"Informatīvā un tehniskā aprīkojuma modernizācija matemātikas un tās pielietojumu studijām Daugavpils Universitātē"

Nr. 2006/0245/VPD1/ESF/PIAA/06/APK/3.2.3.2./0053/0065

DAUGAVPILS UNIVERSITĀTE
Dabaszinātņu un matemātikas fakultāte
Matemātikas katedra

Armands Gricāns

Diskrētā matemātika

Kombinatorika

Updated 25.05.2013.

2007

Saturs

1. Kombinatorikas priekšmets

***Kombinatorika** ir matemātikas nozare, kas pēta, cik dažādu objektu, kas apmierina tos vai citus nosacījumus, var izveidot no dotās galīgas kopas - pamatkopas - elementiem.*

2. Summas likums

2.1. teorēma. [Summas likums 2 kopām]
Ja A un B ir galīgas kopas, kas nešķeļas, tad

$$\boxed{|A \cup B| = |A| + |B|,}$$

t.i., divu galīgu kopu, kas nešķeļas, apvienojuma elementu skaits ir vienāds ar doto kopu elementu skaita summu.

2.1. teorēmu var pārformulēt šādā ekvivalentā veidā.

2.2. teorēma. *Ja elementu a var izvēlēties n veidos, bet elementu b var izvēlēties m veidos, pie tam jebkura elementa a izvēle ir atšķirīga no elementa b izvēles, tad izvēli "a vai b" var veikt $n + m$ veidos.*

2.1. piemērs. *Pieņemsim, ka uz galda atrodas 5 āboli un 7 bumbieri. Tad vienu augli var izvēlēties $5 + 7 = 12$ veidos.*

2.3. teorēma. [Summas likums] *Ja A_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ ir galīgas kopas, kas savstarpēji nešķeļas, tad*

$$\boxed{|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_m|,}$$

t.i., galīga skaita kopu, kas savstarpēji nešķeļas, apvienojuma elementu skaits ir vienāds ar doto kopu elementu skaita summu.

Summas likumu var formulēt attēlojumu valodā.

2.4. teorēma. *Apskatīsim sirjektīvu attēlojumu $f : A \longrightarrow B$, kur A un B ir galīgas kopas. Tad kopas A elementu skaits ir vienāds ar elementu skaita kopas B elementu pirmtēlos summu:*

$$\boxed{|A| = \sum_{b \in B} \left|f^{-1}(b)\right|.}$$

Atzīmēsim, ka, ja $b_1, b_2 \in B$ un $b_1 \neq b_2$, tad

$$f^{-1}(b_1) \cap f^{-1}(b_2) = \emptyset.$$

3. Reizināšanas likums

3.1. teorēma. [Reizināšanas likums 2 kopām] *Ja A un B ir galīgas kopas, tad*

$$\boxed{|A \times B| = |A| \cdot |B|,}$$

t.i., divu galīgu kopu Dekarta reizinājuma elementu skaits ir vienāds ar doto kopu elementu skaita reizinājumu.

Pieņemsim, ka

$$A = \{a_1; a_2; \ldots; a_m\}, \quad B = \{b_1; b_2; \ldots; b_n\}.$$

Tad Dekarta reizinājuma $A \times B$ elementus var uzrakstīt taisnstūrveida tabulas veidā:

$$\begin{array}{cccc} (a_1; b_1) & (a_1; b_2) & \ldots & (a_1; b_n) \\ (a_2; b_1) & (a_2; b_2) & \ldots & (a_2; b_n) \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ (a_m; b_1) & (a_m; b_2) & \ldots & (a_m; b_n) \end{array}$$

Šai tabulai ir m rindiņas un n ailes, tāpēc

$$|A \times B| = m \cdot n = |A| \cdot |B|.$$

Lietojot matemātiskās indukcijas principu, var pierādīt šādu apgalvojumu.

3.2. teorēma. [Reizināšanas likums] *Ja A_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ ir galīgas kopas, tad*

$$\boxed{|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \ldots \cdot |A_m|,}$$

t.i., galīga skaita galīgu kopu Dekarta reizinājuma elementu skaits ir vienāds ar doto kopu elementu skaita reizinājumu. Speciālgadījumā, ja

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_m = A,$$

tad

$$\boxed{|A^m| = |\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{m}| = |A|^m,}$$

t.i., galīgas kopas m-tās Dekarta pakāpes elementu skaits ir vienāds ar dotās kopas elementu skaita m-to pakāpi.

3.1. piemērs. *Cik dažādus numurus var sastādīt no no 2 burtiem, aiz kuriem seko trīs cipari, ja tiek izmantoti 32 dažādi burti un 10 dažādi cipari?*

Ar A apzīmēsim 32 burtu kopu, bet ar B visu 10 ciparu kopu. No reizināšanas likuma izriet, ka visu šādu numuru skaits ir vienāds ar

$$|A \times A \times B \times B \times B| = |A| \cdot |A| \cdot |B| \cdot |B| \cdot |B| = 32 \cdot 32 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,024\,000.$$

3.1. teorēmu vispārina šāds apgalvojums.

