,$$

bet augšējā Darbū summa -

$$S = a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + a_3 \cdot 1 + \cdots + a_n \cdot 1 = S_n,$$

kur S_n, S_{n+1} ir dotās rindas parciālsummas. Noteiktais integrālis funkcijai $f(x)$ intervālā $[1, n+1]$ atrodas starp šīm Darbū summām

$$s \leq \int\limits_1^{n+1} f(x)dx \leq S$$

jeb

$$S_{n+1} - a_1 \leq \int\limits_1^{n+1} f(x)dx \leq S_n$$

(noteiktais integrālis eksistē, jo $f(x)$ ir integrējama kā nepārtraukta funkcija).

Ja neīstais integrālis $\int\limits_1^{+\infty} f(x)dx$ konverğē, t.i., eksistē galīga robeža

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_1^{n+1} f(x)dx = \mathfrak{I},$$

tad no divkāršās nevienādības seko, ka

$$S_{n+1} - a_1 \leq \int\limits_1^{n+1} f(x)dx \leq \mathfrak{I}$$

jeb

$$S_{n+1} \leq \mathfrak{I} + a_1 \ - \text{const.}$$

Tātad dotās rindas parciālsummu virkne, kura acīmredzami ir nedilstoša, ir ierobežota no augšas.

Tādējādi parciālsummu virkne konverğē un konverğē ir arī dotā rinda.

Ja neīstais integrālis diverģē, t.i.,

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{1}^{n+1} f(x)dx = +\infty,$$

tad no divkāršās nevienādības seko, ka arī

$$\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty.$$

Rinda diverģē. ◀

2.3. piezīme.

1. 2.4. teorēmai apgrieztā teorēma arī ir spēkā. Proti, ja rinda konverģē, tad konverģē arī atbilstošais neīstais integrālis un, ja rinda diverģē, tad diverģē arī neīstais integrālis.
2. Neīstajā integrālī par integrācijas apakšējo robežu varēja ņemt arī citu naturālo skaitli, piemēram, 2.

2.5. uzdevums. Izpētīt uz konverģenci rindas

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$,

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$,

c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

a) Izvēlēsimies funkciju $f(x)=\frac{1}{x}$. Šī funkcija ir dilstoša, nepārtraukta intervālā $[1,+\infty)$, $f(n)=\frac{1}{n}=a_n$ $(n=1,2,\ldots)$. Rindas locekļi ir pozitīvi un dilstoši. Apskatīsim neīsto integrāli

$$\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{1}^{+\infty}\frac{1}{x}dx = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{1}^{n}\frac{dx}{x} = \lim_{n\to\infty}(\ln n - \ln 1) = +\infty.$$

Neīstais integrālis diverģē, diverģē arī rinda. Starp citu, šīs rindas (harmoniskā rinda) diverģence tika pierādīta jau iepriekš, lietojot citus paņēmienus.

b) Šoreiz izvēlēsimies funkciju $f(x) = \frac{1}{x^2}$. Arī šī funkcija ir dilstoša un nepārtraukta intervālā $[1, +\infty)$, $f(n) = \frac{1}{n^2} = a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Rindas locekļi ir pozitīvi un dilstoši. Neīstais integrālis

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{n\to\infty} \int_1^{n} \frac{dx}{x^2} = \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{n} + 1\right) = 1$$

konverğē, tāpēc rinda konverğē.

c) Izvēlēsimies funkciju $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$. Šī funkcija ir dilstoša un nepārtraukta intervālā $[2, +\infty)$, $f(n) = \frac{1}{n \ln n} = a_n$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Rindas locekļi ir pozitīvi un dilstoši. Neīstais integrālis

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{n\to\infty} \int_2^{n} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{n\to\infty} \ln(\ln x)\Big|_2^n =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \big(\ln(\ln n) - \ln(\ln 2)\big) = +\infty$$

diverğē; rinda diverğē.

2.4. piezīme. Lietojot integrālo pazīmi, var pārliecināties par rindas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ raksturu. Proti, šī rinda konverğē, ja $\alpha > 1$, bet diverğē, ja $\alpha \leq 1$.

3. nodaļa

MAIŅZĪMJU RINDAS

Šajā tēmā apskatīsim rindas, kuras satur bezgalīgi daudz pozitīvu un bezgalīgi daudz negatīvu locekļu. Tādas rindas sauc par **maiņzīmju** rindām. Ja rinda satur galīgu skaitu, piemēram, negatīvu locekļu, tad, atmetot galīgu skaitu tās pirmo locekļu, iegūsim pozitīvu locekļu rindu. Šai pozitīvu locekļu rindai un sākotnējai rindai ir vienādi raksturi. Ja rindas visi locekļi ir negatīvi, tad, katru tās locekli reizinot ar (-1), iegūsim pozitīvu locekļu rindu. Abām rindām ir vienādi raksturi.

3.1. Alternējošas rindas un to konverģences Leibnica pazīme

3.1. definīcija. Maiņzīmju rindu, kurā blakusstāvošajiem locekļiem ir pretējas zīmes, sauc par **alternējošu** rindu.

Piemēram, alternējoša ir rinda

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots .$$

Vispārīgi alternējošu rindu pierakstīsim šādi:

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n-1} \cdot a_n + \cdots$$

jeb

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n,$$

kur $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

3.1. teorēma. [**Leibnica pazīme**]

Ja alternējošai rindai $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ $(a_n > 0, n = 1, 2, \ldots)$

1. $a_1 > a_2 > \cdots > a_n > \cdots,$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0,$

tad rinda konverģē, pie tam tās summa S *apmierina nevienādību* $0 \le S \le a_1$.

▶ Vispirms apskatīsim pāra indeksu parciālsummu virkni (S_{2m}). Šīs parciālsummas ir pozitīvas.

$$\begin{aligned} S_{2m} &= a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + a_{2m-1} - a_{2m} = \\ &= (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2m-1} - a_{2m}) > 0, \end{aligned}$$

jo visi pēdējās summas saskaitāmie ir pozitīvi. Parciālsummu virkne (S_{2m}) ir augoša virkne, jo

$$S_{2m+2} = S_{2m} + (a_{2m+1} - a_{2m+2}) > S_{2m}.$$

Šī virkne ir ierobežota no augšas. Tiešām

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - \cdots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m} < a_1.$$

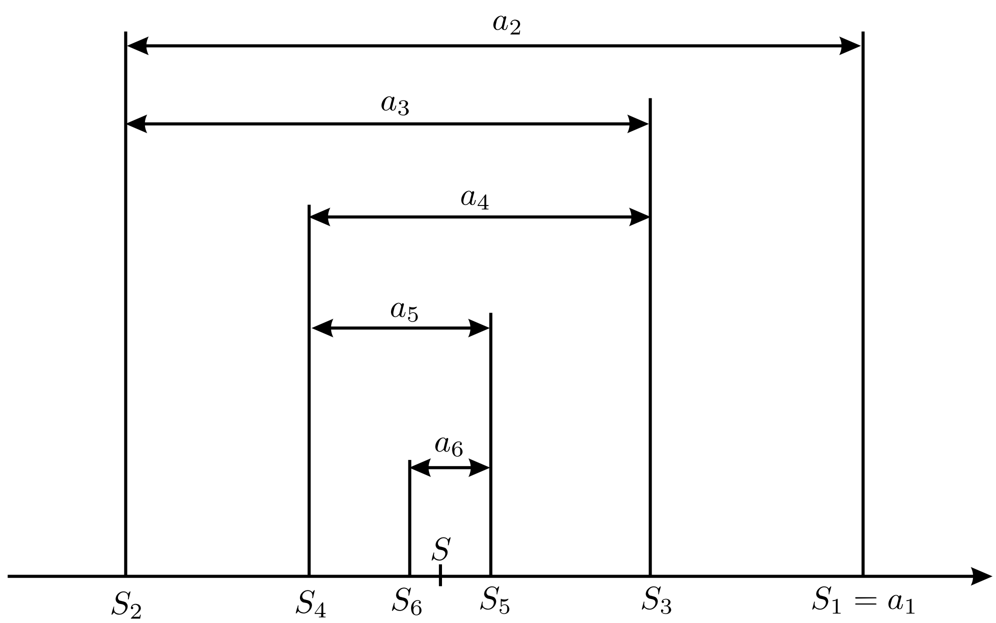
Tātad parciālsummu virkne (S_{2m}) ir augoša un ierobežota no augšas, pie tam $0 < S_{2m} < a_1$. Tādējādi eksistē galīga robeža $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$, pie tam $0 \le S \le a_1$ (šo nevienādību ieguvām nevienādībā $0 < S_{2m} < a_1$ pārejot pie robežas).

Tagad apskatīsim nepāra indeksu parciālsummas $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$. Šīs vienādības labajai pusei eksistē galīga robeža, kad $m \to \infty$, un tā ir vienāda ar S. Tātad eksistē galīga robeža arī vienādības kreisajai pusei un arī ir vienāda ar S, t.i., $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m+1} = S$. Tādējādi eksistē galīga robeža $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ neatkarīgi no tā, vai n -pāra vai nepāra skaitlis. Alternējošas rindas parciālsummu virkne (S_n) konverģē. Rinda konverģē, pie tam tās summa S apmierina nevienādību $0 \le S \le a_1$. ◀

Sekas. Tā kā

$$
\begin{aligned}
S_1 &= a_1, \\
S_2 &= S_1 - a_2, \\
S_3 &= S_2 + a_3, \\
S_4 &= S_3 - a_4, \\
S_5 &= S_4 + a_5 \ \text{ utt.}
\end{aligned}
$$

tad alternējošai rindai, kura apmierina Leibnica teorēmu, pāra indeksu parciālsummas $S_2, S_4, S_6, \ldots$ aug un konverğē uz S, bet nepāra indeksu parciālsummas $S_1, S_3, S_5, \ldots$ dilst un arī konverğē uz S (3.1. zīm.).



3.1. zīm.

Tādējādi pāra indeksu parciālsumma S_{2m} ir rindas summas S tuvināta vērtība ar iztrūkumu, bet nepāra indeksu parciālsumma S_{2m+1} ir S tuvināta vērtība ar uzviju. Pie tam, rindas summu S aizstājot ar tās parciālsummu S_n, rodas kļūda, kura nepārsniedz pirmā atmestā rindas locekļa moduli, t.i., nepārsniedz a_{n+1} (atmestie rindas locekļi arī veido konverğentu alternējošu rindu, kuras summa ir sākotnējās alternējošas rindas atlikums R_n, pie tam $0 < |R_n| < a_{n+1}$).

Piemēram, alternējošā rinda

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n} + \cdots$$

pēc Leibnica pazīmes konverğē, jo

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0$,

2) $\frac{1}{2} > \frac{1}{4} > \frac{1}{6} > \cdots > \frac{1}{2n} > \cdots$.

Rindas summu S aizstājot ar tās parciālsummu $S_9 = 0,372817\ldots$, rodas kļūda, kura nepārsniedz $a_{10} = \frac{1}{20} = 0,05$. Pie tam S_9 ir S tuvināta vērtība ar uzviju.

3.2. Maiņzīmju rindu absolūtā un nosacītā konverģence

Apskatīsim maiņzīmju rindu

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \quad \text{jeb} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Šoreiz rindas locekļi var būt gan pozitīvi, gan negatīvi skaitļi. Izveidosim rindu no šīs rindas locekļu moduļiem, t.i., rindu

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n| + \cdots \quad \text{jeb} \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

3.2. teorēma. *Ja konverģē rinda* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, *tad konverģē arī rinda* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

▶ Rindu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{3.1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{3.2}$$

parciālsummas apzīmēsim atbilstoši ar $S_n^{(1)}$, $S_n^{(2)}$, pie tam

$$S_n^{(1)} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$$
$$S_n^{(2)} = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|.$$

Apzīmēsim ar S_n^+ parciālsummas $S_n^{(1)}$ visu pozitīvo locekļu summu, bet ar S_n^- šīs parciālsummas visu negatīvo locekļu moduļu summu. Rindu (3.1) un (3.2) parciālsummas $S_n^{(1)}$ un $S_n^{(2)}$ izteiksim ar S_n^+ un S_n^-.

$$S_n^{(1)} = S_n^+ - S_n^-, \quad S_n^{(2)} = S_n^+ + S_n^-.$$

Tā kā rinda (3.2) konverģe, tad eksistē galīga robeža

$$S^{(2)} = \lim_{n\to\infty} S_n^{(2)} = \lim_{n\to\infty} (S_n^+ + S_n^-).$$

Tā kā virknes (S_n^+) un (S_n^-) ir augošas un ierobežotas no augšas ar $S^{(2)}$, tad šīs virknes ir konverģentas. Tātad eksistē galīgas robežas

$$S^+ = \lim_{n\to\infty} S_n^+ \ \text{ un } \ S^- = \lim_{n\to\infty} S_n^-.$$

Tātad eksistē arī galīga robeža starpībai $S_n^+ - S_n^-$ un arī parciālsummai $S_n^{(1)}$, pie tam

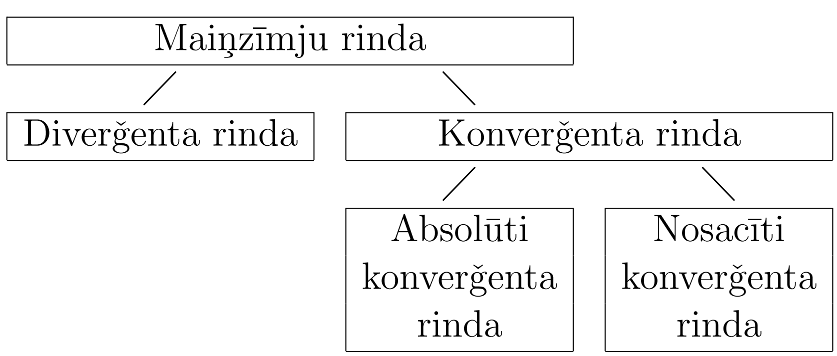
$$\lim_{n\to\infty} S_n^{(1)} = \lim_{n\to\infty} (S_n^+ - S_n^-) = \lim_{n\to\infty} S_n^+ - \lim_{n\to\infty} S_n^- = S^+ - S^-.$$

Tādējādi rinda (3.1) konverģē. ◀

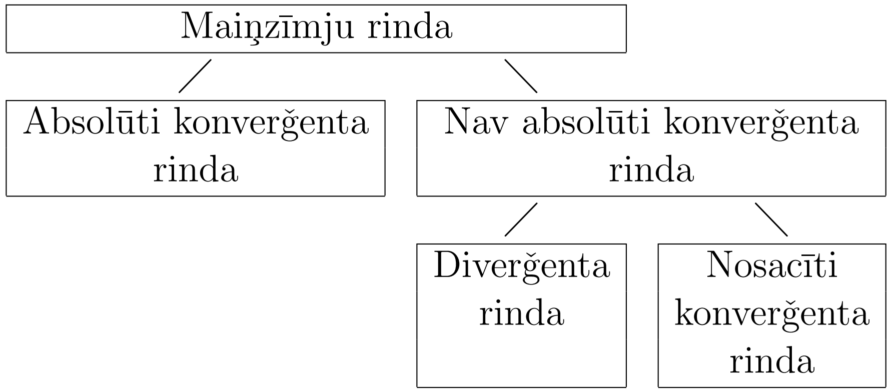
3.2. definīcija. Rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sauc par **absolūti** konverģentu rindu, ja konverģē rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

3.3. definīcija. **Konverģentu** rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sauc par **nosacīti** konverģentu rindu, ja diverģē rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Maiņzīmju rinda var būt absolūti konverģenta, nosacīti konverģenta vai diverģenta rinda.



1. shēma



2. shēma

Maiņzīmju rindu pētot uz konverģenci, var vispirms noskaidrot, vai tā konverģē, vai diverģē. Alternējošai rindai to var izdarīt, lietojot Leibnica pazīmi. Konverģentai rindai savukārt var noskaidrot, vai rinda konverģē absolūti vai nosacīti (1. shēma). Tam nolūkam, lietojot pozitīvu locekļu rindu konverģences pazīmes (salīdzināšanas pazīme, Dalambēra pazīme, Košī pazīme, integrālā pazīme), pēta uz konverģenci maiņzīmju rindas locekļu moduļu rindu. Šī shēma īpaši ir izdevīga diverģentai maiņzīmju rindai. Ja maiņzīmju rinda nav alternējoša rinda, tad, protams, lietot Leibnica pazīmi nedrīkst. Dažreiz rindas raksturu var noteikt, lietojot konverģences nepieciešamo nosacījumu vai konverģentas rindas definīciju.

Bieži izdevīgāk vispirms pētīt uz konverģenci nevis pašu maiņzīmju rindu, bet tās locekļu moduļu rindu (2. shēma). Šī shēma īpaši izdevīga ir absolūti konverģentai maiņzīmju rindai. Nosacīti konverģentai maiņzīmju rindai nav svarīgi, kuru shēmu lietot - pirmo vai otro. starp citu, nosacīti konverģentā rindā, sastādot divas rindas: vienu no šīs rindas pozitīviem locekļiem, bet otru - no negatīvu locekļu moduļiem, iegūst uz $+\infty$ diverģentas rindas.

3.1. uzdevums. Izpētīt uz konverģenci rindas

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2},$$

$$c)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n, \qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{2^n},$$

$$e)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n!}{2^n}.$$

a) Saskaņā ar Leibnica pazīmi alternējošā rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ konverğē, bet rinda no tās locekļu moduļiem (harmoniskā rinda) diverğē. Tātad dotā rinda konverğē nosacīti.

b) Rinda konverğē absolūti, jo konverğē rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

c) Sastādīsim rindu no dotās rindas locekļu moduļiem. Rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ saskaņā ar Košī konverğences pazīmi konverğē, jo

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Tātad dotā alternējošā rinda konverğē absolūti.

d) Dotā maiņzīmju rinda nav alternējoša rinda. Izveidosim rindu no tās locekļu moduļiem un pielietosim salīdzināšanas pazīmi, t.i., rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{2^n}$ salīdzināsim ar konverğentu rindu (ğeometriskā rinda) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$. Tā kā visiem numuriem n izpildās $|\sin n| \leq 1$ un $\frac{|\sin n|}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$, tad rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{2^n}$ konverğē, bet dotā maiņzīmju rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{2^n}$ konverğē absolūti.

e) Dotajai alternējošai rindai atradīsim

$$a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{3}{4},\ a_4 = \frac{3}{2},\ \ldots .$$

Acīmredzami, ka neizpildās Leibnica pazīmes 1. nosacījums. Šoreiz visiem numuriem $n > 1$ izpildās $a_{n+1} > a_n$, jo

$$\frac{(n+1)!}{2^{n+1}} > \frac{n!}{2^n}.$$

Rinda diverğē. Starp citu,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{2^n} = +\infty$$

(neizpildās Leibnica pazīmes arī 2. nosacījums).