3.3. teorēma. *Pieņemsim, ka $f : A \longrightarrow B$ ir sirjektīvs attēlojums, ka katrā kopas B elementā attēlojas viens un tas pats kopas A elementu skaits m:*

$$\forall \beta \in B : \ |f^{-1}(\beta)| = m.$$

Tad

$$|A| = m \cdot |B|.$$

3.2. piemērs. *Cik dažādu sakārtotu pāru var sastādīt no 32 burtiem, ja katrā pārī ietilpstošie burti ir dažādi?*

Pieņemsim, ka A ir visu meklējamo pāru kopa, bet B ir pāru no A pirmo komponenšu kopa. Apskatīsim attēlojumu $f : A \longrightarrow B$, ka

$$A \ni (\alpha; \beta) \stackrel{f}{\mapsto} \alpha \in B.$$

Acīmredzot, attēlojums f ir sirjektīvs. Ja $\alpha \in B$, tad $f^{-1}(\alpha)$ sastāv no 31 pāra, kuru pirmās komponentes ir vienādas ar α, bet otrās komponentes ir visi burti, izņemot α. Tātad

$$m = 31.$$

No 3.3. teorēmas izriet, ka kopas A elementu skaits ir vienāds ar

$$|A| = m \cdot |B| = 31 \cdot 32 = 992.$$

3.3. teorēmu var pārformulēt šādā ekvivalentā veidā.

3.4. teorēma. *Ja sakārtota pāra pirmo komponenti var izvēlēties n_1 veidos, un pie jebkuras pirmās komponentes izvēles otro komponenti var izvēlēties n_2 veidos, tad visu šādu sakārtotu pāru skaits ir vienāds ar $n_1 \cdot n_2$.*

3.3. piemērs. *Cik dažādu kortežu ar garumu 3 var sastādīt no 32 burtiem, ja kortežā blakus neatrodas divi vienādi burti?*

Kortežs $(f; p; p)$ nav pieļaujams, bet kortežs $(q; p; q)$ ir pieļaujams.

Ar Q apzīmēsim 32 burtu kopu. Meklējamo kortežu kopa

$$A = \big\{(\alpha; \beta; \gamma) : \ \alpha \neq \beta, \ \beta \neq \gamma\big\}.$$

Ar B apzīmēsim kopu, kas sastāv no kortežu no A pirmo divu komponenšu sakārtotiem pāriem. Apskatīsim attēlojumu $f : A \longrightarrow B$, ka

$$A \ni (\alpha; \beta; \gamma) \overset{f}{\mapsto} (\alpha; \beta) \in B.$$

Acīmredzot, attēlojums f ir sirjektīvs. Ja $(\alpha;\beta) \in B$, tad $f^{-1}\big((\alpha;\beta)\big)$ sastāv no 31 burta - visiem burtiem, izņemot β. Tātad

$$m = 31.$$

Saskaņā ar iepriekšējo piemēru kopas B elementu skaits ir vienāds ar $32 \cdot 31$. No 3.4. teorēmas izriet, ka kopas A elementu skaits ir vienāds ar

$$|A| = m \cdot |B| = 31 \cdot 32 \cdot 31 = 30\,752.$$

Nākamā teorēma vispārina 3.2. un 3.4. teorēmu.

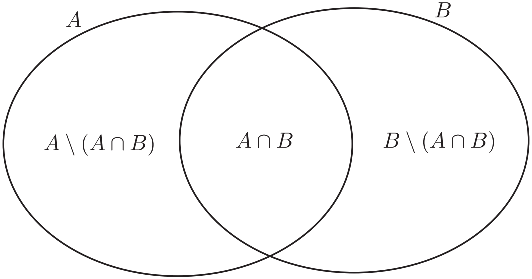
3.5. teorēma. *Ja korteža ar garumu k pirmo komponenti var izvēlēties n_1 veidos, pie jebkuras pirmās komponentes izvēles otro komponenti var izvēlēties n_2 veidos,..., pie jebkuras pirmo $k-1$ komponenšu izvēles k-to komponenti var izvēlēties n_k veidos, tad visu šādu kortežu skaits ir vienāds ar $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$.*

Ar 3.5. teorēmas palīdzību iepriekšējo 3.3. piemēru varēja atrisināt šādi. Pirmo korteža burtu izvēlēties var 32 veidos. Ja pirmais burts jau ir izvēlēts (piemēram, q), tad otro komponenti var izvēlēties 31 veidā (visi burti, izņemot q; pieņemsim, ka otrais burts ir p). Ja pirmie divi burti ir jau izraudzīti, tad 3 burtu var izvēlēties 31 veidā (visi burti, izņemot p). Saskaņā ar 3.5. teorēmu meklējamo kortežu skaits ir vienāds ar $32 \cdot 31 \cdot 31$.

4. Ieslēgšanas un izslēgšanas likums (sieta likums)

4.1. teorēma. [Ieslēgšanas un izslēgšanas likums 2 kopām]
Ja A un B ir galīgas kopas, tad

$$\boxed{|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.} \tag{4.1}$$



▶ Tā kā

$$A = \big(A \setminus (A \cap B)\big) \cup (A \cap B),$$
$$B = \big(B \setminus (A \cap B)\big) \cup (A \cap B),$$
$$A \cup B = \big(A \setminus (A \cap B)\big) \cup (A \cap B) \cup \big(B \setminus (A \cap B)\big),$$

tad, ņemot vērā summas likumu, iegūsim

$$|A| = \big|A \setminus (A \cap B)\big| + |A \cap B|,$$
$$|B| = \big|B \setminus (A \cap B)\big| + |A \cap B|,$$
$$|A \cup B| = \big|A \setminus (A \cap B)\big| + |A \cap B| + \big|B \setminus (A \cap B)\big|,$$

no kurienes seko

$$|A \cup B| = \big(|A| - |A \cap B|\big) + |A \cap B| + \big(|B| - |A \cap B|\big) = \\ = |A| + |B| - |A \cap B|. \blacktriangleleft$$

Lietojot matemātiskās indukcijas principu, var pierādīt šādu apgalvojumu.

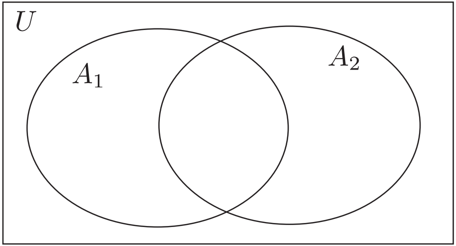
4.2. teorēma. [Ieslēgšanas un izslēgšanas likums]
Ja A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ir galīgas kopas, tad

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = |A| + |B| - |A \cap B| = \sum_{i=1}^{n} |A_k| -$$
$$- \sum_{1 \le i_1 < i_2 \le n} |A_{i_1} \cap A_{i_2}| +$$
$$+ \cdots + (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| +$$
$$+ \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|.$$

Ja $n = 3$, tad iegūsim ieslēgšanas un izslēgšanas likumu 3 kopām:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| +$$
$$+ |A \cap B \cap C|.$$

Izvedīsim vēl vienu noderīgu formulu.



Pieņemsim, ka A_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ir universa U, $|U| = m$, daļas. Tā kā

$$U = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup \left(U \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right),$$

pie tam

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap \left(U \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \emptyset,$$

tad no summas likuma izriet

$$|U| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| + \left|U \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|.$$

Atzīmēsim, ka

$$U \setminus \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i},$$

kur

$$\overline{A_i} = U \setminus A_i$$

ir kopas A_i papildkopa līdz universam U. Tāpēc

$$|U| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| + \left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right|$$

jeb

$$\boxed{\left|\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right| = |U| - \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|.} \tag{4.2}$$

Šo formulu arī sauc par **ieslēgšanas un izslēgšanas likumu (sieta likumu).**

Ja $n = 1$, tad

$$\boxed{|\overline{A_1}| = |U| - |A_1|.} \tag{4.3}$$

Ja $n = 2$, tad

$$\begin{aligned} |\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| &= |U| - |A_1 \cup A_2| = \\ &= |U| - (|A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|) = \\ &= |U| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2| \end{aligned}$$

jeb

$$\boxed{|\overline{A_1} \cap \overline{A_2}| = |U| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|.} \tag{4.4}$$

Ja $n = 3$, tad

$$\begin{aligned} |\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |U| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \\ + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3|. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Interpretēsim pēdējās formulas. Vienkāršības labad apskatīsim gadījumu, kad $n = 2$.

Pieņemsim, ka īpašība α_i $(i = 1, 2)$ izsaka kopas A_i raksturīgo īpašību, t.i., universa U elements ***pieder*** kopai A_i tad un tikai tad kad ***izpildās*** īpašība α_i. Tātad universa U elements ***nepieder*** kopai A_i (un līdz ar pieder kopai $\overline{A_i} = U \setminus A_i$) tad un tikai tad kad ***neizpildās*** īpašība α_i. Apzīmēsim:

N - visu universa U elementu skaits;

$N(\alpha_1)$ - visu to universa U elementu, kuriem izpildās īpašība α_1, skaits;

$N(\alpha_2)$ - visu to universa U elementu, kuriem izpildās īpašība α_2, skaits;

$N(\alpha_1 \alpha_2)$ - visu to universa U elementu, kuriem vienlaicīgi izpildās īpašības α_1 un α_2, skaits;

$N(\alpha_1' \alpha_2')$ - visu to universa U elementu, kuriem neizpildās gan īpašība α_1, gan īpašība α_2, skaits.

Tad formulu (4.1.) var uzrakstīt šādi:

$$\boxed{N(\alpha_1'\alpha_2') = N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) + N(\alpha_1\alpha_2).} \tag{4.6}$$

Tātad, *lai atrastu visu universa elementu, kuriem neizpildās gan īpašība* α_1, *gan īpašība* α_2, *skaitu, no universa elementu skaita ir jāatņem elementu, kuriem izpildās īpašība* α_1, *skaits, jāatņem elementu, kuriem izpildās īpašība* α_2, *skaits, jāpieskaita elementu, kuriem izpildās īpašības* α_1 *un* α_2, *skaits.*

Līdzīgi interpretē gadījumu, kad $n = 3$:

$$\begin{aligned} N(\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3') = N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - N(\alpha_3) + \\ + N(\alpha_1\alpha_2) + N(\alpha_1\alpha_3) + N(\alpha_2\alpha_3) - N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3). \end{aligned} \tag{4.7}$$

4.1. piemērs. *Aptaujājot 100 studentu, tika noskaidrots, ka*

39 no tiem lasa žurnālu A,

40 no tiem lasa žurnālu B,

45 no tiem lasa žurnālu C,

13 no tiem lasa žurnālus A un B,

12 no tiem lasa žurnālus A un C,

16 no tiem lasa žurnālus B un C,

5 no tiem lasa žurnālus A, B un C.

Cik studentu nelasa nevienu žurnālu?

Apzīmēsim:

universs U – visu studentu kopa,

A_1 - visu studentu, kas lasa žurnālu A, kopa,

A_2 - visu studentu, kas lasa žurnālu B, kopa,

A_3 - visu studentu, kas lasa žurnālu C, kopa.