3.3. Absolūti konverğentu rindu komutatīvā īpašība

Iepriekš tika apskatītas konverğentu rindu īpašības (distributīvā, asociatīvā, linearitātes īpašība). Absolūti konverğentām rindām ir spēkā vēl viena īpašība - komutatīvā īpašība (locekļu pārvietojamība).

3.3. teorēma. *Ja rinda*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots,$$

konverğē absolūti, tad rinda

$$b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n + \cdots,$$

kura iegūta dotajā rindā patvaļīgi pārvietojot tās locekļus, arī konverğē absolūti, pie tam rindām ir viena un tā pati summa.

▶ Tā kā rinda

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{3.1}$$

konverğē absolūti, tad konverğē rinda

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{3.2}$$

Lai pierādītu, ka rinda

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{3.3}$$

konverğē absolūti, pierādīsim, ka konverğē rinda

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|. \tag{3.4}$$

Apskatīsim rindas (3.4) parciālsummu

$$S_n^{(4)} = |b_1| + |b_2| + \cdots + |b_n|.$$

Šīs parciālsummas visi locekļi ieiet rindas 3.2. kādā parciālsummā

$$S_m^{(2)} = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_m|,$$

jo katrs b_i sakrīt ar kādu no a_j. Tāpēc

$$S_n^{(4)} \leq S_m^{(2)} \leq S^{(2)},$$

kur $S^{(2)} = \lim\limits_{m\to\infty} S_m^{(2)}$ - rindas 3.2. summa. No šīs divkāršās nevienādības seko, ka rindas (3.4) parciālsummu virkne $(S_n^{(4)})$, kura ir augoša, ierobežota no augšas. Tātad šai virknei eksistē galīga robeža. Tas nozīmē, ka rinda (3.4) konverğē, bet rinda (3.3) absolūti konverğē. Rindas (3.4) summa $S^{(4)} \leq S^{(2)}$ (izriet no divkāršās nevienādības). Ja rindu (3.3) uzskatīt par sākotnējo rindu, bet (3.3.) par rindu, kura iegūta rindā (3.3) pārvietojot locekļus un spriest tāpat kā iepriekš, tad iegūsim $S^{(2)} \leq S^{(4)}$. Tādējādi $S^{(2)} = S^{(4)}$.

Tagad pierādīsim, ka $S^{(1)} = S^{(3)}$. Rindas 3.1 summa $S^{(1)} = S^{+} - S^{-}$, kur S^{+} - rindas 3.1 pozitīvo locekļu rindas summa, bet S^{-} - rindas 3.1 negatīvo locekļu moduļu rindas summa. Rindas (3.3) summa $S^{(3)}$ arī ir vienāda ar $S^{+} - S^{-}$, jo, kā parādījām iepriekš, pozitīvu locekļu rindās locekļu pārvietošana neizmaina šo rindu summas. Tādējādi $S^{(1)} = S^{(3)}$. ◀

Sekas.

1. Ar absolūti konverğentām rindām var izpildīt tās pašas darbības, kuras var izpildīt ar polinomiem, ieskaitot arī reizināšanas darbību. Rindu reizināšanu apskatīsim nedaudz vēlāk.
2. Rinda, kura iegūta no absolūti konverğentas rindas, izrakstot tās locekļus, arī absolūti konverğē. Šāds apgalvojums izriet no rindu konverğences Košī kritērija.
3. Nosacīti konverğentām rindām nav spēkā komutatīvā īpašība. Nosacīti konverğentā rindā tās locekļus var pārvietot tā, lai iegūtā rinda konverğētu uz jebkuru iepriekš izvēlētu skaitli vai diverğētu. Rindas locekļus var pārvietot tā, lai iegūtā rinda diverğētu uz $+\infty$ vai $-\infty$.

Apskatīsim, piemēram, nosacīti konverğentu rindu

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \cdots.$$

Šīs rindas summu apzīmēsim ar S (starp citu, $S = \ln 2$). Izmantojot asociatīvo īpašību, šo rindu uzrakstīsim šādi

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) + \cdots.$$

Iegūtās rindas summa arī ir S.

Tagad sākotnējā rindā pārvietosim tās locekļus un iegūsim šādu rindu

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\cdots+$$
$$+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)+\cdots=$$
$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)+\cdots=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)+\cdots\right)=\frac{1}{2}S.$$

Tādējādi tika iegūta rindas, kuras summa ir divreiz mazāka par sākotnējās rindas summu.

3.4. Absolūti konverģentu rindu reizināšana

Apskatīsim divas absolūti konverģentas rindas

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n+\cdots$$

un

$$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n+\cdots.$$

No šo rindu locekļiem izveidosim jaunu rindu

$$a_1b_1+(a_1b_2+a_2b_1)+(a_1b_3+a_2b_2+a_3b_1)+\cdots+$$
$$+(a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1)+\cdots.$$

3.4. definīcija. Rindu

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1b_n+\cdots+a_nb_1)$$

sauc par absolūti konverģentu rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ un $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ **reizinājumu**.

3.4. teorēma. *Ja rindas*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{3.5}$$

un

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \tag{3.6}$$

absolūti konverğē un to summas atbilstoši ir $S^{(5)}$ *un* $S^{(6)}$*, tad absolūti konverğē arī rinda*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_1b_n + \cdots + a_nb_1), \tag{3.7}$$

pie tam tās summa $S^{(7)} = S^{(5)} \cdot S^{(6)}$.

▶ No rindu (3.5) un (3.6) locekļu reizinājumiem sastādīsim matricu ar divām bezgalīgām izejām.

$$\left(\begin{array}{cccccc}
a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 & \cdots & a_1b_n & \cdots \\
a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 & \cdots & a_2b_n & \cdots \\
a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 & \cdots & a_3b_n & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_nb_1 & a_nb_2 & a_nb_3 & \cdots & a_nb_n & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}\right)$$

No matricas elementiem, izrakstot tos pa joslām, izveidosim rindu

$$a_1b_1 + a_1b_2 + a_2b_2 + a_2b_1 + a_1b_3 + \cdots. \tag{3.8}$$

Šī rinda atšķiras no rindas (3.7) ar locekļu secību, pie tam šeit rindas locekļi nav grupēti.

Apskatīsim vēl vienu rindu, sastādītu no rindas (3.8) locekļu moduļiem.

$$|a_1b_1| + |a_1b_2| + |a_2b_2| + |a_2b_1| + |a_1b_3| + \cdots$$

jeb

$$|a_1| \cdot |b_1| + |a_1| \cdot |b_2| + |a_2| \cdot |b_2| + |a_2| \cdot |b_1| + |a_1| \cdot |b_3| + \cdots. \tag{3.9}$$

Apskatīsim rindas (3.9) parciālsummu $S_m^{(9)}$.

Jebkuram m un pietiekami lielam n izpildās nevienādība

$$S_m^{(9)} \le \big(|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|\big)\big(|b_1| + |b_2| + \cdots + |b_n|\big) \tag{$*$}$$

Tas nozīmē, ka rindas (3.9) parciālsummas $S_m^{(9)}$ visi locekļi ir atrodami rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ un $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ parciālsummu ar indeksu n reizinājumā. Tā kā rindas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$ konverģē, tad to parciālsummas nepārsniedz atbilstošās rindas summu. No nevienādības (*) seko, ka pozitīvu locekļu rindas (3.9) parciālsummu virkne ir augoša un ierobežota no augšas. Tātad eksistē galīga robeža $\lim\limits_{m\to\infty} S_m^{(9)} = S^{(9)}$. Tas nozīmē, ka rinda (3.9) konverģē, bet rinda (3.8) konverģē absolūti. Saskaņā ar absolūti konverģentu rindu komutatīvo īpašību absolūti konverģē arī rinda (3.7). Lai atrastu rindas (3.7) summu, apskatīsim rindas (3.8) parciālsummu $S_{n^2}^{(8)}$ (rindām (3.7) un (3.8) ir viena un tā pati summa).

$$S_{n^2}^{(8)} = S_n^{(5)} S_n^{(6)}.$$

Šajā vienādībā pārejot pie robežas, atradīsim rindas (3.8) (arī rindas (3.7)) summu.

$$\lim_{n\to\infty} S_{n^2}^{(8)} = \lim_{n\to\infty} S_n^{(5)} \cdot \lim_{n\to\infty} S_n^{(6)}$$

jeb

$$S^{(8)} = S^{(5)} \cdot S^{(6)}.$$

Tādējādi

$$S^{(7)} = S^{(5)} \cdot S^{(6)}. \quad \blacktriangleleft$$

3.1. piezīme.

1. Absolūti konverģentu rindu reizinājumu var definēt pēc jebkuras shēmas, jo nav svarīga locekļu secība, pie tam locekļi var būt arī grupēti.
2. Nosacīti konverģentām rindām to reizinājumu parasti neapskata, jo nosacīti konverģentas rindas raksturs ir atkarīgs no tās locekļu secības.

4. nodaļa

FUNKCIJU VIRKNES UN FUNKCIJU RINDAS

4.1. Funkciju virkne un funkciju rinda. Funkciju virknes robežfunkcija. Funkciju rindas summa

4.1. definīcija. Par **funkciju rindu** sauc simbolu

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),$$

kur visas funkcijas ir definētas kopā $E \subset \mathbb{R}$.

Fiksētam n $f_n(x)$ ir funkciju rindas n-tais loceklis, bet patvaļīgam n $f_n(x)$ - funkciju rindas vispārīgais loceklis. Ja ir dota funkciju rinda, tad var sastādīt tās parciālsummu virkni $\big(S_n(x)\big)$, kur

$$S_1(x) = f_1(x), S_2(x) = f_1(x) + f_2(x), \ldots,$$

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x), \ldots$$

Paņemot patvaļīgu $x_0 \in E$, iegūsim skaitļu rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ un tās parciālsummu virkni $(S_n(x_0))$. Skaitļu rinda (bet reizē arī virkne) var konverģēt vai diverģēt. Ja, piemēram, skaitļu rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ konverģē, tad saka, ka funkciju rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in E$ konverģē punktā x_0. Pretējā gadījumā - diverģē punktā x_0.

4.2. definīcija. Kopas E apakškopu D, kuras punktos funkciju rinda konverğē, sauc par **funkciju rindas konverğences kopu**.

Katrai vērtībai $x_0 \in D$ iegūsim konverğentu skaitļu rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$, kurai atbilst viens pilnīgi noteikts skaitlis - rindas summa. Tātad kopā D ir definēta funkcija $S(x)$ - **funkciju rindas summa**. Tādējādi

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in D.$$

Attiecībā uz virkni $\big(S_n(x)\big)$ šo funkciju $S(x)$ sauc par **funkciju virknes robežfunkciju** un raksta

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x), \quad x \in D.$$

Piemēram, funkciju rinda

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \cdots$$

ir definēta kopā $\mathbb{R}$, bet tās konverğences kopa D ir intervāls $(-1, 1)$. Šīs funkciju rindas summa $S(x) = \frac{1}{1-x}$. Tātad

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + \cdots = \frac{1}{1-x}, \quad x \in (-1, 1).$$

Tā kā funkciju rindas summa $S(x)$ ir kopā D definēta funkcija, tad ir svarīgi noskaidrot šīs funkcijas īpašības (nepārtrauktība, diferencējamība, integrējamība).

4.2. Funkciju virknes un funkciju rindas vienmērīgā konverğence

4.3. definīcija. Funkciju virkni $\big(f_n(x)\big)$, $x \in E$ sauc par **vienmērīgi konverğentu kopā** $D \subset E$, ja eksistē šajā kopā definēta funkcija $f(x)$, ka visiem $\varepsilon > 0$ eksistē tāds naturāls skaitlis N (atkarīgs no ε), ka visiem numuriem $n > N$ un visiem $x \in D$ izpildās nevienādība $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

To, ka funkciju virkne $(f_n(x))$ kopā D vienmērīgi konverğē uz $f(x)$, apzīmēsim šādi

$$\big(f_n(x)\big) \rightrightarrows f(x), \quad x \in D.$$

Acīmredzami, ja funkciju virkne kopā D vienmērīgi konverğē, tad tā konverğē katrā kopas D punktā. Funkcija $f(x)$ ir funkciju virknes robežfunkcija, t.i.,

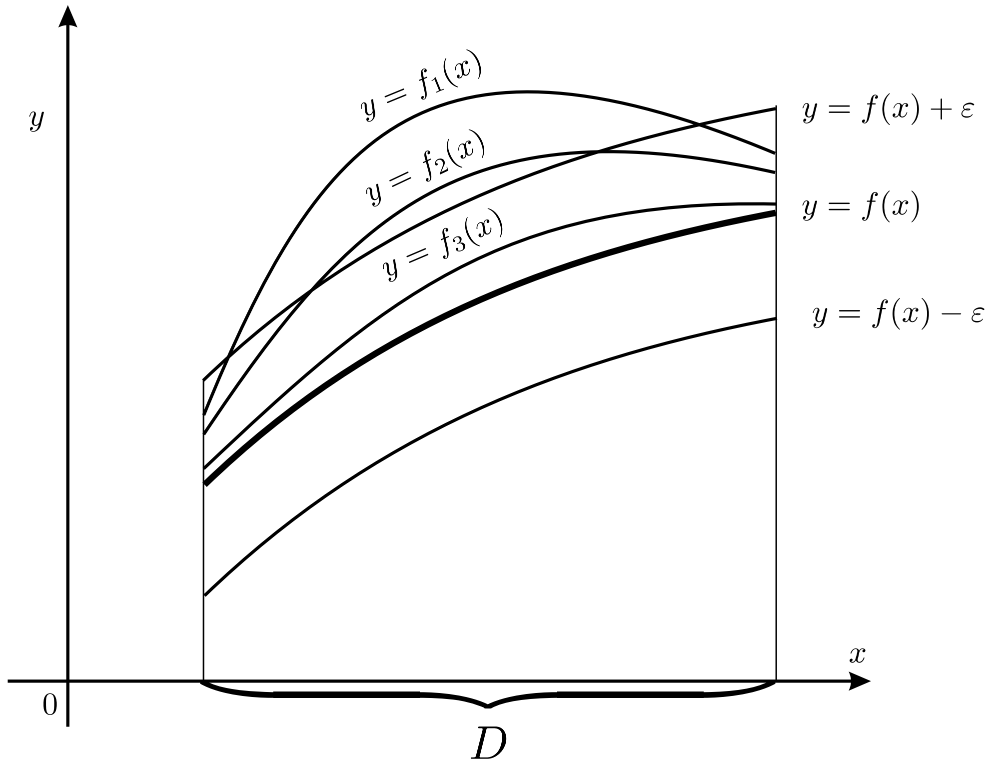
$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad x \in D.$$

Toties no funkciju virknes konverğences kopā D vēl neseko tās vienmērīgā konverğence šajā kopā. Ja funkciju virkne konverğē kopā D, tad tā konverğē katrā šīs kopas punktā $x_0 \in D$. Tātad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē naturāls skaitlis N (atkarīgs no ε), ka visiem numuriem $n > N$ izpildās nevienādība

$$\big|f_n(x_0) - f(x_0)\big| < \varepsilon.$$

Ja izvēlēsimies kopas D citu punktu un to pašu ε, tad arī šoreiz eksistē naturāls skaitlis N, bet šis naturālais skaitlis var būt cits (tā izvēle nav atkarīga tikai no ε izvēles, bet arī no kopas D punkta izvēles). Proti, katram kopas D punktam var eksistēt savs naturālais skaitlis N neatkarīgi no tā, ka ε katru reizi ir viens un tas pats. Ja var atrast visiem kopas D punktiem kopīgu N (atkarīgu tikai no ε), tad funkciju virkne kopā D vienmērīgi konverğē uz robežfunkciju $f(x)$. Var būt gadījumi, kad šāda kopīga N nav.

No funkciju virknes $\big(f_n(x)\big)$ vienmērīgās konverğences kopā D izriet, ka funkciju, kuru indeksi ir lielāki par N, grafiki visiem $x \in D$ atrodas joslā starp funkciju $y = f(x) - \varepsilon$, $y = f(x) + \varepsilon$ grafikiem (4.1. zīm.).



4.1. zīm.

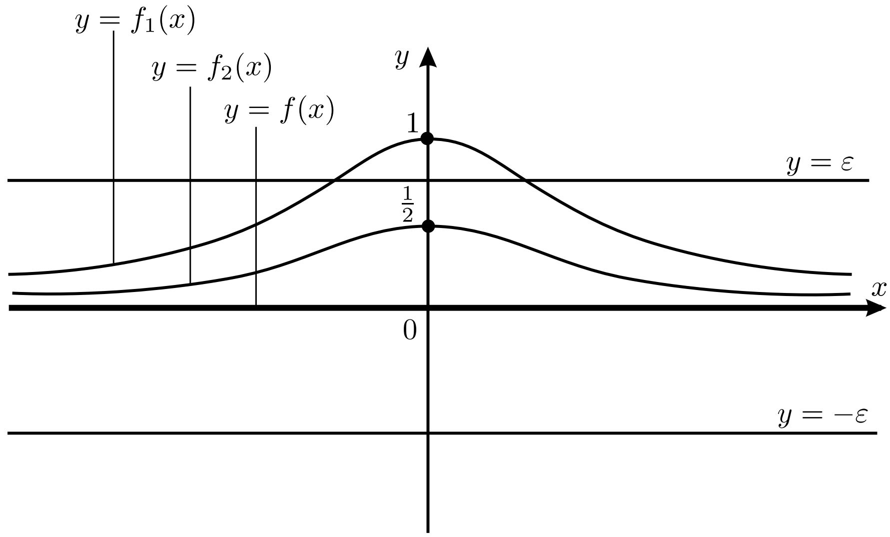
Piemēram, funkciju virkne

$$\left(\frac{1}{x^2+n}\right)$$

vienmērīgi konverģē uz robežfunkciju $f(x) = 0$ visiem $x \in \mathbb{R}$. Šai virknei

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2+1}, f_2(x) = \frac{1}{x^2+2}, f_3(x) = \frac{1}{x^2+3}, \ldots .$$

Kādu arī neizvēlētos $\varepsilon > 0$, var atrast naturālu skaitli N, ka visu funkciju, kuru numuri $n > N$, grafiki atrodas joslā starp taisnēm $y = -\varepsilon$ un $y = \varepsilon$ visiem $x \in \mathbb{R}$ (4.2. zīm.).



4.2. zīm.

4.4. definīcija. Funkciju rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in E$ sauc par **vienmērīgi konverğentu funkciju rindu** kopā $D \subset E$, ja šajā kopā vienmērīgi konverğē atbilstošā parciālsummu virkne $\big(S_n(x)\big)$.

Tātad funkciju rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ kopā D vienmērīgi konverğē uz rindas summu $S(x)$, ja jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē naturāls skaitlis N, ka visiem numuriem $n > N$ un visiem $x \in D$ izpildās nevienādība

$$\big|S(x) - S_n(x)\big| < \varepsilon$$

jeb

$$\big|R_n(x)\big| < \varepsilon.$$

Acīmredzami no funkciju virknes (vai funkciju rindas) vienmērīgās konverğences kopā D seko tās vienmērīgā konverğence kopā $D_1 \subset D$.

4.5. definīcija. Funkciju rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in D$ sauc par **absolūti konverğentu rindu punktā** $x_0 \in D$, ja atbilstošā skaitļa rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ absolūti konverğē.

4.6. definīcija. Funkciju rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in D$ sauc par **absolūti konverğentu rindu kopā** $D_1 \subset D$, ja funkciju rinda absolūti konverğē katrā kopas D_1 punktā, pie tam D_1 sauc par funkciju rindas **absolūtās konverğences kopu**.

4.3. Funkciju rindas vienmērīgās konverğences pazīmes

4.1. teorēma. [**Veierštrāsa pazīme**]

Ja eksistē konverğenta pozitīvu locekļu rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$*, ka visiem* $x \in D$ *un visiem numuriem* n *izpildās nevienādība* $|f_n(x)| \leq a_n$*, tad funkciju rinda* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *kopā* D *konverğē absolūti un vienmērīgi.*

► Tā kā visiem $x \in D$ $|f_n(x)| \leq a_n$ un skaitļu rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverğē, tad funkciju rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ konverğē absolūti katrā kopas D punktā, tātad arī kopā D.

Novērtēsim funkciju rindas atlikuma moduli

$$\begin{aligned}\big|R_n(x)\big| = \big|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots\big| \leq \big|f_{n+1}(x)\big| + \big|f_{n+2}(x)\big| + \cdots < \\ < a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots = r_n,\end{aligned}$$

kr r_n - pozitīvu locekļu rindas atlikums.

Tā kā rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverğē, tad eksistē galīga robeža $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, bet tas nozīmē, ka jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē tāds naturāls skaitlis N, ka visiem numuriem $n > N$ izpildās nevienādība

$$|S - S_n| < \varepsilon \ \text{ jeb } \ r_n < \varepsilon.$$

Tā kā

$$\big|R_n(x)\big| < r_n,$$

tad

$$\big|R_n(x)\big| < \varepsilon$$

visiem $x \in D$ un visiem $n > N$. Tādējādi funkciju rinda kopā D konverğē ne tikai absolūti, bet arī vienmērīgi. ◄

4.1. uzdevums. Pamatot funkciju rindas vienmērīgo konverğenci norādītajā intervālā

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}, \qquad x \in \mathbb{R};$$

$$b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{2^n}, \qquad x \in [-1,1];$$

$$c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+x^2}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

a) Izvēlēsimies pozitīvu locekļu konverğentu rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Visiem $x \in \mathbb{R}$ un visiem numuriem n izpildās nevienādība

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}.$$

Tātad dotā funkciju rinda konverğē absolūti un vienmērīgi visiem $x \in \mathbb{R}$.

b) Šoreiz pozitīvu locekļu konverğenta rinda ir $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$. Visiem $x \in [-1,1]$ un visiem numuriem n izpildās nevienādība

$$\frac{\sqrt{1-x^{2n}}}{2^n} \le \frac{1}{2^n}$$

(modulis kreisajai pusei šoreiz nav obligāts). Tātad funkciju rinda konverğē absolūti un vienmērīgi visiem $x \in [-1,1]$.

c) Pozitīvu locekļu konverğenta rinda ir $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Visiem $x \in \mathbb{R}$ un visiem numuriem n izpildās nevienādība

$$\frac{n}{n^3+x^2} \le \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}.$$

Tāpēc dotā funkciju rinda absolūti un vienmērīgi konverğē visiem $x \in \mathbb{R}$.

4.4. Vienmērīgi konverğentu funkciju virkņu un funkciju rindu īpašības

1. īpašība. *Ja kopā D nepārtrauktu funkciju virkne $\big(f_n(x)\big)$ šajā kopā konverğē vienmērīgi, tad robežfunkcija $f(x)$ ir kopā D nepārtraukta funkcija.*

► Tā kā virkne $\big(f_n(x)\big)$ kopā D konverğē vienmērīgi uz robežfunkciju $f(x)$, tad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē naturāls skaitlis N, ka visiem $x \in D$ un visiem numuriem $n > N$ izpildās nevienādība

$$\big|f_n(x) - f(x)\big| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.1}$$

Tā kā funkcijas $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ir nepārtrauktas kopā D, tad katra no šīm funkcijām ir nepārtraukta kopas D patvaļīgā punktā x_0. Tas nozīmē, ka iepriekš izvēlētajam $\varepsilon > 0$ eksistē tāds $\delta > 0$, ka visiem $x \in D$, kuri apmierina nevienādību $|x - x_0| < \delta$, izpildās nevienādība

$$\big|f_n(x) - f_n(x_0)\big| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.2}$$

Tā kā nevienādība (4.1) izpildās visiem $x \in D$, tad tā izpildās arī punktā $x_0 \in D$, t.i.,

$$\big|f_n(x_0) - f(x_0)\big| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.3}$$

Tagad apskatīsim $x \in D$, kuriem $|x - x_0| < \delta$, un $n > N$. Šādiem x un n novērtēsim starpību $f(x) - f(x_0)$

$$\begin{aligned}\big|f(x) - f(x_0)\big| &= \Big|\big(f(x) - f_n(x)\big) + \big(f_n(x) - f_n(x_0) + \big(f_n(x_0) - f(x_0)\big)\big)\Big| \le \\ &\le \big|f(x) - f_n(x)\big| + \big|f_n(x) - f_n(x_0)\big| + \big|f_n(x_0) - f(x_0)\big| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

(tika izmantota moduļa trijstūra īpašība un nevienādības (4.1), (4.2), (4.3)).

Tātad visiem $x \in D$, kuriem $|x - x_0| < \delta$, izpildās nevienādība

$$\big|f(x) - f(x_0)\big| < \varepsilon.$$

Tas nozīmē, ka robežfunkcija $f(x)$ ir nepārtraukta kopas D patvaļīgā punktā x_0. Tādējādi šī funkcija ir nepārtraukta kopā D. ◄

Sekas. *Ja kopā D nepārtrauktu funkciju rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ šajā kopā konverģē vienmērīgi, tad tās summa $S(x)$ ir nepārtraukta kopā D funkcija.*

▶ Apskatīsim dotās rindas parciālsummu virkni $\big(S_n(x)\big)$. Šīs virknes locekļi ir kopā D nepārtrauktas funkcijas (kā galīga skaita nepārtrauktu funkciju summa). Tā kā funkciju rinda kopā D konverģē vienmērīgi, tad šajā kopā vienmērīgi konverģē tai atbilstošā virkne $\big(S_n(x)\big)$. Saskaņā ar 1. īpašību virknes robežfunkcija $S(x)$ ir nepārtraukta kopā D funkcija. Funkcija $S(x)$ ir arī dotās funkciju rindas summa. ◀

2. īpašība. *Ja slēgtā intervālā $[a, b]$ nepārtrauktu funkciju virkne $\big(f_n(x)\big)$ šajā intervālā vienmērīgi konverģē, tad ir spēkā vienādība*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx$$

jeb

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx,$$

kur $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in [a, b]$.

▶ Saskaņā ar 1. īpašību robežfunkcija $f(x)$ ir nepārtraukta, tātad integrējama intervālā $[a, b]$. Tā kā

$$\big(f_n(x)\big) \rightrightarrows f(x), \quad x \in [a, b],$$

tad jebkuram $\varepsilon > 0$ eksistē naturāls skaitlis N, ka visiem $x \in [a, b]$ un visiem numuriem $n > N$ izpildās nevienādība

$$\big|f_n(x) - f(x)\big| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Apskatīsim

$$\left|\int\limits_a^b f_n(x)dx - \int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b \big|f_n(x) - f(x)\big|dx <$$

$$< \frac{\varepsilon}{b-a} \int\limits_a^b dx = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Nevienādībā

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon$$

pāriesim pie robežas, kad $n \to \infty$. Iegūsim

$$\left|\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| \leq \varepsilon.$$

Skaidrs, ka šī nevienādība izpildās visām ε vērtībām tikai tad, kad nenegatīvā konstante

$$\left|\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right|$$

ir nulle. Tādējādi

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx. \quad ◀$$

Sekas. *Ja slēgtā intervālā* $[a,b]$ *nepārtrauktu funkciju rinda* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *šajā intervālā vienmērīgi konverģē, tad ir spēkā vienādība*

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx$$

jeb

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b S(x)dx,$$

kur $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, $x \in [a,b]$.

▶Saskaņā ar noteiktā integrāļa linearitāti

$$\sum_{n=1}^{k}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{k} f_n(x)dx = \int_a^b S_k(x)dx.$$

Šajā vienādībā pāriesim pie robežas, kad $k \to \infty$.

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \int_a^b f_n(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b S_k(x)dx$$

jeb

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b \lim_{k\to\infty} S_k(x)dx.$$

No tā seko, ka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b S(x)dx. \quad \blacktriangleleft$$

(Tika pielietota 2. īpašība.)

3. īpašība. *Ja slēgtā intervālā* $[a, b]$ *nepārtraukti diferencējamu funkciju virkne* $\big(f_n(x)\big)$ *šajā intervālā konverģē uz robežfunkciju* $f(x)$ *un virkne* $\big(f_n'(x)\big)$ *intervālā* $[a, b]$ *vienmērīgi konverģē uz* $F(x)$*, tad*

$$f'(x) = F(x), \quad x \in [a, b]$$

jeb

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \Big(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big)', \quad x \in [a, b].$$

Tā kā funkciju virkne $\big(f_n'(x)\big)$ intervālā $[a, b]$ vienmērīgi konverģē, tad saskaņā ar 2. īpašību

$$\int_a^x \lim_{n\to\infty} f_n'(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)dt,$$

kur $x \in [a, b]$.

Šo vienādību uzrakstīsim šādi:

$$\int_a^x F(t)dt = \lim_{n\to\infty} \big(f_n(x) - f_n(a)\big)$$

jeb

$$\int_a^x F(t)dt = \lim_{n\to\infty} f_n(x) - \lim_{n\to\infty} f_n(a),$$

c.v.,

$$\int_a^x F(t)dt = f(x) - f(a).$$

Starp citu, funkcija $F(x)$ ir nepārtraukta, tātad arī integrējama jebkurā intervālā $[a, x] \subset [a, b]$. Tas nozīmē, ka integrālis ar mainīgu augšējo robežu ir šajā intervālā diferencējama funkcija, pie tam

$$\left(\int_a^x F(t)dt \right)' = F(x).$$

Tādējādi ir diferencējama arī vienādības

$$\int_a^x F(t)dt = f(x) - f(a)$$

labā puse, t.i., funkcija $f(x)$, pie tam

$$\left(\int_a^x F(t)dt \right)' = \big(f(x) - f(a)\big)'$$

jeb

$$F(x) = f'(x), \quad x \in [a, b]. \quad ◀$$

Sekas. *Ja slēgtā intervālā $[a, b]$ nepārtraukti diferencējamu funkciju rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ šajā intervālā konverģē un rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ intervālā $[a, b]$ vienmērīgi konverģē, tad visiem $x \in [a, b]$ ir spēkā vienādība*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

▶ Tā kā rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ intervālā $[a, b]$ konverģē vienmērīgi, tad šajā intervālā vienmērīgi konverģē parciālsummu virkne $\big(S_n'(x)\big)$. Saskaņā ar 3. īpašību

$$\Big(\lim_{n\to\infty} S_n(x) \Big)' = \lim_{n\to\infty} S_n'(x)$$

jeb

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x), \quad x \in [a, b]. \quad ◀$$

4.1. piezīme. Šo īpašību sekas nozīmē, ka atbilstošas rindas vienmērīgā konverģence ir pietiekamais nosacījums, lai rindas summa būtu nepārtraukta funkcija, lai rindu drīkstētu pa locekļiem integrēt vai pa locekļiem atvasināt.

4.2. uzdevums. Pierādīt, ka funkcija $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$ ir nepārtraukta visu reālo skaitļu kopā. Atrast $f(0)$ un $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Funkciju rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$ konverģē absolūti un vienmērīgi visiem $x \in \mathbb{R}$, jo

$$\left|\frac{\cos nx}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n}$$

visiem $x \in \mathbb{R}$ un visiem numuriem n. Pozitīvu locekļu rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konverģē kā ģeometriskā rinda. Dotās funkciju rindas locekļi ir kopā $\mathbb{R}$ nepārtrauktas funkcijas, tāpēc tās summa $f(x)$ ir kopā $\mathbb{R}$ nepārtraukta funkcija. Ievietosim $x = 0$ un iegūsim

$$f(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 0}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

Izmantojām ģeometriskās rindas summas aprēķināšanas formulu $S = \frac{a_1}{1-q}$, kur $a_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$. Tagad ievietosim $x = \frac{\pi}{2}$ un iegūsim

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\frac{\pi}{2}}{2^n} = -\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} - \frac{1}{2^6} + \cdots = \frac{-\frac{1}{2^2}}{1 + \frac{1}{2^2}} = \frac{-\frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4}} = \frac{-1}{5}.$$

Izmantojām ģeometriskās rindas summas aprēķināšanas formulu $S = \frac{a_1}{1-q}$, kur $a_1 = -\frac{1}{2^2}$, $q = -\frac{1}{2^2}$.

4.3. uzdevums. Pierādīt, ka funkcija $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ ir nepārtraukta reālo pozitīvo skaitļu kopā $\mathbb{R}^+$. Aprēķināt $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)dx$.

Apskatīsim pozitīvu locekļu rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(1+\varepsilon)^n}$, kur $\varepsilon > 0$. Pēc Dalambēra pazīmes šī rinda konverģē, jo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{(1+\varepsilon)^{n+1}}}{\frac{n}{(1+\varepsilon)^n}} = \frac{1}{1+\varepsilon} \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \frac{1}{1+\varepsilon} < 1.$$

Funkciju rindas locekļi apmierina nevienādību

$$ne^{-nx} = \frac{n}{e^{nx}} \leq \frac{n}{(1+\varepsilon)^n}$$

visiem numuriem n un visiem x, kuriem izpildās nevienādība

$$e^{nx} \geq (1+\varepsilon)^n.$$

Atrisinot šo nevienādību, iegūsim, ka $x \geq \ln(1+\varepsilon)$. Tā kā $\varepsilon > 0$ un to var izvēlēties pēc patikas tuvu nullei, tad $x > 0$ un arī pēc patikas tuvs nullei. Dotās funkciju rindas locekļi kopā $\mathbb{R}^+$ ir nepārtrauktas funkcijas, tāpēc rinda konverģē absolūti un vienmērīgi visiem $x \in \mathbb{R}^+$. Rindas summa $f(x)$ ir kopā $\mathbb{R}^+$ nepārtraukta funkcija, pie tam šo rindu drīkst pa locekļiem integrēt, piemēram, intervālā $[\ln 2, \ln 3]$. Integrējot šo rindu, iegūsim

$$\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)dx = \int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \left(\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx} \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} ne^{-nx} dx =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(-e^{-nx} \right) \Bigg|_{\ln 2}^{\ln 3} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{-n} - 3^{-n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} \right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

jo rindas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ summa ir

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1,$$

bet rindas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Abas šīs rindas ir ģeometriskās rindas ar $|q| < 1$.

4.4. uzdevums. Pierādīt, ka reālo skaitļu kopā $\mathbb{R}$ funkcija

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$$

ir nepārtraukta un tai eksistē nepārtraukts atvasinājums.

Funkciju rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ kopā $\mathbb{R}$ konverģē absolūti un vienmērīgi, jo visiem $x \in \mathbb{R}$ un visiem numuriem n izpildās nevienādība

$$\left| \frac{\sin nx}{n^3} \right| \leq \frac{1}{n^3},$$

pie tam pozitīvu locekļu rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ konverģē. No dotās funkciju rindas locekļu atvasinājumiem izveidosim rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$. Šī rinda kopā $\mathbb{R}$ arī konverģē absolūti un vienmērīgi, jo visiem $x \in \mathbb{R}$ un visiem numuriem n izpildās nevienādība

$$\left| \frac{\cos nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2},$$

pie tam pozitīvu locekļu rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konverģē. Abu funkciju rindu locekļi ir kopā $\mathbb{R}$ nepārtrauktas funkcijas, tāpēc šajā kopā ir nepārtrauktas šo rindu summas. Pie tam rindas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ summa ir $f'(x)$, jo rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ drīkst pa locekļiem atvasināt. Tādējādi kopā $\mathbb{R}$ ir nepārtraukta funkcija $f(x)$ un šai funkcijai kopā $\mathbb{R}$ eksistē nepārtraukts atvasinājums $f'(x)$.