Tad saskaņā ar doto

$$|A_1| = 39,\ |A_2| = 40,\ |A_3| = 45,$$
$$|A_1 \cap A_2| = 13,\ |A_1 \cap A_3| = 12,\ |A_2 \cap A_3| = 16,$$
$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 5.$$

No formulas (4.5) izriet, ka visu to studentu, kas nelasa nevienu no žurnāliem A, B, C, skaits ir vienāds ar

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| =$$
$$= |U| - |A_1| - |A_2| - |A_3| + |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| =$$
$$= 100 - 39 - 40 - 45 + 13 + 12 + 16 - 5 = 12.$$

Protams, varēja izmantot arī formulu (4.7), ja uzskatīt, ka

izpildās īpašība $\alpha_1 \iff$ "students lasa žurnālu A",

izpildās īpašība $\alpha_2 \iff$ "students lasa žurnālu B",

izpildās īpašība $\alpha_3 \iff$ "students lasa žurnālu C".

Atzīmēsim, ka kopa

$$A_1 \cap \cdots \cap A_k \cap \overline{A_{k+1}} \cap \cdots \overline{A_n}$$

nosaka visus tos universa U elementus, kuriem izpildās katra no īpašībām $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, un neizpildās neviena no īpašībām $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n$.

Lai atrastu šādu elementu skaitu, izmanto formulu (4.2), uzskatot kopu $A_1 \cap \cdots \cap A_k$ par universu un formulu attiecina uz kopām:

$$(A_1 \cap \cdots \cap A_k) \cap A_{k+1}, \ldots, (A_1 \cap \cdots \cap A_k) \cap A_n.$$

Mūsu piemērā iegūsim šādus rezultātus.

1. Kopas $A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}$ gadījumā universs ir $\mathcal{U} = A_1$, bet formulu (4.4) attiecina uz kopām: $\mathcal{A}_1 = A_1 \cap A_2$, $\mathcal{A}_2 = A_1 \cap A_3$. Tad

$$A_1 \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} = |\mathcal{U}| - |\mathcal{A}_1| - |\mathcal{A}_2| + |\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2| =$$
$$= |A_1| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 39 - 13 - 12 + 5 = 19.$$

Tātad *visu to studentu, kas lasa tikai žurnālu A (t.i., lasa žurnālu A, bet nelasa žurnālus B un C), skaits ir vienāds ar 19.*

2. Kopas $\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}$ gadījumā universs ir $\mathcal{U} = A_2$, bet formulu (4.4) attiecina uz kopām: $\mathcal{A}_1 = A_1 \cap A_2$, $\mathcal{A}_2 = A_2 \cap A_3$. Tad

$$|\overline{A_1} \cap A_2 \cap \overline{A_3}| = |\mathcal{U}| - |\mathcal{A}_1| - |\mathcal{A}_2| + |\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2| =$$
$$= |A_2| - |A_1 \cap A_2| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 40 - 13 - 16 + 5 = 16.$$

Tātad *visu to studentu, kas lasa tikai žurnālu B (t.i., lasa žurnālu B, bet nelasa žurnālus A un C), skaits ir vienāds ar 16.*

3. Kopas $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3$ gadījumā universs ir $\mathcal{U} = A_3$, bet formulu (4.4) attiecina uz kopām: $\mathcal{A}_1 = A_1 \cap A_3$, $\mathcal{A}_2 = A_2 \cap A_3$. Tad

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap A_3| = |\mathcal{U}| - |\mathcal{A}_1| - |\mathcal{A}_2| + |\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2| =$$
$$= |A_3| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 45 - 12 - 16 + 5 = 22.$$

Tātad *visu to studentu, kas lasa tikai žurnālu C (t.i., lasa žurnālu C, bet nelasa žurnālus A un B), skaits ir vienāds ar 22.*

4. Kopas $A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}$ gadījumā universs ir $\mathcal{U} = A_1 \cap A_2$, bet formulu (4.3) attiecina uz kopu: $\mathcal{A}_1 = A_1 \cap A_2 \cap A_3$. Tad

$$|A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}| = |\mathcal{U}| - |\mathcal{A}_1| = |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 13 - 5 = 8.$$

Tātad *visu to studentu, kas lasa tikai žurnālu A un B (t.i., lasa žurnālus A un B, bet nelasa žurnālu C), skaits ir vienāds ar 8.*

5. Kopas $A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3$ gadījumā universs ir $\mathcal{U} = A_1 \cap A_3$, bet formulu (4.3) attiecina uz kopu: $\mathcal{A}_1 = A_1 \cap A_2 \cap A_3$. Tad

$$|A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3| = |\mathcal{U}| - |\mathcal{A}_1| = |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 12 - 5 = 7.$$

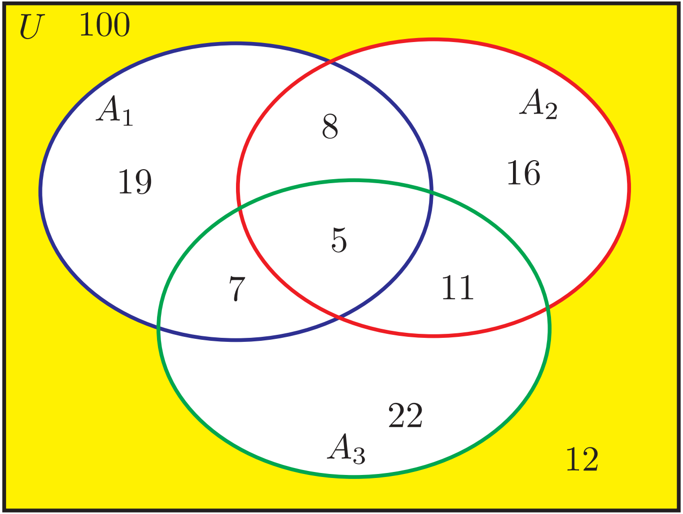
Tātad *visu to studentu, kas lasa tikai žurnālu A un C (t.i., lasa žurnālus A un C, bet nelasa žurnālu B), skaits ir vienāds ar 7.*