5. nodaļa

PAKĀPJU RINDAS

5.1. Pakāpju rindas jēdziens. Ābela teorēma

5.1. definīcija. Par **pakāpju rindu** sauc funkciju rindu, kuras locekļi ir pakāpes funkcijas ar veseliem nenegatīviem kāpinātājiem, t.i., rindu

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

kur $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ reāli skaitļi - pakāpju rindas koeficienti.

Piemēram, $1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$ ir pakāpju rinda, kura konverģē intervālā $(-1, 1)$.

Parādīsim, ka pakāpju rindas konverģences kopa ir intervāls, kurš simetrisks attiecībā pret koordinātu sākumpunktu. Starp citu, ir pakāpju rindas, kuras konverģē tikai punktā $x = 0$, bet ir rindas, kuras konverģē visu reālo skaitļu kopā $\mathbb{R}$.

5.1. teorēma. [**Ābela**[1] **teorēma**]

Ja pakāpju rinda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *konverģē punktā* $x_0 \neq 0$, *tad tā absolūti konverģē visiem* x, *kuriem izpildās nevienādība* $|x| < |x_0|$, *t.i., intervālā* $\big(-|x_0|, |x_0|\big)$.

Ja pakāpju rinda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *diverģē punktā* x_1, *tad tā diverģē visiem* x, *kuriem izpildās nevienādība* $|x| > |x_1|$, *t.i., ārpus intervāla* $\big[-|x_1|, |x_1|\big]$.

[1] Nils Ābels (1802-1829) - norvēģu matemātiķis.

▶ Tā kā pakāpju rinda

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{5.1}$$

konverģē punktā $x_0 \neq 0$, tad atbilstošā skaitļu rinda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ konverģē un tai izpildās konverģences nepieciešamais nosacījums, t.i.,

$$\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0.$$

Tas nozīmē, ka $(a_n x_0^n)$ ir ierobežota (kā konverģenta) virkne. Tātad eksistē tāds $M > 0$, ka visiem numuriem n izpildās nevienādība

$$|a_n x_0^n| \leq M.$$

Doto pakāpju rindu uzrakstīsim šādi:

$$a_0 + a_1 x_0 \left(\frac{x}{x_0}\right) + a_2 x_0^2 \left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \cdots + a_n x_0^n \left(\frac{x}{x_0}\right)^n + \cdots \tag{5.2}$$

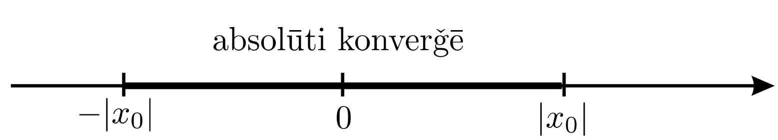
un izveidosim rindu no tās locekļu moduļiem, t.i., rindu

$$|a_0| + |a_1 x_0| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right| + \left|a_2 x_0^2\right| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \cdots + |a_n x_0^n| \cdot \left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \cdots \tag{5.3}$$

Izveidosim vēl vienu rindu

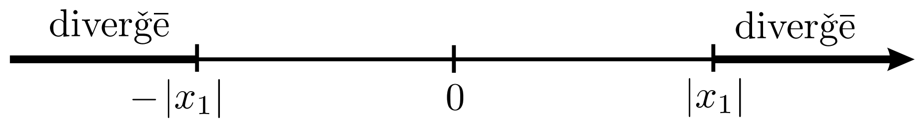
$$M + M\left|\frac{x}{x_0}\right| + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \cdots + M\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \cdots \tag{5.4}$$

Rinda (5.4) ir ģeometriska rinda ar $q = \left|\frac{x}{x_0}\right|$, kura konverģē, ja $q = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$, t.i., ja $|x| < |x_0|$. Saskaņā ar pozitīvu locekļu rindu salīdzināšanas pazīmi konverģē rinda (5.3), bet rinda (5.2) absolūti konverģē šādām x vērtībām. Tādējādi rinda (5.1) absolūti konverģē visiem x, kuriem izpildās nevienādība $|x| < |x_0|$ (5.1. zīm.).



5.1. zīm.

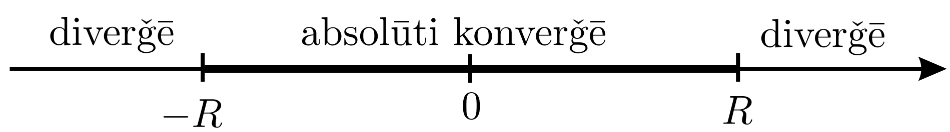
Ābela teorēmas otro daļu pierādīsim no pretējā, t.i., pieņemsim, ka eksistē tāds skaitlis x_0, kuram izpildās nevienādība $|x_0| > |x_1|$ un pakāpju rinda (5.1) konverğē punktā x_0. Acīmredzami $x_0 \neq 0$. Saskaņā ar Ābela teorēmas pirmo daļu pakāpju rinda absolūti konverğē visiem x, kuriem izpildās nevienādība $|x| < |x_0|$, tai skaitā, arī punktā x_1. Tika iegūta pretruna ar doto, t.i., ka pakāpju rinda punktā x_1 diverğē. Atliek secināt, ka pieņēmums ir nepareizs, un pakāpju rinda (5.1) diverğē visiem x, kuriem izpildās nevienādība $|x| > |x_1|$ (5.2. zīm.).



5.2. zīm.

5.2. Pakāpju rindas konverğences rādiuss un konverğences intervāls

Katra pakāpju rinda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konverğē vismaz punktā $x = 0$. Dažām pakāpju rindām šis punkts ir vienīgais, kurā tā konverğē. Daudzas pakāpju rindas konverğē visā reālo skaitļu kopā $\mathbb{R}$. Apskatīsim pakāpju rindas, kuras konverğē vairāk nekā punktā $x = 0$, bet ne visā reālo skaitļu kopā $\mathbb{R}$. No Ābela teorēmas izriet, ka šādai pakāpju rindai eksistē tāds pozitīvs skaitlis R, ka pakāpju rinda absolūti konverğē visiem x, kuriem izpildās nevienādība $|x| < R$, t.i., intervālā $(-R, R)$. Šī intervāla ārpusē pakāpju rinda diverğē (5.3. zīm.).



5.3. zīm.

Rindas raksturu punktos $x = -R$, $x = R$ pēta papildus. Šajos punktos pakāpju rinda var gan konverğēt, gan diverğēt, pie tam vienā no šiem punktiem rinda var konverğēt, bet otrā - diverğēt.

5.2. definīcija. Intervālu $(-R, R)$ sauc par pakāpju rindas $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ **konverğences intervālu**, bet R - **konverğences rādiusu**.

Lai atrastu konverğences rādiusu, apskatīsim rindu no pakāpju rindas locekļu moduļiem, t.i., rindu

$$|a_0| + |a_1 x| + \left|a_2 x^2\right| + \cdots + |a_n x^n| + \cdots$$

un šai rindai pielietosim rindu konverğences Dalambēra pazīmi. Atradīsim

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|a_{n+1} x^{n+1}\right|}{|a_n x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1.$$

Tātad

$$|x| < \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|.$$

Tādējādi

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$$

(protams, ja šāda robeža eksistē).

Ja būtu lietojuši rindu konverğences Košī pazīmi, tad iegūtu, ka

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Kad esam aprēķinājuši pakāpju rindas konverğences rādiusu R, tad reizē esam arī noteikuši tās konverğences intervālu $(-R, R)$.

Lai noteiktu rindas raksturu konverğences intervāla galapunktos, pēta uz konverğenci skaitļu rindas

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n R^n \quad \text{un} \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

5.1. piezīme.

1. Ja pakāpju rinda konverğē tikai punktā $x = 0$, tad uzskata, ka konverğences rādiuss $R = 0$.
2. Ja pakāpju rinda konverğē visu reālo skaitļu kopā, tad uzskata, ka konverğences rādiuss $R = \infty$.

3. Nosakot pakāpju rindas konverģences kopu, parasti nelieto konverģences rādiusa aprēķināšanas formulu, bet, lietojot, piemēram, Dalambēra pazīmi, atrod pakāpju rindas konverģences intervālu.

5.1. uzdevums. Noteikt pakāpju rindu konverģences kopas

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n3^n}, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2},$$

$$c)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}, \qquad d)\ \sum_{n=0}^{\infty}n!x^n.$$

a) Pakāpju rindas vispārīgais loceklis

$$u_n(x)=\frac{x^n}{n3^n},$$

bet

$$u_{n+1}(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}.$$

Atradīsim robežu

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}}{\frac{x^n}{n3^n}}\right|=\frac{|x|}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\frac{|x|}{3}<1.$$

Atrisināsim nevienādību $\frac{|x|}{3}<1$ un iegūsim konverģences intervālu $(-3,3)$ (konverģences rādiuss $R=3$). Izpētīsim pakāpju rindas raksturu konverģences intervālā galapunktos.

Ja $x=-3$, tad iegūsim skaitļu rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, kura konverģē, pie tam nosacīti konverģē.

Ja $x=3$, tad iegūsim diverģentu skaitļu rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ (harmoniskā rinda). Tādējādi pakāpju rindas konverģences kopa ir intervāls $[-3,3)$.

b) Šoreiz

$$u_n(x)=\frac{x^n}{n^2},\quad u_{n+1}(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}.$$

Robeža

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{x^n}{n^2}}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=|x|<1.$$

Konverģences intervāls ir $(-1,1)$, bet konverģences rādiuss $R=1$.
Ja $x=-1$, tad skaitļu rinda $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ absolūti konverģē.
Ja $x=1$, tad arī iegūsim konverģentu pozitīvu locekļu rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Dotās pakāpju rindas konverģences kopa ir slēgts intervāls $[-1,1]$.

c) Dotajai pakāpju rindai

$$u_n(x)=\frac{x^n}{n!},\quad u_{n+1}(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Atradīsim robežu

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0<1$$

visiem x. Tādējādi pakāpju rinda konverģē visiem $x\in(-\infty,+\infty)$. Pakāpju konverģences rādiuss $R=\infty$.

d) Šoreiz

$$u_n(x)=nx^n,\quad u_{n+1}(x)=(n+1)x^{n+1}.$$

Robeža

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}(n+1)=\infty,$$

ja $x\neq 0$. Tādējādi šī pakāpju rinda konverģē tikai punktā $x=0$, tās konverģences rādiuss $R=0$.

5.3. Pakāpju rindas vienmērīgā konverģence

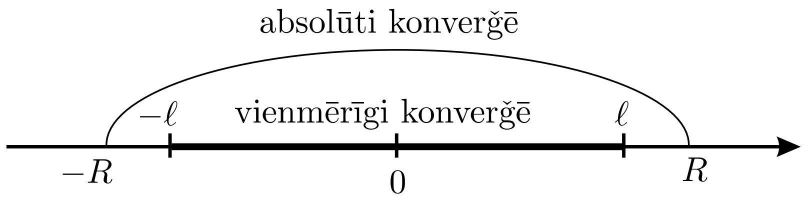
5.2. teorēma. *Pakāpju rinda $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ konverģē absolūti un vienmērīgi jebkurā intervālā $[-\ell,\ell]$, kurš iekļaujas tās konverģences intervālā $(-R,R)$.*

► Tā kā pakāpju rinda $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ absolūti konverģē intervālā $(-R,R)$, tad tā absolūti konverģē šī intervāla punktā $x=\ell$ $(0<\ell<R)$. Tātad

skaitļu rinda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|\ell^n$ konverğē. Visiem x, kuriem $|x| \leq \ell$, un visiem numuriem n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ izpildās nevienādība

$$|a_n x^n| \leq |a_n|\ell^n.$$

Saskaņā ar Veierštrāsa pazīmi pakāpju rinda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absolūti un vienmērīgi konverğē visiem x, kuriem $-\ell \leq x \leq \ell$. (5.4. zīm.) ◄



5.4. zīm.

5.2. piezīme.

1. Tā kā pakāpju rindas locekļi ir nepārtrauktas funkcijas tās vienmērīgās konverğences intervālā $[-\ell, \ell]$, tad pakāpju rindas summa ir šajā intervālā nepārtraukta funkcija. Pakāpju rindu drīkst pa locekļiem integrēt. Piemēram, visiem $x \in (-R, R)$ izpildās vienādība
$$\int\limits_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

2. Tā kā pakāpju rindai $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ (iegūta atvasinot pakāpju rindas $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ locekļus) konverğences intervāls arī ir $(-R, R)$, tad tā konverğē vienmērīgi intervālā $[-\ell, \ell]$. Tāpēc pakāpju rindu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ drīkst pa locekļiem atvasināt, t.i.,
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad x \in (-R, R).$$

3. Integrējot (vai atvasinot) pakāpju rindu, konverğences intervāls nemainās. Rindas raksturs var mainīties tikai konverğences intervāla galapunktos, t.i., punktos $x = -R$ un $x = R$. Atvasinot

pakāpju rindu, konverģences kopa var sašaurināties uz galapunktu rēķina, bet integrējot - paplašināties.

5.4. Pakāpju rinda pēc $(x - x_0)$pakāpēm

Iepriekš apskatījām pakāpju rindu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, t.i., pakāpju rindu pēc x pakāpēm. Tomēr bieži nākas sastapties ar pakāpju rindu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, t.i., pakāpju rindu pēc $(x - x_0)$ pakāpēm. Apzīmēsim $x - x_0 = z$ un iegūsim pakāpju rindu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Zinot šīs pakāpju rindas konverģences intervālu $-R < z < R$, var atrast pakāpju rindas $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ konverģences intervālu. Tam nolūkam atrisināsim (attiecībā pret x) nevienādību

$$-R < x - x_0 < R$$

un iegūsim, ka

$$-R + x_0 < x < R + x_0.$$

Tādējādi pakāpju rindas pēc $(x - x_0)$ pakāpēm konverģences intervāls ir $(-R + x_0, R + x_0)$.

5.2. uzdevums. Noteikt pakāpju rindu konverģences kopas

$a)$ $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-5)^n}{2^n}$,

$b)$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n^2}$.

a) Dotajai pakāpju rindai

$$u_n(x) = \frac{(x-5)^n}{2^n}, \quad u_{n+1}(x) = \frac{(x-5)^{n+1}}{2^{n+1}}.$$

Atradīsim robežu

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(x-5)^{n+1}}{2^{n+1}}}{\frac{(x-5)^n}{2^n}} \right| = \frac{|x-5|}{2} < 1.$$

Atrisinot nevienādību $\frac{|x-5|}{2} < 1$, iegūsim pakāpju rindas konverğences intervālu $3 < x < 7$. Atliek noskaidrot konverğences raksturu šī intervāla galapunktos. Ja $x = 3$, tad iegūsim skaitļu rindu $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$, kura diverğē. Ja $x = 7$, tad arī iegūsim diverğentu skaitļu rindu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + \cdots$. Tādējādi pakāpju rindas konverğences kopa sakrīt ar šīs rindas konverğences intervālu un ir intervāls $(3, 7)$.

b) Šoreiz

$$u_n(x) = \frac{(x+1)^n}{n^2}, \quad u_{n+1}(x) = \frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)^2}$$

un

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{(x+1)^n}{n^2}}\right| = |x+1| \lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = |x+1| < 1.$$

Pakāpju rindas konverğences intervāls ir $-2 < x < 0$.

Ja $x = -2$, tad iegūsim absolūti konverğentu skaitļu rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

Ja $x = 0$, tad arī iegūsim konverğentu skaitļu rindu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$. Tādējādi pakāpju rindas konverğences kopa ir slēgts intervāls $[-2, 0]$.

6. nodaļa

FUNKCIJU IZVIRZĪJUMI PAKĀPJU RINDĀS

6.1. Funkcijas izvirzījuma pakāpju rindā jēdziens. Teilora rinda

Apskatīsim intervālā $(-R, R)$ definētu funkciju $f(x)$ un teiksim, ka šo funkciju minētajā intervālā var izvirzīt pakāpju rindā, ja eksistē tāda pakāpju rinda $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, kura konverģē šajā intervālā, pie tam uz funkciju $f(x)$. Tātad visiem $x \in (-R, R)$ izpildās vienādība

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

6.1. teorēma. *Ja funkciju $f(x)$ intervālā $(-R, R)$ var izvirzīt pakāpju rindā $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, tad šīs rindas koeficienti*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

▶ Tā kā funkciju $f(x)$ intervālā $(-R, R)$ var izvirzīt pakāpju rindā, tad visiem $x \in (-R, R)$ ir spēkā vienādība

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Saskaņā ar pakāpju rindas vienmērīgās konverģences īpašībām $f(x)$ - nepārtraukta minētajā intervālā funkcija, pakāpju rindu drīkst pa locekļiem atvasināt. Atvasinot pakāpju rindu, atkal tiek iegūta pakāpju rinda ar tādu pašu konverğences intervālu. Tāpēc iegūtās rindas summa $f'(x)$ ir intervālā $(-R, R)$ nepārtraukta funkcija un šo pākāpju rindu drīkst pa locekļiem atvasināt. Tādējādi sākotnējo pakāpju rindu $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ intervālā $(-R, R)$ drīkst bezgalīgi daudz reižu pa locekļiem atvasināt, pie tam katras iegūtās pakāpju rindas summa ir šajā intervālā nepārtraukta funkcija.

Vienādībā

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

ievietosim $x = 0$. Iegūsim $f(0) = a_0$. Tā kā

$$f'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots + n a_n x^{n-1} + \cdots,$$

tad, ievietojot $x = 0$, iegūsim $f'(0) = a_1$. Šo procesu turpinot bezgalīgi daudz reižu, iegūsim

$$\begin{aligned} &f''(0) = 2a_2, \\ &f'''(0) = 3 \cdot 2 \cdot a_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &f^{(n)}(0) = n(n-1)\cdots 1 a_n, \ldots \end{aligned}$$

Tādējādi

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \quad \blacktriangleleft$$

6.1. piezīme. Ja funkciju $f(x)$ intervālā $(-R, R)$ var izvirzīt pakāpju rindā, tad visiem $x \in (-R, R)$ ir spēkā vienādība

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Skaidrs, ka funkcija $f(x)$ ir bezgalīgi daudz reižu diferencējama intervālā $(-R, R)$, tai skaitā, arī punktā $x = 0$.

6.1. definīcija. Pakāpju rindu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

sauc par funkcijas $f(x)$ **Teilora rindu**.

Lai funkcijai $f(x)$ varētu sastādīt atbilstošu Teilora rindu, $f(x)$ ir jābūt bezgalīgi daudz reižu diferencējamai funkcijai punktā $x = 0$.

6.2. Funkcijas izvirzījuma Teilora rindā pietiekamais nosacījums

Ja $f(x)$ ir bezgalīgi daudz reižu diferencējama punktā $x = 0$ funkcija, tad tai var sastādīt atbilstošu Teilora rindu. Vienīgi var izrādīties, ka šī rinda konverģē tikai punktā $x = 0$, citiem vārdiem, rinda visur diverģē, izņemot punktu $x = 0$. Ja arī funkcijai $f(x)$ atbilstošā Teilora rinda konverģē kādā intervālā $(-R, R)$, tad par tās summu var nebūt $f(x)$, bet pavisam cita funkcija. Tādos gadījumos sastādīto Teilora rindu nevar uzskatīt par funkcijas $f(x)$ izvirzījumu pakāpju rindā. Atbildi uz jautājumu, kad funkcijai $f(x)$ atbilstošā Teilora rinda ir šīs funkcijas izvirzījums pakāpju rindā, sniedz šāda teorēma.

6.2. teorēma. [**Funkcijas izvirzījuma Teilora rindā pietiekamais nosacījums**]

Ja $f(x)$ ir bezgalīgi daudz reižu diferencējama intervālā $(-R, R)$ funkcija un funkcijas $f(x)$ Teilora formulas atlikuma locekļa $R_n(x)$ robeža, kad $n \to \infty$, ir nulle visiem $x \in (-R, R)$, tad šo funkciju intervālā $(-R, R)$ var izvirzīt Teilora rindā.

► Tā kā funkcija ir bezgalīgi daudz reižu diferencējama intervālā $(-R, R)$, tad varam sastādīt tai atbilstošu Teilora rindu

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots.$$

Funkcijai $f(x)$ uzrakstīsim Teilora formulu

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x),$$

kur $R_n(x)$ - Teilora formulas atlikuma loceklis. Teilora formulu varam uzrakstīt šādi:

$$f(x) = S_n(x) + R_n(x),$$

kur $S_n(x)$ ir Teilora polinoms, bet reizē arī Teilora rindas parciālsumma.

No Teilora formulas izteiksim Teilora rindas parciālsummu

$$S_n(x) = f(x) - R_n(x).$$

Tā kā

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, \quad x \in (-R, R),$$

tad robeža no Teilora formulas labās puses ir $f(x)$. Tātad eksistē robeža no šīs vienādības kreisās puses un arī ir $f(x)$, t.i.,

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x), \quad x \in (-R, R).$$

Tādējādi Teilora rinda konverģē visiem $x \in (-R, R)$, pie tam tās summa ir $f(x)$. ◀

6.2. piezīme.

1. Var pierādīt, ka spēkā šai teorēmai apgrieztais apgalvojums. Tas nozīmē, ka teorēmā minētie nosacījumi ir ne tikai pietiekami, bet arī nepieciešamie nosacījumi, lai funkciju varētu izvirzīt Teilora rindā.
2. Lai intervālā $(-R, R)$ bezgalīgi daudz reižu diferencējamu funkciju izvirzītu šajā intervālā Teilora rindā, vispirms sastāda tai atbilstošu Teilora rindu. Pēc tam uzraksta Teilora formulas atlikuma locekli Lagranža (vai Košī) formā un parāda, ka robeža no tā ir nulle visiem $x \in (-R, R)$.
3. Parasti intervāls, kurā funkciju vajag izvirzīt Teilora rindā, nav dots. Tādos gadījumos atrod sastādītās Teilora rindas konverģences kopu un robežu no Teilora formulas atlikuma locekļa apskata šīs kopas punktos.

6.3. Eksponentfunkcijas $f(x) = e^x$ izvirzījums Teilora rindā

Izvirzīsim Teilora rindā funkciju $f(x) = e^x$. Tam nolūkam atradīsim šīs funkcijas atvasinājumus. Šai funkcijai jebkuras kārtas atvasinājums sakrīt ar pašu funkciju, t.i., $f^{(n)}(x) = e^x$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Funkcijas un tās atvasinājumu vērtība punktā $x = 0$ ir 1. Funkcijai atbilst šāda Teilora rinda

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Lai uzrakstītu Teilora formulas atlikuma locekli $R_n(x)$ Lagranža formā, funkcijas $(n+1)$-ās kārtas atvasinājumu $f^{(n+1)}(x) = e^x$ aprēķināsim punktā

$c = x_0 + \Theta(x - x_0) = \Theta x$, $0 < \Theta < 1$ (šoreiz $x_0 = 0$). Tātad

$$f^{(n+1)}(\Theta x) = e^{\Theta x}$$

un

$$R_{n+1}(x) = \frac{e^{\Theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \Theta < 1.$$

Pēc Dalambēra pazīmes eksponentfunkcijai sastādītā Teilora rinda absolūti konverģē visiem $x \in \mathbb{R}$, jo

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

visiem $x \in \mathbb{R}$.

Visiem $x \in \mathbb{R}$ izpildās rindu konverģences nepieciešamā pazīme

$$\lim_{n\to\infty} u_{n+1}(x) = 0.$$

Konkrēti $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ visiem $x \in \mathbb{R}$. Tāpēc

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = e^{\Theta x} \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

visiem $x \in \mathbb{R}$ (reizinātājs $e^{\Theta x}$ nav atkarīgs no n un katrai x vērtībai pieņem konkrētu skaitlisku vērtību). Tādējādi sastādītā Teilora rinda konverģē, pie tam uz funkciju $f(x) = e^x$, visiem $x \in \mathbb{R}$. Varam rakstīt, ka

$$\boxed{e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.}$$

Ja izvēlēsimies $x = 1$, tad konstante e tiks uzrakstīta kā atbilstošas skaitļu rindas summa, t.i.,

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots.$$

Ja rindu aizstāsim ar kādu tās parciālsummu S_n, tad tuvināti aprēķināsim e vērtību. Tuvinājuma precizitāte ir atkarīga no tā, cik pirmo rindas locekļu satur parciālsumma S_n un cik zīmes aiz komata satur katrs šīs parciālsummas loceklis.

Tuvinājuma precizitātes aprēķināšanai, novērtēsim rindas atlikumu

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots = \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots\right) < \\ &< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots\right) = \frac{1}{(n+1)!}\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}} = \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+2}{n} = \frac{n+2}{(n+1)(n+1)!}. \end{aligned}$$

Ja izvēlēsimies, piemēram, $n = 5$, tad iegūsim skaitļa e tuvinājumu ar precizitāti līdz $0,002$, jo

$$\frac{5+2}{(5+1)(5+1)!} = \frac{7}{6\cdot 6!} < 0,002.$$

Tātad

$$\begin{aligned} e &\approx 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} = \frac{326}{120} = 2,71(6). \end{aligned}$$

Tādējādi $e \approx 2,717$ ar precizitāti līdz $0,002$.

Šādi rīkojoties, var aprēķināt eksponentfunkcijas aptuveno vērtību katrai x vērtībai.

6.4. Funkcijas $f(x) = \sin x$ izvirzījums Teilora rindā

Funkcijai $f(x) = \sin x$ atradīsim tās atvasinājumus.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right), \\ f''(x) &= -\sin x = \sin\left(2\frac{\pi}{2} + x\right), \\ f'''(x) &= -\cos x = \sin\left(3\frac{\pi}{2} + x\right), \\ f^{IV}(x) &= \sin x = \sin\left(4\frac{\pi}{2} + x\right), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(n\frac{\pi}{2} + x\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Funkcijas un tās atvasinājumu vērtības punktā $x = 0$: $f(0) = 0$,

$$f'(0) = 1, f''(0) = 0, f'''(0) = -1, \ldots,$$

Tātad

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{ja} \quad n = 2k, \\ (-1)^k, & \text{ja} \quad n = 2k+1 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Starp citu, ar $f^{(0)}(0)$ sapratīsim $f(0)$. Atbilstošā Teilora rinda ir

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Arī šoreiz pēc Dalambēra pazīmes rinda absolūti konverģē visiem $x \in \mathbb{R}$.

Teilora formulas atlikuma loceklis Lagranža formā ir

$$R_n(x) = \frac{\sin\left((n+1)\frac{\pi}{2} + \theta x\right)}{(n+1)!} x^{n+1}.$$

Visiem $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\sin\left((n+1)\frac{\pi}{2} + \theta x\right) \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right) = 0,$$

jo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

bet $\sin\left((n+1)\frac{\pi}{2} + x\right)$ ir ierobežota funkcija.

Tādējādi

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.}$$

6.3. piezīme. Tā kā $\cos x = (\sin x)'$, tad, atvasinot pa locekļiem uzrakstīto pakāpju rindu, iegūsim

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.}$$

6.5. Funkcijas $f(x) = \ln(1+x)$ izvirzījums Teilora rindā

Vispirms izvirzīsim Teilora rindā dotās funkcijas atvasinājumu

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Ja $|x| < 1$, tad $\frac{1}{1+x}$ var uzskatīt par konverģentas ģeometriskās rindas $(a_1 = 1, q = -x)$ summu. Tāpēc

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, \quad -1 < x < 1.$$

Integrējot pa locekļiem šo pakāpju rindu, iegūsim

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \left(1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^n t^n + \cdots\right) dt$$

jeb

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

$-1 < x < 1$.

Ja $x = -1$, tad iegūsim skaitļu rindu, kura diverģē. Ja ievietosim $x = 1$, tad skaitļu rinda

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n+1} + \cdots$$

nosacīti konverģē, pie tam tā konverģē uz $\ln 2$.

Tādējādi

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots, \quad -1 < x \le 1.}$$

Starp citu, lai parādītu, ka

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n+1} + \cdots,$$

ievēro, ka atbilstošā pakāpju rinda punktā $x = 1$ konverģē, un ka funkcija $\ln(1+x)$ ir nepārtraukta šajā punktā.

Lai tuvināti aprēķinātu logaritmu vērtības, iegūst speciālu rekurences formulu. Tam nolūkam vispirms uzraksta divu funkciju izvirzījumus pakāpju rindā.

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, && x \in (-1, 1], \\ \ln(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, && x \in [-1, 1). \end{aligned}$$

Kopīgajām x vērtībām šīs rindas drīkst atņemt un tāpēc

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right), \quad -1 < x < 1$$

jeb

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right), \quad -1 < x < 1.$$

Apzīmēsim

$$x = \frac{1}{2N+1}$$

un ievērosim, ka $-1 < x < 1$. Atrisinot divkāršu nevienādību

$$-1 < \frac{1}{2N+1} < 1,$$

iegūsim, ka $N > 0$ vai $N < -1$.

Izvēlēsimies $N > 0$, izteiksim $\frac{1+x}{1-x}$ ar N (skat.[1]) un iegūsim

$$\ln\frac{N+1}{N} = 2\left(\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \frac{1}{5(2N+1)^5} + \cdots\right), \quad N > 0$$

jeb

$$\boxed{\ln(N+1) = \ln N + 2\left(\frac{1}{2N+1} + \frac{1}{3(2N+1)^3} + \frac{1}{5(2N+1)^5} + \cdots\right).}$$

Ja izvēlas $N = 1$ un ievēro, ka $\ln 1 = 0$, tuvināti var aprēķināt $\ln 2$ vērtību. Zinot vērtību $\ln 2$, var aprēķināt $\ln 3$ utt.

[1]Tiešām, $\dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{1+\frac{1}{2N+1}}{1-\frac{1}{2N+1}} = \dfrac{\frac{2N+2}{2N+1}}{\frac{2N}{2N+1}} = \dfrac{N+1}{N}$.

6.6. Funkcijas $f(x) = (1+x)^\alpha$ izvirzījums Teilora rindā

Apskatīsim funkcijas $f(x) = (1+x)^\alpha$, kur $\alpha \in \mathbb{R}$ izvirzījumu Teilora rindā. Tam nolūkam atradīsim šīs funkcijas atvasinājumus.

$$
\begin{aligned}
&f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1},\\
&f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Atradīsim funkcijas un tās atvasinājumu vērtības punktā $x = 0$.

$$
\begin{aligned}
&f(0) = 1,\\
&f'(0) = \alpha,\\
&f''(0) = \alpha(\alpha-1),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Dotajai funkcijai atbilstoša Teilora rinda ir

$$
1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \cdots.
$$

Starp citu, šo Teilora rindu sauc par **binomiālo** rindu. Lietojot Dalambēra pazīmi, atradīsim šīs rindas konverģences intervālu. Tam nolūkam atradīsim

$$
\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}}{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| = |x| < 1.
$$

Pakāpju rindas konverģences intervāls ir $(-1, 1)$. Rindas raksturs šī intervāla galapunktos ir atkarīgs no α skaitliskās vērtības.

Teilora formulas atlikuma locekli šoreiz uzrakstīsim Košī formā, t.i.,

$$
R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}\big(x_0 + \Theta(x-x_0)\big)(1-\Theta)^n}{n!}x^{n+1}, \quad 0 < \Theta < 1.
$$

Tā kā $x_0 = 0$ un

$$f^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n)(1 + x)^{\alpha-n-1},$$

tad

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n)(1 + \Theta x)^{\alpha-n-1}(1 - \Theta)^n}{n!} x^{n+1}$$

jeb

$$R_n(x) = \frac{\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n)}{n!}(1 + \Theta x)^{\alpha-1}\left(\frac{1 - \Theta}{1 + \Theta x}\right)^n x^{n+1}, \quad 0 < \Theta < 1.$$

Tātad Teilora formulas atlikuma loceklis satur četrus reizinātājus. Ja izvēlēsimies x no konverğences intervāla $(-1, 1)$, t.i., $-1 < x < 1$, tad

$$-\Theta < \Theta x < \Theta \text{ un } 1 - \Theta < 1 + \Theta x < 1 + \Theta.$$

Tā kā $0 < \Theta < 1$, tad $1 - \Theta > 0$, bet

$$0 < \frac{1 - \Theta}{1 + \Theta x} < 1.$$

Tāpēc

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1 - \Theta}{1 + \Theta x}\right)^n = 0.$$

Ja $x \in (-1, 1)$, tad robeža no Teilora formulas atlikuma locekļa ceturtā reizinātāja arī ir nulle, t.i.,

$$\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = 0.$$

Otrais reizinātājs $(1 + \Theta x)^{\alpha-1}$ nav atkarīgs no n un tā vērtības atrodas starp skaitļiem $(1 - \Theta)^{\alpha-1}$ un $(1 + \Theta)^{\alpha-1}$. Pirmo reizinātāju uzrakstīsim šādi

$$\frac{\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n)}{n!} = \alpha\left(\frac{\alpha}{1} - 1\right)\left(\frac{\alpha}{2} - 1\right)\cdots\left(\frac{\alpha}{n} - 1\right).$$

Ievērojot iepriekš teikto, visiem $x \in (-1, 1)$ robeža $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Tāpēc visiem $x \in (-1, 1)$ Teilora rinda konverğē uz funkciju

$$f(x) = (1 + x)^\alpha.$$

Tādējādi

$$\boxed{(1 + x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha - 1)\cdots(\alpha - n + 1)}{n!}x^n + \cdots, \quad x \in (-1, 1).}$$

Kādām α vērtībām un kuru no intervāla galapunktiem var pievienot konverğences kopai ir izpētījis N. Ābels.

Ja α - naturāls skaitlis, t.i., $\alpha = m$, tad iegūsim formulu

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + x^m.$$

Formulas labajā pusē ir galīgs skaits locekļu.

Apskatīsim funkciju $f(x) = (a+x)^\alpha$, kur a ir no nulles atšķirīgs reāls skaitlis.

Vispirms pieņemsim, ka $\left|\frac{x}{a}\right| < 1$. Tā kā

$$(a+x)^\alpha = a^\alpha \left(1 + \frac{x}{a}\right)^\alpha \quad \text{un} \quad -1 < \frac{x}{a} < 1,$$

tad $\left(1+\frac{x}{a}\right)^\alpha$ var uzrakstīt kā atbilstošas binomiālās rindas summu. Tāpēc

$$\begin{aligned}(a+x)^\alpha = a^\alpha \Bigg(1 + \frac{\alpha}{1!}\cdot\frac{x}{a} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \cdots +\\ + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\left(\frac{x}{a}\right)^n + \cdots\Bigg) =\\ = a^\alpha + \frac{\alpha}{1!}a^{\alpha-1}\cdot x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}a^{\alpha-2}x^2 + \cdots +\\ + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}a^{\alpha-n}x^n + \cdots.\end{aligned}$$

Tagad pieņemsim, ka $\left|\frac{a}{x}\right| < 1$ un funkciju $(a+x)^\alpha$ pārveidosim šādi:

$$\begin{aligned}(a+x)^\alpha = x^\alpha\left(1+\frac{a}{x}\right)^\alpha = x^\alpha \Bigg(1 + \frac{\alpha}{1!}\cdot\frac{a}{x} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\left(\frac{a}{x}\right)^2 + \cdots +\\ + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\left(\frac{a}{x}\right)^n + \cdots\Bigg) =\\ = x^\alpha + \frac{\alpha}{1!}x^{\alpha-1}\cdot a + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{\alpha-2}a^2 + \cdots +\\ + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{\alpha-n}a^n + \cdots.\end{aligned}$$

Ja α - naturāls skaitlis, t.i., $\alpha = m$, tad neatkarīgi no tā, vai $\left|\frac{x}{a}\right| < 1$ vai $\left|\frac{a}{x}\right| < 1$, iegūsim formulu

$$(a+x)^m = a^m + \frac{m}{1!}a^{m-1}x + \frac{m(m-1)}{2!}a^{m-2}x^2 + \cdots + x^m.$$

Tā ir Ņūtona binoma formula.