6. Kopas $\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3$ gadījumā universs ir $\mathcal{U} = A_2 \cap A_3$, bet formulu (4.3) attiecina uz kopu: $\mathcal{A}_1 = A_1 \cap A_2 \cap A_3$. Tad

$$|\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3| = |\mathcal{U}| - |\mathcal{A}_1| = |A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 16 - 5 = 11.$$

Tātad *visu to studentu, kas lasa tikai žurnālu B un C (t.i., lasa žurnālus B un C, bet nelasa žurnālu A), skaits ir vienāds ar 11.*

Iegūtie rezultāti ir apkopoti nākamajā zīmējumā.


U
100
A1
A2
A3
19
8
16
5
7
11
22
12

4.2. piemērs. *Aptaujājot 120 iedzīvotājus, noskaidroja, ka*

regulāri TV skatās 80,

regulāri radio klausās 60,

regulāri lasa avīzes 55,

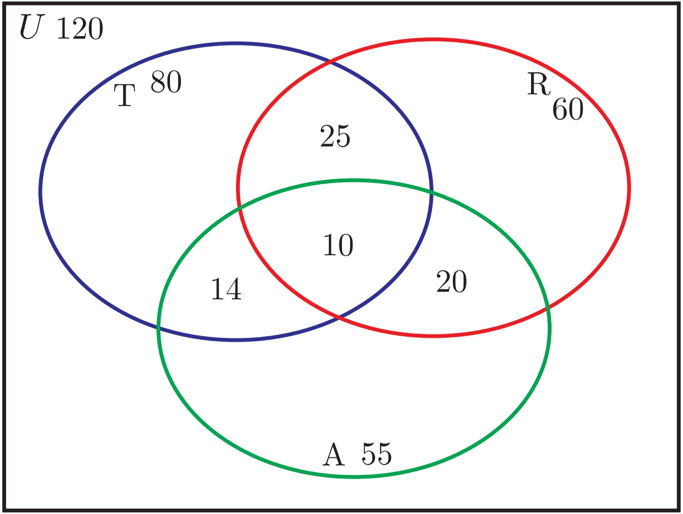
regulāri izmanto visus trīs informācijas līdzekļus 10,

regulāri izmanto tikai radio un TV 25,

regulāri izmanto tikai radio un avīzes 20,

regulāri izmanto tikai avīzes un TV 14.

1. *Cik no aptaujātajiem izmanto tikai TV?*
2. *Cik no aptaujātajiem izmanto tikai radio?*
3. *Cik no aptaujātajiem izmanto tikai avīzes?*
4. *Cik no aptaujātajiem neizmanto nevienu no informācijas līdzekļiem?*


U 120
T 80
R 60
25
10
14
20
A 55

Apzīmēsim:

universs U – visu aptaujāto personu kopa,

T - visu aptaujāto, kas skatās TV, kopa,

R - visu aptaujāto, kas klausās radio, kopa,

A - visu aptaujāto, kas lasa avīzes, kopa.

No zīmējuma redzam, ka

$$|T \cap \overline{R} \cap \overline{A}| = 80 - 25 - 14 - 10 = 31,$$

t.i., *visu to, kas skatās tikai TV, skaits ir 31;*

$$|\overline{T} \cap R \cap \overline{A}| = 60 - 25 - 20 - 10 = 5,$$

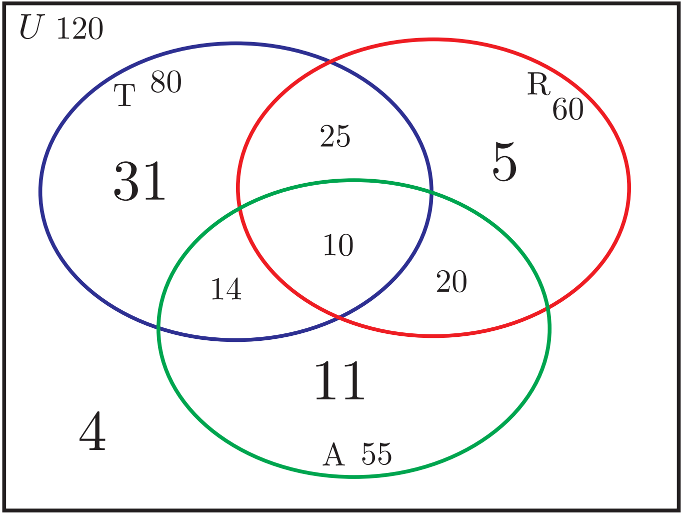
t.i., *visu to, kas klausās tikai radio, skaits ir 5;*

$$|\overline{T} \cap \overline{R} \cap A| = 55 - 14 - 20 - 10 = 11,$$

t.i., *visu to, kas lasa tikai avīzes, skaits ir 11.*

Visu to, kas neizmanto nevienu no informācijas līdzekļiem, skaits ir vienāds ar

$$120 - (31 + 5 + 11 + 25 + 14 + 10 + 20) = 4.$$



U 120
T 80
R 60
A 55
31
25
5
10
14
20
11
4

5. Variācijas ar atkārtojumiem

Pieņemsim, ka $k \in \mathbb{N}$. Par **k-variāciju ar atkārtojumiem pamatkopā X, $|X| = n > 0$,** sauc patvaļīgu kopas

$$X^k = \underbrace{X \times \cdots \times X}_{k}$$

elementu. Visu k-variāciju ar atkārtojumiem pamatkopā X, $|X| = n$, skaitu apzīmē ar $\overline{A}_n^k$.