Uzrakstīsim funkcijas $f(x) = \sqrt{1+x}$ izvirzījumu binomiālajā rindā. Tā kā $\alpha = \frac{1}{2}$, tad

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+x} &= (1+x)^{\frac{1}{2}} = \\
&= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{1}{3!}x^3 + \cdots = \\
&= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}x^4 + \cdots, \quad -1 < x < 1.
\end{aligned}$$

Šīs rindas locekļus, sākot ar trešo locekli, var uzrakstīt

$$u_n(x) = (-1)^n \frac{(2n-5)!!}{(2n-2)!!}x^{n-1} \quad (n = 3, 4, \ldots),$$

kur $(2n-5)!!$ ir visu nepāra naturālo skaitļu reizinājums līdz skaitlim $(2n-5)$ ieskaitot, bet $(2n-2)!!$ ir visu pāra naturālo skaitļu reizinājums līdz skaitlim $(2n-2)$ ieskaitot.

Binomiālo rindu izmanto, lai tuvināti aprēķinātu radikāļu vērtības. Piemēram, aprēķināsim $\sqrt[5]{40}$ ar precizitāti līdz $0,001$. Tā kā

$$40 = 32 + 8 = 2^5 + 8 = 2^5\left(1 + \frac{8}{2^5}\right) = 2^5\left(1 + \frac{1}{4}\right),$$

tad

$$\begin{aligned}
\sqrt[5]{40} &= 2\left(1 + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{5}} = \\
&= 2\left(1 + \frac{\frac{1}{5}}{1!}\frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}\right)}{2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{\frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{9}{5}\right)}{3!}\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \right.\\
&\left. + \frac{\frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{9}{5}\right)\left(-\frac{14}{5}\right)}{4!}\left(\frac{1}{4}\right)^4 + \cdots\right) = \\
&= 2 + \frac{2}{5\cdot 4} - \frac{2\cdot 4}{2!5^2\cdot 4^2} + \frac{2\cdot 4\cdot 9}{3!5^3\cdot 4^3} - \frac{2\cdot 4\cdot 9\cdot 14}{4!5^4\cdot 4^4} + \cdots.
\end{aligned}$$

Veidojas konverģenta alternējoša rinda, kuras locekļu moduļi, sākot ar piekto locekli, nepārsniedz $0,001$, jo

$$\frac{2\cdot 4\cdot 9\cdot 14}{4!5^4\cdot 4^4} = \frac{21}{80000} < 0,001.$$

Zināms, ka šādas rindas summu aizstājot ar tās parciālsummu, tuvinājuma kļūda nepārsniedz pirmā atmestā locekļa moduli. Tāpēc

$$\sqrt[5]{40} \approx 2 + \frac{2}{5 \cdot 4} - \frac{2 \cdot 4}{2!5^2 \cdot 4^2} + \frac{2 \cdot 4 \cdot 9}{3!5^3 \cdot 4^3} =$$
$$= 2 + \frac{1}{10} - \frac{1}{100} + \frac{3}{2000} = \frac{4183}{2000} = 2,0915 \approx 2,092$$

ar precizitāti līdz $0,001$. Starp citu, $\sqrt[5]{40} = 2,0912791\ldots$.

6.1. uzdevums. Izvirzīt Teilora rindā funkciju $f(x) = \operatorname{arctg} x$ un, izmantojot šo izvirzījumu, aprēķināt π tuvināto vērtību ar precizitāti līdz $0,01$.

Vispirms uzrakstīsim funkcijas $\frac{1}{1+x^2}$ izvirzījumu Teilora rindā. Šī funkcija ir ģeometriskās rindas summa, ja $x \in (-1, 1)$, t.i.,

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots, \quad -1 < x < 1.$$

Integrēsim šo pakāpju rindu

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^x \big(1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n} + \cdots\big) dt.$$

Iegūsim

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots, \quad -1 < x < 1.$$

Ievietojot $x = -1$ vai $x = 1$, iegūsim konverģentas skaitļu rindas.

Tādējādi

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \cdots, \quad -1 \le x \le 1.$$

Lai tuvināti aprēķinātu π skaitlisko vērtību, izvēlēsimies $x = 1$. Iegūtā skaitļu rinda konverģē, bet konverģē lēni. Labāk ir izvēlēties $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Iegūsim

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{27} + \frac{\sqrt{3}}{135} - \frac{\sqrt{3}}{567} + \frac{\sqrt{3}}{2187} - \cdots$$

jeb

$$\pi = 2\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{9} + \frac{2\sqrt{3}}{45} - \frac{2\sqrt{3}}{189} + \frac{2\sqrt{3}}{729} - \cdots.$$

Veidojas alternējoša rinda, kuras locekļu moduļi, sākot ar piekto locekli, nepārsniedz $0,01$. Tāpēc

$$\pi \approx 2\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{9} + \frac{2\sqrt{3}}{45} - \frac{2\sqrt{3}}{189} = \frac{1712\sqrt{3}}{945} = 3,13785\ldots \approx 3,14$$

ar precizitāti līdz $0,01$. Šādi rēķinot π vērtību, ir jāzina $\sqrt{3}$ tuvinātā vērtība.

6.7. Pakāpju rindu lietojumi tuvinātos aprēķinos

Kā redzējām iepriekš, pakāpju rindas var izmantot funkciju vērtību tuvinātajā aprēķināšanā. Vēl viens no pakāpju rindu lietojumiem ir noteikto integrāļu tuvinātā aprēķināšana.

Lai tuvināti aprēķinātu noteiktā integrāļa vērtību, zemintegrāļa funkciju izvirza Teilora rindā. Pēc tam šo Teilora rindu integrē un iegūtās rindas summu aizstāj ar tās parciālsummu. Locekļu skaitu parciālsummā izvēlas atkarībā no dotās tuvinājuma precizitātes.

6.2. uzdevums. Izskaitļot noteiktā integrāļa $\int\limits_0^1 e^{-x^3}dx$ vērtību ar precizitāti līdz $0,01$.

Eksponentfunkcijas izvirzījumā Teilora rindā

$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - \cdots, \quad t \in \mathbb{R}$$

izvēlēsimies $t = -x^3$. Iegūsim zemintegrāļa funkcijas izvirzījumu Teilora rindā, t.i.,

$$e^{-x^3} = 1 - \frac{x^3}{1!} + \frac{x^6}{2!} - \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{12}}{4!} + \cdots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Integrēsim šo rindu

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^{-x^3}dx &= \int_0^1 \left(1 - \frac{x^3}{1!} + \frac{x^6}{2!} - \frac{x^9}{3!} + \frac{x^{12}}{4!} - \cdots\right) dx = \\ &= \left(x - \frac{x^4}{4\cdot 1!} + \frac{x^7}{7\cdot 2!} - \frac{x^{10}}{10\cdot 3!} + \frac{x^{13}}{13\cdot 4!} - \cdots\right)\Bigg|_0^1 = \\ &= 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{14} - \frac{1}{60} + \frac{1}{312} - \cdots \approx 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{14} - \frac{1}{60} = \\ &= \frac{169}{210} = 0,80476\ldots \approx 0,80\end{aligned}$$

ar precizitāti līdz $0,01$ (alternējošās rindas parciālsumma satur tikai pirmos četrus rindas locekļus, jo pārējo rindas locekļu moduļi nepārsniedz $0,01$).

Pakāpju rindas vēl var lietot, lai tuvināti risinātu diferenciālvienādojumus, t.i., vienādojumus, kuri satur funkciju un tās atvasinājumus.

Apskatīto pakāpju rindu

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots$$

sauc par funkcijas $f(x)$ Teilora rindu punkta $x = 0$ apkārtnē (jeb pēc x pakāpēm). Var apskatīt vispārīgāka izskata pakāpju rindu

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots,$$

kuru sauc par Teilora rindu punkta $x = x_0$ apkārtnē (jeb pēc $(x - x_0)$ pakāpēm). Var runāt par funkcijas izvirzījumu punkta $x = x_0$ apkārtnē (jeb pēc $(x - x_0)$ pakāpēm).

6.3. uzdevums. Funkciju $f(x) = \frac{1}{x+1}$ izvirzīt Teilora rindā punkta $x = 1$ apkārtnē.

Pārveidosim funkcijas analītisko izskatu.

$$f(x) = \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2 + (x-1)} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(-\frac{x-1}{2}\right)}.$$

Dotā funkcija ir ģeometriskās rindas summa $\left(b_1 = \frac{1}{2},\ \ q = -\frac{x-1}{2}\right)$, ja $|q| < 1$, t.i., ja $|x - 1| < 2$ jeb $-1 < x < 3$.

Tātad

$$\frac{1}{x+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2}(x-1) + \frac{1}{2^3}(x-1)^2 - \frac{1}{2^4}(x-1)^3 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}}(x-1)^n + \cdots,$$

$x \in (-1, 3)$.

6.4. piezīme. Funkciju izvirzīt Teilora rindā varēja, meklējot tās atvasinājumus, funkcijas un atvasinājumu vērtības punktā $x = 1$ utt.

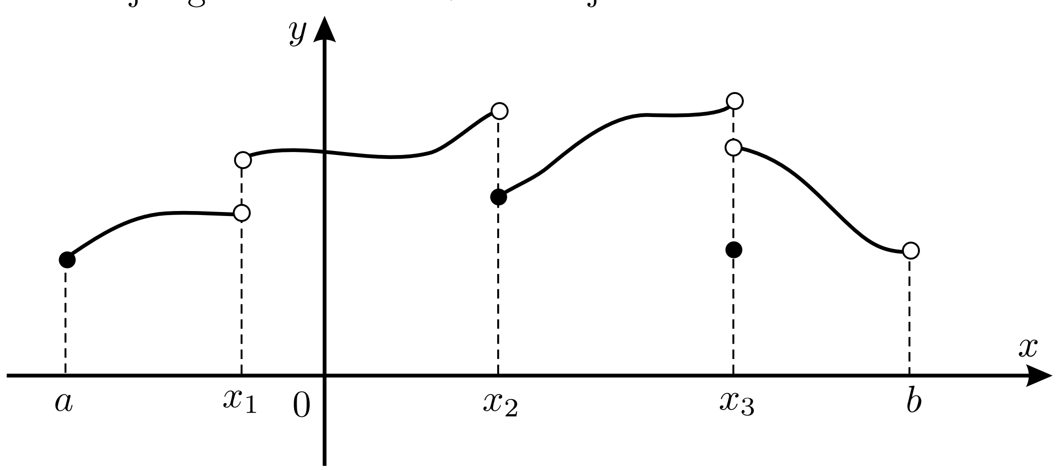
7. nodaļa

FURJĒ RINDAS

7.1. Ortonormēta sistēma gabaliem nepārtrauktu funkciju kopā. Trigonometriskā sistēma

7.1. definīcija. Funkciju $f(x)$ sauc par **gabaliem nepārtrauktu** funkciju intervālā $[a, b]$, ja tā ir nepārtraukta šajā intervālā, izņemot varbūt galīga skaita punktus. Pie tam šajos punktos funkcijai eksistē galīgas vienpusējās robežas (punktā a var runāt tikai par funkcijas robežu no labās puses, bet punktā b no kreisās puses).

Šādas funkcijas grafiks attēlots 7.1. zīmējumā.



7.1. zīm.

Funkcija ir nepārtraukta intervālā $[a, b]$, izņemot punktus x_1, x_2, x_3, b. Pie tam šajos punktos funkcijai eksistē galīgas vienpusējās robežas. Punktā $x = b$ var runāt tikai par tās robežu no kreisās puses, t.i., $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x)$.

Noteikto integrāli no 7.1. zīmējumā attēlotās funkcijas definēsim šādi:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \int_{x_2}^{x_3} f(x)dx + \int_{x_3}^{b} f(x)dx,$$

pie tam katrā no intervāliem funkciju uzskatīsim par nepārtrauktu funkciju. Piemēram, sākotnēji $f(x)$ nav definēta intervāla $[a, x_1]$ labējā galapunktā $x = x_1$. Lai iegūtu šajā intervālā nepārtrauktu funkciju, $f(x)$ definēsim punktā x_1, pieņemot, ka

$$f(x_1) = \lim_{\substack{x \to x_1 \\ x < x_1}} f(x).$$

Tādējādi intervālā $[a, b]$ gabaliem nepārtraukta funkcija ir integrējama funkcija šajā intervālā.

Intervālā $[a, b]$ gabaliem nepārtrauktas funkcijas veido kopu, kuru apzīmēsim ar $Q_{[a,b]}$.

Kopā $Q_{[a,b]}$ ir definēta tās elementu saskaitīšana, reizināšana un elementa reizināšana ar reālu skaitli, t.i., ja $f, g \in Q_{[a,b]}$, tad arī

$$f + g, f \cdot g \text{ un } cf \in Q_{[a,b]} \quad (c \in \mathbb{R}).$$

7.2. definīcija. Par elementu $f, g \in Q_{[a,b]}$ **skalāro reizinājumu** sauc noteikto integrāli $\int_a^b f(x)g(x)dx$ un apzīmē $\langle f, g \rangle$. Tādējādi

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

7.3. definīcija. Par elementa $f \in Q_{[a,b]}$ **normu** sauc $\sqrt{\langle f, f \rangle}$ un apzīmē $\|f\|$. Tādējādi

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}.$$

(Skat.[1]).

[1]Kvadrātsakne eksistē, jo $\int_a^b f^2(x)dx \geq 0, \ a < b$.

7.4. definīcija. Par **attālumu** starp elementiem $f, g \in Q_{[a,b]}$ sauc $\|f - g\|$ un apzīmē $\rho(f, g)$. Tādējādi

$$\rho(f,g) = \|f-g\| = \sqrt{\langle f-g, f-g\rangle} = \sqrt{\int\limits_a^b \big(f(x)-g(x)\big)^2 dx}.$$

Šo skaitli vēl sauc par elementa f **vidējo kvadrātisko novirzi** no elementa g.

7.5. definīcija. Elementus $f, g \in Q_{[a,b]}$ sauc par **ortogonāliem** elementiem, ja $\langle f, g\rangle = 0$, t.i.,

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = 0.$$

Raksta $f \perp g$.

Viegli pamatot, ka ortogonāliem elementiem $f, g \in Q_{[a,b]}$ ir spēkā Pitagora teorēma, t.i.,

$$\|f+g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2$$

jeb

$$\int\limits_a^b \big(f(x)+g(x)\big)^2 dx = \int\limits_a^b f^2(x)dx + \int\limits_a^b g^2(x)dx.$$

7.6. definīcija. Virkni $\big(\psi_i\big)_{i=0}^{\infty} \subset Q_{[a,b]}$ sauc par **ortogonālu sistēmu**, ja

$$\langle \psi_i, \psi_j\rangle = \begin{cases} 0, & \text{ja } \ i \neq j, \\ A \neq 0, & \text{ja } \ i = j, \end{cases} \quad (i, j = 0, 1, 2, \ldots).$$

Piemēram, funkcijas

$$1,\ \cos\frac{\pi x}{\ell},\ \sin\frac{\pi x}{\ell},\ \cos\frac{2\pi x}{\ell},\ \sin\frac{2\pi x}{\ell},\ \ldots,\ \cos\frac{n\pi x}{\ell},\ \sin\frac{n\pi x}{\ell},\ \ldots$$

veido ortogonālu sistēmu kopā $Q_{[-\ell,\ell]}$, jo

$$\int\limits_{-\ell}^{\ell} 1\cdot\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx = \int\limits_{-\ell}^{\ell} 1\cdot\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx = \int\limits_{-\ell}^{\ell} \sin\frac{n\pi x}{\ell}\cos\frac{m\pi x}{\ell}dx = 0$$

un

$$\int_{-\ell}^{\ell} \cos\frac{n\pi x}{\ell}\cos\frac{m\pi x}{\ell}dx = \int_{-\ell}^{\ell} \sin\frac{n\pi x}{\ell}\sin\frac{m\pi x}{\ell}dx = \begin{cases} 0, & \text{ja} \quad n \neq m, \\ \ell, & \text{ja} \quad n = m, \end{cases}$$

$$\int_{-\ell}^{\ell} 1^2 dx = 2\ell.$$

Ja $\ell = \pi$, tad iegūsim kopā $Q_{[-\pi,\pi]}$ ortogonālu sistēmu,

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots,\ \cos nx,\ \sin nx,\ \ldots.$$

7.7. definīcija. Virkni $\left(\varphi_i\right)_{i=0}^{\infty} \subset Q_{[a,b]}$ sauc par **ortonormētu sistēmu**, ja

$$\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \begin{cases} 0, & \text{ja} \quad i \neq j, \\ 1, & \text{ja} \quad i = j, \end{cases} \qquad (i, j = 0, 1, 2, \ldots).$$

Viegli redzēt, ka ortogonālas sistēmas $\left(\psi_i\right)_{i=0}^{\infty} \subset Q_{[a,b]}$ katru elementu pareizinot ar atbilstošu konstanti $A_i = \pm\frac{1}{\|\psi_i\|}$, iegūsim kopā $Q_{[a,b]}$ ortonormētu sistēmu $\left(\varphi_i\right)_{i=0}^{\infty}$.

Piemērā apskatītās ortogonālas sistēmas normēšanai ir jāizvēlas reizinātāji

$$A_0 = \frac{1}{\sqrt{2\ell}},\ A_{2n} = A_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \ \ (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Kopā $Q_{[-\ell,\ell]}$ ortonormētā sistēma ir

$$\frac{1}{\sqrt{2\ell}},\ \frac{1}{\sqrt{\ell}}\cos\frac{\pi x}{\ell},\ \frac{1}{\sqrt{\ell}}\sin\frac{\pi x}{\ell},\ \frac{1}{\sqrt{\ell}}\cos\frac{2\pi x}{\ell},\ \frac{1}{\sqrt{\ell}}\sin\frac{2\pi x}{\ell},\ \ldots,$$
$$\frac{1}{\sqrt{\ell}}\cos\frac{n\pi x}{\ell},\ \frac{1}{\sqrt{\ell}}\sin\frac{n\pi x}{\ell},\ \ldots.$$

Ja $\ell = \pi$, tad kopā $Q_{[-\pi,\pi]}$ ortonormētā sistēma ir

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\ \ldots,$$
$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx,\ \ldots.$$

Šīs ortonormētās sistēmas sauc par **trigonometriskām sistēmām**.

7.2. Furjē rinda pēc ortonormētas sistēmas

Apskatīsim ortonormētu sistēmu $\big(\varphi_i\big)_{i=0}^{\infty} \subset Q_{[a,b]}$ un patvaļīgu $f \in Q_{[a,b]}$.

7.8. definīcija. Funkciju rindu $\sum\limits_{i=0}^{\infty} c_i\varphi_i$, kur $c_i = \langle f, \varphi_i\rangle$ sauc par funkcijas $f(x)$ **Furjē[2] rindu** pēc ortonormētas sistēmas (φ_i), pie tam c_i sauc par **Furjē koeficientiem**.

Ja par ortonormētu sistēmu izvēlas trigonometrisko sistēmu

$$\frac{1}{\sqrt{2\ell}},\ \frac{1}{\sqrt{\ell}}\cos\frac{\pi x}{\ell},\ \frac{1}{\sqrt{\ell}}\sin\frac{\pi x}{\ell},\ \ldots,\ \frac{1}{\sqrt{\ell}}\cos\frac{n\pi x}{\ell},\ \frac{1}{\sqrt{\ell}}\sin\frac{n\pi x}{\ell},\ \ldots$$

un $f \in Q_{[-\ell,\ell]}$, tad Furjē koeficienti

$$c_0 = \langle f, \frac{1}{\sqrt{2\ell}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\ell}}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)dx,$$

$$c_{2n-1} = \langle f, \frac{1}{\sqrt{\ell}}\cos\frac{n\pi x}{\ell}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\ell}}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx,$$

$$c_{2n} = \langle f, \frac{1}{\sqrt{\ell}}\sin\frac{n\pi x}{\ell}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\ell}}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx,\quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Funkcijai $f(x)$ atbilstošā Furjē rinda ir

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i\varphi_i = \left(\frac{1}{\sqrt{2\ell}}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)dx\right)\frac{1}{\sqrt{2\ell}} +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\ell}}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx\right)\frac{1}{\sqrt{\ell}}\cos\frac{n\pi x}{\ell} +$$

$$+\left(\frac{1}{\sqrt{\ell}}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx\right)\frac{1}{\sqrt{\ell}}\sin\frac{n\pi x}{\ell} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx\right)\cos\frac{n\pi x}{\ell} +$$

[2] Žozefs Furjē (1768-1830) - franču matemātiķis.

$$+\left(\frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx\right)\sin\frac{n\pi x}{\ell} =$$
$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell},$$

kur

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)dx,$$
$$a_n = \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx,$$
$$b_n = \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Pie tam Furjē rindu pēc trigonometriskās sistēmas sauc par **Furjē trigonometrisku rindu** (FTR).

Tadējādi funkcijai $f(x)$ atbilst FTR

$$\boxed{\begin{gathered}\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell},\ \text{kur}\\ a_0 = \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)dx,\quad a_n = \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx,\\ b_n = \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx\ \ (n = 1, 2, 3, \ldots).\end{gathered}}$$

Ja $\ell = \pi$, tad iegūsim FTR

$$\boxed{\begin{gathered} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \text{ kur} \\ a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \end{gathered}}$$

7.3. Furjē trigonometriskās rindas konverğences pietiekamais nosacījums

7.9. definīcija. Funkciju $f(x)$ sauc par **gabaliem gludu** intervālā $[a, b]$, ja tai eksistē šajā intervālā gabaliem nepārtraukts atvasinājums (ja funkcija nav nepārtraukta punktā $x \in [a, b]$, tad šajā punktā var runāt tikai par funkcijas atvasinājumu no kreisās vai labās puses).

7.1. teorēma. [**FTR konverğences pietiekamais nosacījums**]

Ja $f(x)$ ir intervālā $[-\ell, \ell]$ gabaliem gluda funkcija, tad tai sastādītā FTR konverğē šajā intervālā, pie tam konverğē uz

1) $f(x)$ intervāla $(-\ell, \ell)$ punktos, kuros tā ir nepārtraukta,

2) $S_i = \frac{f(x_i-0)+f(x_i+0)}{2}$ pārējos intervāla $(-\ell, \ell)$ punktos $x = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$,

3) $S_0 = \frac{f(-\ell+0)+f(\ell-0)}{2}$ punktos $x = -\ell$, $x = \ell$.

7.1. piezīme. Ja vēl papildus $f(x)$ ir intervālā $[-\ell, \ell]$ nepārtraukta funkcija, tad tai sastādītā FTR konverğē uz šo funkciju visiem $x \in (-\ell, \ell)$, bet uz $S_0 = \frac{f(-\ell)+f(\ell)}{2}$ punktos $x = -\ell$, $x = \ell$.

7.1. uzdevums. Izvirzīt FTR[3] funkciju $f(x) = x$, $x \in [-\pi, \pi]$.

Vispirms sastādīsim šai funkcijai atbilstošu FTR. Tam nolūkam izskaitļosim Furjē koeficientus.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \cos nx dx \\ du = dx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx \right) = \frac{1}{\pi n^2}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \sin nx dx \\ du = dx & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos n\pi - \frac{\pi}{n}\cos(-n\pi) + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} \right) =$$

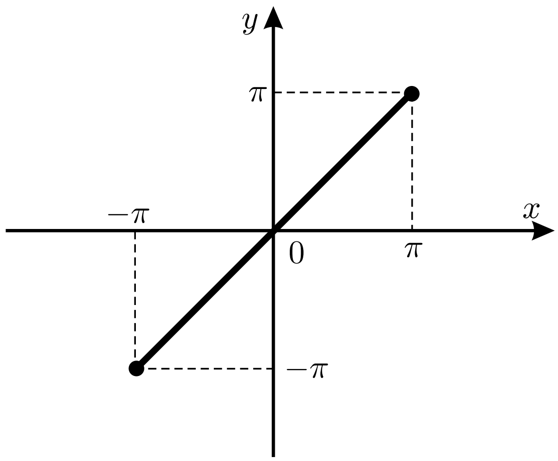
$$= -\frac{2}{n}\cos n\pi = -\frac{2}{n}(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

Tātad funkcijai $f(x) = x$ atbilst šāda FTR

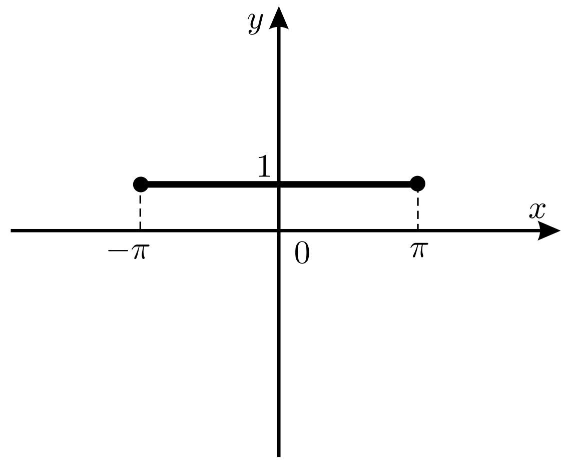
$$x \sim 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx.$$

Funkcija $f(x) = x$ ir nepārtraukta intervālā $[-\pi, \pi]$ un tai eksistē šajā intervālā nepārtraukts atvasinājums $f'(x) = 1$ (intervāla galapunktos ar atvasinājumu vienosimies saprast šīs funkcijas vienu no vienpusējiem atvasinājumiem). Funkcijas grafiks attēlots 7.2. zīmējumā, bet tās atvasinājuma grafiks - 7.3. zīmējumā.

[3] Nozīmē sastādīt šai funkcijai atbilstošu FTR un noskaidrot, kādām argumenta vērtībām starp funkciju un tai atbilstošu FTR var likt vienādības zīmi. Citiem vārdiem, doto funkciju uzrakstīt kā tai atbilstošās FTR summu.



7.2. zīm.



7.3. zīm.

Saskaņā ar 7.1. piezīmi, sastādītā FTR konverğē uz funkciju $f(x) = x$ visiem $x \in (-\pi, \pi)$ un uz

$$S_0 = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{-\pi+\pi}{2} = 0$$

punktos $x = -\pi$, $x = \pi$.

Tātad visiem $x \in (-\pi, \pi)$ starp funkciju un tai atbilstošo FTR var likt vienādības zīmi.

Tādējādi

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nx, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

Piemēram, ja $x = \frac{\pi}{2}$, tad iegūsim skaitļu rindu

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi}{2} =$$
$$= 2\left(\sin\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\sin\pi + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2} - \frac{1}{4}\sin 2\pi + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi}{2} - \frac{1}{6}\sin 3\pi + \cdots\right) =$$
$$= 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right),$$

kuras summa ir $\frac{\pi}{2}$.
Tātad

$$\frac{\pi}{2} = 2\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\right)$$

jeb

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

Izmantojot FTR, tika aprēķināta skaitļu rindas

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$$

summa un tā ir $\frac{\pi}{4}$. Tādējādi

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}=\frac{\pi}{4}.}$$

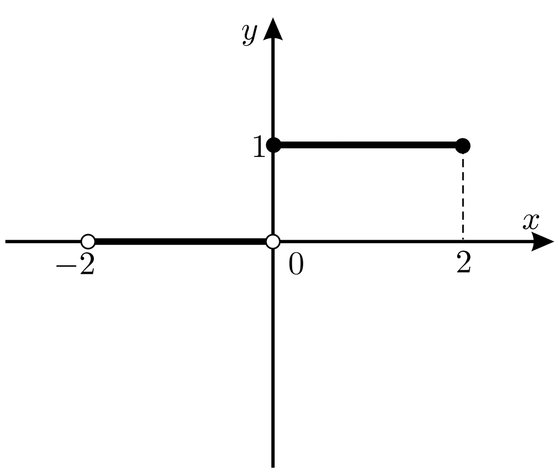
7.2. uzdevums. Izvirzīt FTR funkciju

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{ja} \quad -2<x<0,\\ 1, & \text{ja} \quad 0\le x\le 2.\end{cases}$$

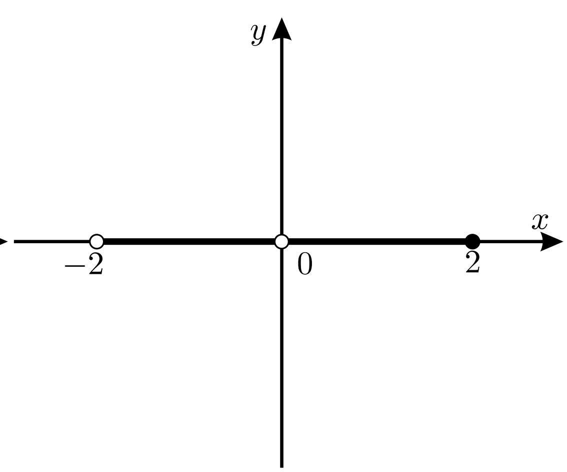
Funkcija ir gabaliem nepārtraukta intervālā $[-2,2]$ un tai eksistē šajā intervālā gabaliem nepārtraukts atvasinājums

$$f'(x)=0, \quad x\in(-2,0)\cup(0,2].$$

Funkcijas grafiks ir attēlots 7.4. zīmējumā, bet tās atvasinājuma grafiks - 7.5. zīmējumā.



7.4. zīm.



7.5. zīm.

Atradīsim Furjē koeficientus, ievērojot, ka $\ell = 2$.

$$a_0 = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2} f(x)dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{0} 0dx + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2} 1dx = \frac{1}{2}x\Big|_0^2 = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2} f(x)\cos\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{0} 0\cos\frac{n\pi x}{2}dx + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2} 1\cos\frac{n\pi x}{2}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{2} f(x)\sin\frac{n\pi x}{2}dx = \frac{1}{2}\int\limits_{-2}^{0} 0\sin\frac{n\pi x}{2}dx + \frac{1}{2}\int\limits_{0}^{2} 1\sin\frac{n\pi x}{2}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 = -\frac{1}{n\pi}(\cos n\pi - \cos 0) =$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\big((-1)^n - 1\big) = \begin{cases} 0, & \text{ja} \quad n = 2k, \\ \frac{2}{n\pi} & \text{ja} \quad n = 2k-1. \end{cases}$$

Dotajai funkcijai $f(x)$ atbilst FTR

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2}.$$

visiem $x \in (-2,0)\cup(0,2)$ šī rinda konverğe uz $f(x)$, t.i.,

$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k-1}\sin\frac{(2k-1)\pi x}{2}, \quad x \in (-2,0)\cup(0,2).$$

Ja $x = 0$, tad FTR konverğē uz

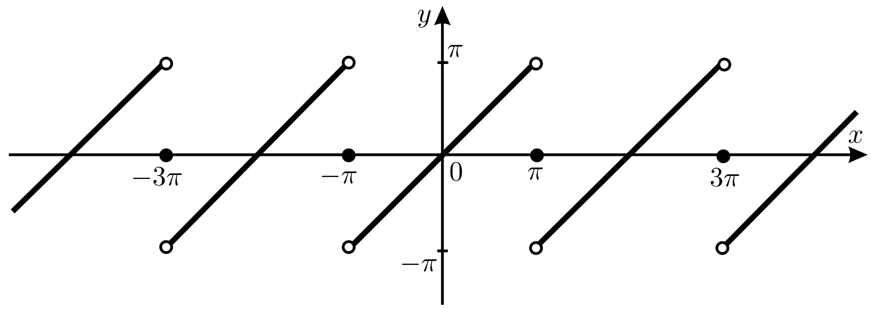
$$S_1 = \frac{f(0-0)+f(0+0)}{2} = \frac{f(0-0)+f(0)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Ja $x = -2$, $x = 2$, tad FTR konverğē uz

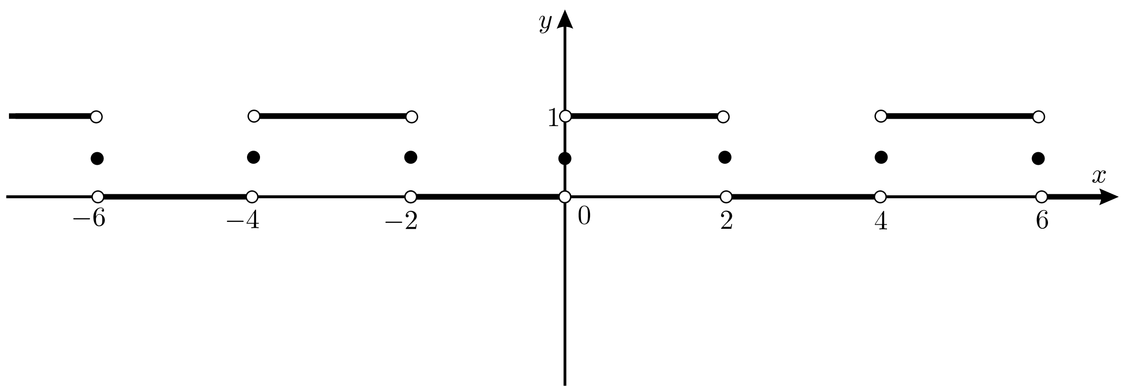
$$S_0 = \frac{f(-2+0)+f(2-0)}{2} = \frac{f(-2+0)+f(2)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Starp citu, FTR summa $S(x)$ ir periodiska funkcija ar periodu $T = 2\ell$, pie tam S_0 ir funkcijas $S(x)$ vērtība punktos $x = -\ell$, $x = \ell$, bet S_i ir $S(x)$ vērtības atbilstoši punktos x_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Intervāla $(-\ell, \ell)$ punktos, kuros $f(x)$ ir nepārtraukta $S(x) = f(x)$.

7.1. uzdevumā sastādītās FTR summas $S(x)$ grafiks ir attēlots 7.6. zīmējumā, bet 7.2. uzdevumā sastādītās FTR summas $S(x)$ grafiks - 7.7. zīmējumā.



7.6. zīm.



7.7. zīm.

7.3. uzdevums. Izvirzīt FTR funkciju $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$.

Izskaitļosim atbilstošos Furjē koeficientus.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & dv = \cos nx dx \\ du = 2x dx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx \right) =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \sin nx dx \\ du = dx & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx\right) =$$

$$= \frac{4\pi}{n^2\pi}\cos n\pi - \frac{2}{n^3\pi}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{4}{n^2}(-1)^n,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin nx dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & dv = \sin nx dx \\ du = 2x dx & v = -\frac{1}{n}\cos nx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{x^2}{n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx dx\right) =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos nx dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \cos nx dx \\ du = dx & v = \frac{1}{n}\sin nx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(\frac{x}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx\right) = \frac{2}{n^3\pi}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Funkcijai $f(x) = x^2$ atbilstoša FTR ir

$$\frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx.$$

Tā kā $f(x) = x^2$ intervālā $[-\pi, \pi]$ ir nepārtraukta funkcija un tai eksistē šajā intervālā nepārtraukts atvasinājums, tad sastādītā FTR konverģē uz $f(x) = x^2$ visiem $x \in (-\pi, \pi)$.

Tātad

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx, \quad x \in (-\pi, \pi).$$

Punktos $x = -\pi$, $x = \pi$ FTR konverģē uz

$$S_0 = \frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{f(-\pi) + f(\pi)}{2} = \frac{\pi^2 + \pi^2}{2} = \pi^2.$$

Funkcijas $f(x) = x^2$ vērtība punktos $x = -\pi$, $x = \pi$ arī ir π^2, tāpēc var teikt, ka FTR konverģē uz $f(x) = x^2$ arī punktos $x = \pi$, $x = \pi$.