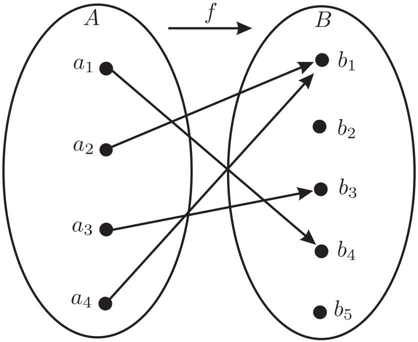
No reizināšanas likuma izriet

$$\boxed{\overline{A}_n^k = n^k.}$$

Ērtības labad uzskata, ka $\overline{A}_n^0 \overset{\text{def}}{=} 1$, kaut arī netiek definēts 0-variācijas ar atkārtojumiem jēdziens.

Tātad ***k-variācija ar atkārtojumiem pamatkopā X, $|X| = n$, ir kortežs ar garumu k, kura komponentes pieder kopai X!***

5.1. piemērs. *Visu k elementu kopas $A = \{a_1; a_2; \ldots; a_k\}$ attēlojumu n elementu kopā $B = \{b_1; b_2; \ldots; b_n\}$ skaits ir vienāds ar n^k.*



Starp visiem šādiem attēlojumiem un kopas B^k elementiem var nodibināt savstarpēji viennozīmīgu atbilstību pēc likuma: attēlojumam f atbilst kortežs

$$\big(f(a_1); f(a_2); \ldots; f(a_k)\big)$$

ar garumu k. *Tāpēc visu šādu attēlojumu skaits ir vienāds ar visu* *k-variāciju ar atkārtojumiem pamatkopā B skaitu* $\overline{A}_n^k = n^k$.

Mūsu konkrētajā piemērā attēlojumam f (skat. zīm.) atbilst kortežs

$$(b_4; b_1; b_3; b_1).$$

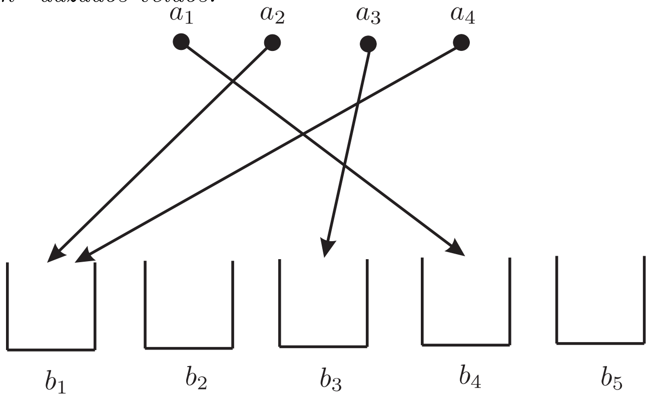
Visu attēlojumu $f : A \to B$, ja $|A| = k = 4$ un $|B| = n = 5$, skaits ir vienāds ar

$$\overline{A}_5^4 = 5^4 = 625.$$

5.1. piezīme. Lai atrastu attēlojumu f skaitu, tika skaitīti citi objekti - korteži, kuru bija tik pat daudz cik attēlojumu.

Tātad, lai noteiktu kādu doto objektu skaitu, var skaitīt citus objektus, kuru ir tikpat daudz, cik doto objektu!

5.2. piemērs. *k sanumurētus priekšmetus var izvietot n sanumurētās urnās n^k dažādos veidos.*



Šādu izvietojumu ir tik pat daudz, cik attēlojumu iepriekšējā piemērā, t.i., n^k. Mūsu konkrētajā gadījumā $n^k = 5^4$.

5.3. piemērs. *Kāpēc nodaļā "Loģikas algebra" apskatījām tieši 16 divu mainīgo loģiskās operācijas (divu mainīgo Būla funkcijas)?*

Apskatīsim patiesumvērtību kopu $B = \{0; 1\}$. Visu divu mainīgo loģiskās operāciju skaits ir vienāds ar visu attēlojumu

$$f : B \times B \longrightarrow B$$

skaitu. Tā kā $|B \times B| = 2^2 = 4$, $|B| = 2$, tad visu šādu attēlojumu skaits ir vienāds ar

$$|B|^{|B \times B|} = 2^{(2^2)} = 2^4 = 16.$$

Acīmredzot, visu n mainīgo Būla funkciju skaits ir vienāds ar

$$|B|^{(|B|^n)} = 2^{(2^n)}.$$

5.4. piemērs. *Cik dažādu piecciparu tālruņa numuru var sastādīt no 9 cipariem* $1, 2, \ldots, 9$*?*

Šādi piecciparu tālruņa numuri atrodas savstarpēji viennozīmīgā atbilstībā ar 5-variācijām ar atkārtojumiem pamatkopā

$$X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}.$$

Tāpēc visu šādu tālruņa numuru skaits ir vienāds ar

$$\overline{A}_9^5 = 9^5 = 6561.$$

5.2. piezīme. Atzīmēsim, ka termins *"variācijas ar atkārtojumiem"* nav sevišķi veiksmīgs. Labāk būtu teikt vienkārši *"variācijas"* vai *"variācijas ar iespējamiem atkārtojumiem"*, jo iepriekšējā piemēra nosacījumus apmierina tālruņa numurs **35147**, kurā elementi neatkārtojas. Termina *"variācijas ar atkārtojumiem"* formāla izpratne var novest pie domas, ka jebkurā *"variācijā ar atkārtojumiem"* elementiem obligāti ir jāatkārtojas, kas nav pareizi.