Tādējādi

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos nx, \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Ievietosim $x = \pi$ un iegūsim, ka

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}(-1)^n$$

jeb

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

Tagad ievietosim $x = 0$ un iegūsim, ka

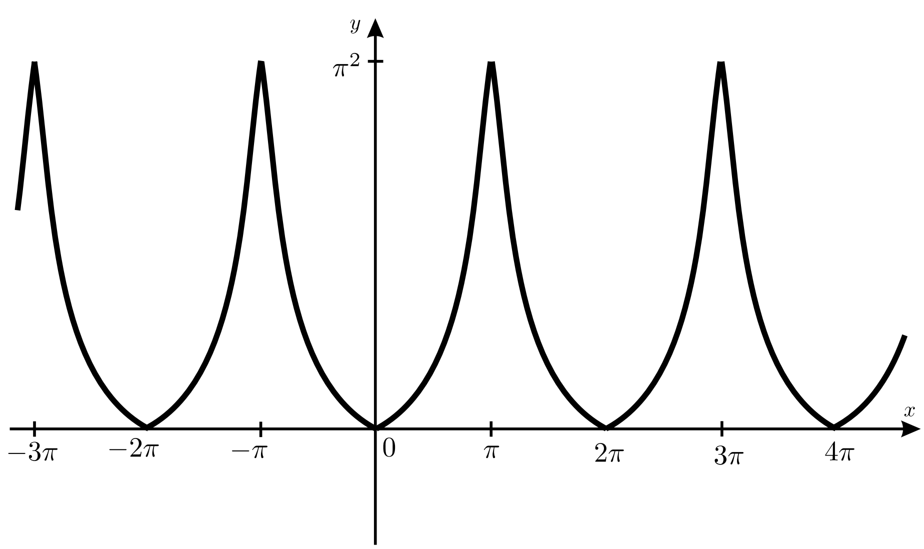
$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2},$$

jeb

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}.}$$

Tika aprēķinātas vēl divu skaitļu rindu summas.

Konstruēsim sastādītās FTR summas grafiku.



7.8. zīm.

Acīmredzami, ka $f(x) = S(x)$, $x \in [-\pi, \pi]$.

7.4. Furjē trigonometriska rinda pāra vai nepāra funkcijai

Ja $f(x)$, $x \in [-\ell, \ell]$ ir pāra funkcija, t.i., $f(-x) = f(x)$, $x \in [-\ell, \ell]$, tad Furjē koeficienti

$$a_0 = \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)dx = \frac{2}{\ell}\int\limits_{0}^{\ell} f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx = \frac{2}{\ell}\int\limits_{0}^{\ell} f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\ell}\int\limits_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx = 0.$$

(Skat. 7.3. uzdevumu).

Pāra funkcijai atbilstoša FTR ir

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{\ell}.$$

Ja $f(x)$, $x \in [-\ell, \ell]$ ir nepāra funkcija, t.i., $f(-x) = -f(x)$, $x \in [-\ell, \ell]$, tad Furjē koeficienti $a_0 = a_n = 0$,

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int\limits_{0}^{\ell} f(x)\sin\frac{n\pi x}{\ell}dx.$$

Šai funkcijai atbilstoša FTR ir

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}.$$

(Skat. 7.1. uzdevumu).

7.5. Intervālā $[0, \ell]$ definētas funkcijas izvirzījums Furjē trigonometriskā rindā

Ja funkcija $f(x)$ ir definēta intervālā $[a, b]$, tad tai atbilstošus Furjē koeficientus var aprēķināt pēc formulām

$$a_0 = \frac{2}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{2}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\cos\frac{2n\pi x}{b-a}dx,$$

$$b_n = \frac{2}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\sin\frac{2n\pi x}{b-a}dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Šoreiz uzskatījām, ka $2\ell = b - a$, bet $\ell = \frac{b-a}{2}$.

Ja funkcija ir definēta intervālā $[0, \ell]$, tad Furjē koeficienti

$$a_0 = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^\ell f(x)dx,$$

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^\ell f(x)\cos\frac{2n\pi x}{\ell}dx,$$

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^\ell f(x)\sin\frac{2n\pi x}{\ell}dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

7.4. uzdevums. Izvirzīt FTR funkciju $f(x) = x$, $0 < x < \pi$.

Atradīsim Furjē koeficientus

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x dx = \frac{x^2}{\pi}\bigg|_0^\pi = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi x\cos 2nx dx = \begin{vmatrix} u = x & dv = \cos 2nx dx \\ du = dx & v = \frac{1}{2n}\sin 2nx \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{x}{2n}\sin 2nx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{2n}\int_0^{\pi}\sin 2nx dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2n^2\pi}\cos 2nx\Big|_0^{\pi} = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin 2nx dx = \left|\begin{array}{ll} u = x & dv = \sin 2nx dx \\ du = dx & v = -\frac{1}{2n}\cos 2nx \end{array}\right| =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{2n}\cos 2nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2n}\int_0^{\pi}\cos 2nx dx\right) =$$

$$= -\frac{1}{n}\cos 2\pi n + \frac{1}{2n^2\pi}\sin 2nx\Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{n}.$$

Funkcijai $f(x) = x$ atbilstošā FTR ir

$$\frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin 2nx.$$

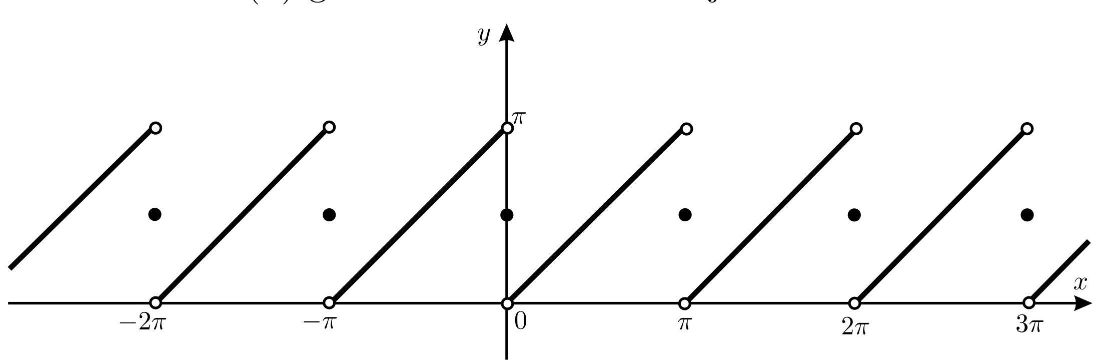
Funkcija un tās atvasinājums ir intervālā $[0,\pi]$ nepārtrauktas funkcijas. Tāpēc FTR konverģē uz funkciju $f(x) = x$ visiem $x \in (0,\pi)$. Tādējādi

$$x = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin 2nx, \quad x \in (0,\pi).$$

Punktos $x = 0$, $x = \pi$ FTR summa ir

$$S_0 = \frac{f(0) + f(\pi)}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

FTR summas $S(x)$ grafiks attēlots 7.9. zīmējumā.



7.9. zīm.

Funkcijas izvirzījumā FTR ievietosim $x = \frac{\pi}{4}$. Iegūsim

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{2} n$$

jeb

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{2k-1} = \frac{\pi}{4},$$

jo

$$\sin \frac{\pi}{2} n = \begin{cases} 0, & \text{ja } \ n = 2k, \\ (-1)^{k+1}, & \text{ja } \ n = 2k-1. \end{cases}$$

Ja funkcija $f(x)$ ir definēta intervālā $[0, \ell]$, tad varam rīkoties arī citādi. Vispirms varam $f(x)$ turpināt uz intervālu $[-\ell, \ell]$ pēc pāra vai pēc nepāra principa, t.i., izveidot pāra funkciju

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ja } \ x \in [0, \ell], \\ f(-x), & \text{ja } \ x \in [-\ell, 0). \end{cases}$$

(Skat. 7.10. zīmējumu).

Var izveidot nepāra funkciju

$$\psi(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ja } \ x \in [0, \ell], \\ -f(-x), & \text{ja } \ x \in [-\ell, 0). \end{cases}$$

(Skat. 7.11. zīmējumu).

Pēc tam intervālā $[-\ell, \ell]$ definētu funkciju varam izvirzīt FTR.

Pāra funkcijai $\varphi(x)$ iegūsim Furjē koeficientu izteiksmes

$$a_0 = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \varphi(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{n\pi x}{\ell} dx,$$

$$b_n = 0.$$

Atbilstošā FTR

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{\ell}.$$

Šādos gadījumos saka, ka intervālā $[0,\ell]$ definētā funkcija $f(x)$ ir izvirzīta FTR pēc kosinusiem.

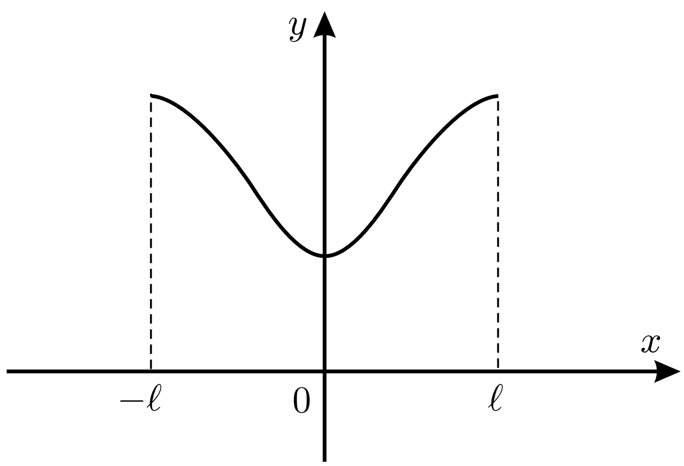
Nepāra funkcijai $\psi(x)$ Furjē koeficientu izteiksmes $a_0 = 0$, $a_n = 0$,

$$b_n = \frac{2}{\ell}\int\limits_0^\ell f(x)\cos\frac{n\pi x}{\ell}dx$$

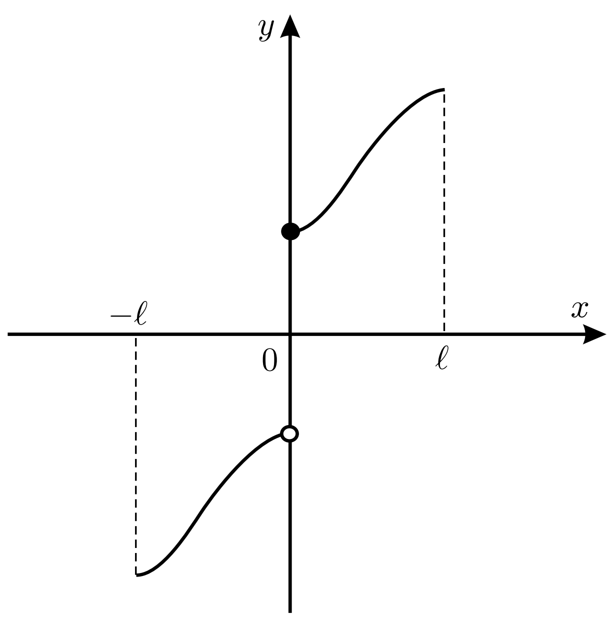
un FTR

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{\ell}.$$

Šoreiz saka, ka intervālā $[0,\ell]$ definētā funkcija ir izvirzīta FTR pēc sinusiem.



7.10. zīm.



7.11. zīm.

7.5. uzdevums. Izvirzīt FTR funkciju $f(x) = x$, $x \in [0, \pi]$

a) pēc kosinusiem,

b) pēc sinusiem.

a) Šoreiz

$$
\begin{aligned}
b_n &= 0, \\
a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^\pi = \pi, \\
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \cos nx dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \cos nx dx \\ du = dx & v = \frac{1}{n} \sin nx \end{array} \right| = \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\frac{x}{n} \sin nx \Big|_0^\pi - \frac{1}{n} \int_0^\pi \sin nx dx \right) = \frac{2}{n^2\pi} \cos nx \Big|_0^\pi = \\
&= \frac{2}{n^2\pi} (\cos n\pi - \cos 0) = \frac{2}{n^2\pi} \big((-1)^n - 1 \big) = \\
&= \begin{cases} -\frac{4}{n^2\pi}, & \text{ja} \quad n = 2k-1, \\ 0, & \text{ja} \quad n = 2k. \end{cases}
\end{aligned}
$$

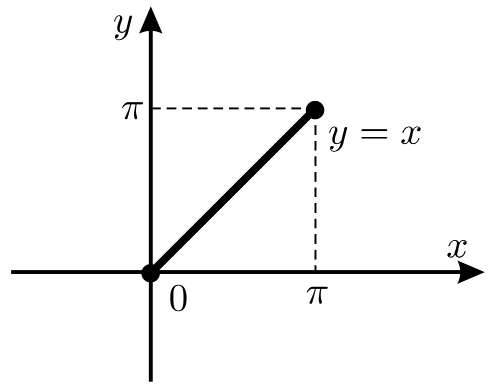
Atbilstošā FTR ir

$$
\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.
$$

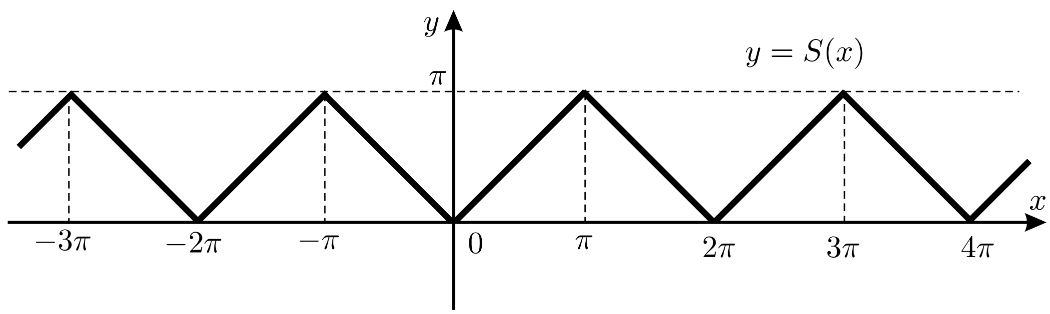
Rinda konverğē uz funkciju $f(x) = x$ visiem $x \in [0, \pi]$. Tādējādi

$$
x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}, \quad x \in [0, \pi].
$$

Funkcijas grafiks attēlots 7.12. zīmējumā, bet FTR summas grafiks - 7.13. zīmējumā.



7.12. zīm.



7.13. zīm.

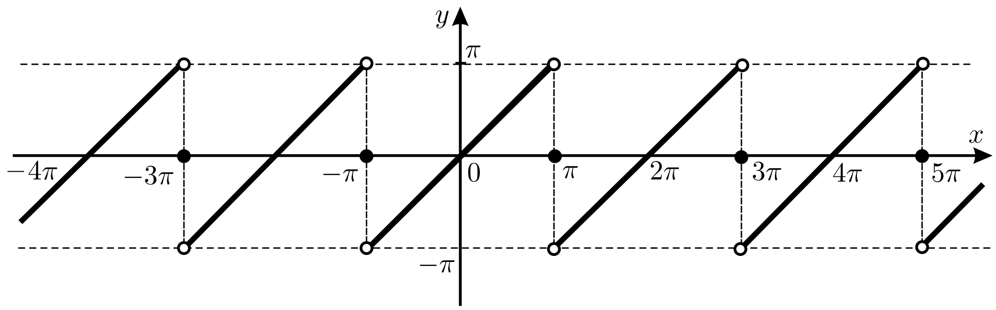
b) Šoreiz

$$\begin{aligned}
&a_0 = 0,\\
&a_n = 0,\\
&b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx dx = \frac{2}{\pi}\left(-\frac{x}{n}\cos nx\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\cos nx dx\right) = \\
&\quad = -\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{n}\cos n\pi = -\frac{2}{n}(-1)^n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Pie tam

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx, \quad x\in[0,\pi).$$

Funkcijas grafiks attēlots 7.12. zīmējumā, bet FTR summas grafiks - 7.14. zīmējumā.



7.14. zīm.

LITERATŪRA

[1] Dz. Bože, L. Biezā, B. Siliņa, A. Strence. Uzdevumu krājums augstākajā matemātikā. - R.: Zvaigzne ABC, 1996. - 328 lpp.

[2] I. Bula, J. Buls. Matemātiskā analīze ar ģeometrijas un algebras elementiem. 1 daļa. - R.: Apgāds Zvaigzne ABC, 2003. - 256 lpp.

[3] E. Kronbergs, P. Rivža, Dz. Bože. Augstākā matemātika. 2. daļa. - R.: Zvaigzne, 1988. - 528 lpp.

[4] K. Šteiners. Augstākā matemātika - VI. Lekciju konspekts inženierzinātņu un dabaszinātņu studentiem. - R.: Zvaigzne ABC, 2001. - 208 lpp.

[5] Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. - М.: Наука, 1985. - 384 с.

[6] Воробьев Н.Н. Теория рядов. - М.: Наука, 1975. - 368 с.

[7] Задачник по курсу математического анализа. Под редакцией Н.Я. Виленкина Ч.2. - М.: Просвещение, 1971. - 336 с.

[8] Давыдов Н.А., Коровкин П.П., Никольский В.Н. Сборник задач по математическому анализу. - М.: Просвещение, 1973. - 256 с.

[9] Мордкович А.Г., Солодовников А.С. Математический анализ. - М.: Высшая школа, 1990. - 416 с.

[10] Очан Ю.С., Шнейдер. Математический анализ. - М.: Учпедгиз, 1961. - 882 с.

[11] Рябушко А.П., Бархатов В.В., Державец В.В., Юруть И.Е. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике, ч.3. - Минск: Вышэйшая школа, 1991. - 288 с.

[12] Уваренков Н.М., Маллер М.З. Курс математического анализа. Т.II. - М.: Просвещение, 1976. - 479 с.

[13] Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа. Т.II. - М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. - 464 с.

[14] Энциклопедический словарь юного математика. Составитель Савин А.П. - М.: Педагогика, 1985. - 352 с.

SATURS