5.5. piemērs. *Kopas X, kas sastāv no n elementiem, visu apakškopu skaits ir vienāds ar 2^n, t.i.,*

$$\boxed{\left|\mathcal{P}(X)\right| = 2^{|X|}.}$$

Pieņemsim, ka $A \subset X$. Par **kopas A raksturfunkciju kopā X** sauc attēlojumu $\varphi_X^A : X \to \{0;1\}$, ka

$$\forall x \in X : \ \varphi_X^A(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \text{ja} \quad x \in A, \\ 0, & \text{ja} \quad x \neq A. \end{cases}$$

Nodibināsim atbilstību starp kopas X visām apakškopām A un funkcijām $f : X \to \{0;1\}$ šādi: apakškopai A atbilst tās raksturfunkcija φ_X^A. *Šī atbilstība ir savstarpēji viennozīmīga.* Atzīmēsim tikai, ka jebkura funkcija $f : X \to \{0;1\}$ ir kopas $A = f^{-1}(1)$ raksturfunkcija kopā X, t.i., $f = \varphi_X^A$.

Tā kā visu funkciju $f : X \to \{0;1\}$ skaits ir vienāds ar $2^{|X|}$, tad $\left|\mathcal{P}(X)\right| = 2^{|X|}$.

5.6. piemērs. *Cik dažādos veidos 6 dažādas konfektes var sadalīt starp 3 bērniem?*

Balstoties uz piemēru par priekšmetu izvietojumu urnās, secinām, ka visu šādu veidu skaits ir

$$3^6 = 729.$$

5.7. piemērs. *Cik dažādu piecciparu tālruņa numuru var sastādīt no cipariem 0,1,2, ja tālruņa numurs nedrīkst sākties ar 0?*

1. paņēmiens.

Ja tālruņa numurs sākas ar 1, tad pārējie cipari var būt 0,1,2. Visu šādu numuru skaits ir

$$3^4 = 81.$$

Ja tālruņa numurs sākas ar 2, tad pārējie cipari var būt 0,1,2. Visu šādu numuru skaits ir

$$3^4 = 81.$$

Tātad meklējamo tālruņa numuru skaits ir vienāds ar

$$3^4 + 3^4 = 81 + 81 = 162.$$

2. paņēmiens. Ja neņemt vērā ierobežojumu (numurs nedrīkst sākties ar 0), tad tālruņa numuru skaits ir vienāds ar

$$3^5 = 243.$$

Numuru, kas atbilst ierobežojumam (t.i., sākas ar nulli), skaits ir vienāds ar

$$3^4 = 81.$$

Tātad meklējamais numuru skaits ir vienāds ar starpību

$$3^5 - 3^4 = 243 - 81 = 162.$$

5.3. piezīme. 1. paņēmienā izmantojām summas likumu:

$$ja\ A \cap B = \emptyset,\ tad\ |A \cup B| = |A| + |B|.$$

Savukārt 2. paņēmienā izmantojam īpašību: *ja X ir galīga kopa, bet $A \subset X$, tad*

$$|A| = |X| - |\complement A|,$$

kur $\complement A = X \setminus A$ ir kopas A papildkopa līdz kopai X. Interpretācija šāda:

- kopas A elementi - meklējamie numuri,
- kopas $\complement A$ elementi - numuri, kas neatbilst uzdevuma nosacījumiem,
- kopas X elementi - visi numuri (t.i., visi piecciparu numuri, kas sastāv no cipariem 0,1,2).

6. Variācijas bez atkārtojumiem

Pieņemsim, ka $k \in \mathbb{N}$. Par **k-variāciju bez atkārtojumiem pamatkopā X, $|X| = n > 0$,** sauc patvaļīgu kopas

$$X^k = \underbrace{X \times \cdots \times X}_{k}$$

elementu - kortežu, kura visas komponentes ir savstarpēji dažādas. Visu k-variāciju bez atkārtojumiem pamatkopā X, $|X| = n$, skaitu apzīmē ar A_n^k.

Tātad ***k-variācija bez atkārtojumiem pamatkopā X, $|X| = n$, ir kortežs ar garumu k, kura komponentes pieder kopai X un kura visas komponentes ir savstarpēji dažādas!***

Lai atrastu A_n^k, spriedīsim šādi. Apskatīsim k-variāciju bez atkārtojumiem pamatkopā X, pie tam $k \leq n = |X|$. Pirmo komponenti var izraudzīties n veidos (tik veidos, cik elementu ir kopā X). Ja pirmā komponente ir jau izraudzīta, tad otro komponenti var izraudzīties $n-1$ veidos. Tātad pirmās divas komponentes var izraudzīties $n(n-1)$

veidos. Turpinot šos spriedumus, iegūsim, ka

$$\boxed{A_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1).}$$

Sareizināsim abas pēdējās formulas abas puses ar $(n-k)!$, tad

$$(n-k)!A_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1)\underbrace{(n-k)(n-k-1)\cdots 2\cdot 1}_{(n-k)!}.$$

jeb

$$(n-k)!A_n^k = n!$$

jeb

$$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.}$$

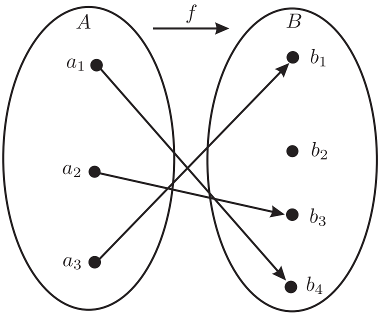
Acīmredzot, ka

$$A_n^k = 0, \text{ ja } k > n,$$

t.i., *ja* $k > n$, *tad neeksistē* k*-variācijas ar atkārtojumiem* n *elementu pamatkopā.* Šajā gadījumā pamatkopas X elementu ir par “maz”, lai kortežu ar garumu k varētu “nokomplektēt” ar savstarpēji dažādām komponentēm.

Ērtības labad uzskata, ka $A_n^0 \overset{\text{def}}{=} 1$ $(n = 0, 1, \ldots)$, kaut arī netiek definēts 0-variācijas bez atkārtojumiem jēdziens.

6.1. piemērs. *Visu k elementu kopas $A = \{a_1; a_2; \ldots; a_k\}$ injektīvu attēlojumu n elementu kopā $B = \{b_1; b_2; \ldots; b_n\}$ skaits ir vienāds ar A_n^k.*



Starp visiem šādiem attēlojumiem un visām k-variācijām bez atkārtojumiem pamatkopā B var nodibināt savstarpēji viennozīmīgu atbilstību pēc likuma: attēlojumam f atbilst kortežs

$$\big(f(a_1); f(a_2); \dots; f(a_k)\big)$$

ar garumu k (tā kā f ir injekcija, tad visas šī korteža komponentes ir savstarpēji dažādas). *Tāpēc visu šādu attēlojumu skaits ir vienāds ar visu k-variāciju bez atkārtojumiem pamatkopā B skaitu A_n^k.*

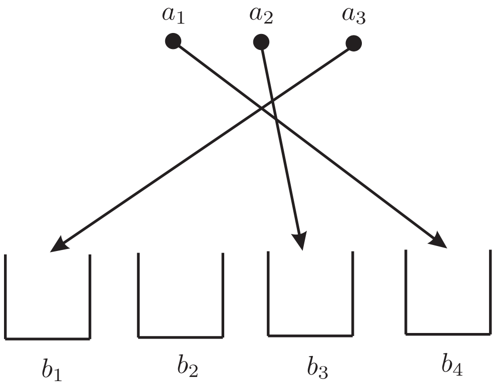
Mūsu konkrētajā piemērā attēlojumam f (skat. zīm.) atbilst kortežs

$$(b_4; b_3; b_1).$$

Visu attēlojumu $f : A \to B$, ja $|A| = k = 3$ un $|B| = n = 4$, skaits ir vienāds ar

$$A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24.$$

6.2. piemērs. *k sanumurētus priekšmetus var izvietot n sanumurētās urnās A_n^k dažādos veidos, ja katrā urnā izvietot ne vairāk kā vienu priekšmetu.*



Šādu izvietojumu ir tik pat daudz, cik attēlojumu iepriekšējā piemērā, t.i., A_n^k. Mūsu konkrētajā gadījumā $A_4^3 = 24$.

6.3. piemērs. *Sacensībās piedalās 24 dalībnieki. Cik dažādos veidos var tikt sadalītas pirmās 3 vietas?*

$$A_{24}^{3} = 24 \cdot 23 \cdot 22 = 12144.$$

6.4. piemērs. *Cik dažādos veidos 4 vēstules var iemest 11 pastkastītēs, ja vienā pastkastītē drīkst iemest ne vairāk kā vienu vēstuli?*

Balstoties uz piemēru par priekšmetu izvietojumu urnās, secinām, ka visu šādu veidu skaits ir vienāds ar

$$A_{11}^{4} = 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 7920.$$

7. Permutācijas bez atkārtojumiem

Par **permutāciju bez atkārtojumiem pamatkopā X, $|X| = n > 0$,** sauc patvaļīgu n-variāciju bez atkārtojumiem pamatkopā X. Visu permutāciju bez atkārtojumiem pamatkopā X, $|X| = n$, skaitu apzīmē ar P_n. Tātad

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$$

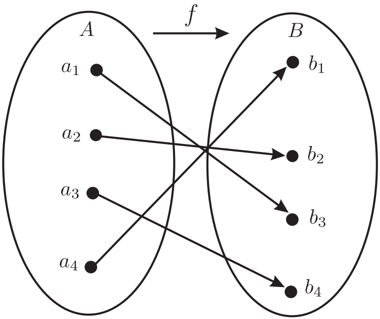
jeb

$$\boxed{P_n = n!.}$$

Atgādināsim tikai, ka $0! \overset{\text{def}}{=} 1$.

Tātad ***permutācija bez atkārtojumiem pamatkopā X, $|X| = n$, ir kortežs ar garumu n, kura komponentes pieder kopai X un kura visas komponentes ir savstarpēji dažādas!***

7.1. piemērs. *Visu n elementu kopas $A = \{a_1; a_2; \ldots; a_n\}$ bijektīvu attēlojumu n elementu kopā $B = \{b_1; b_2; \ldots; b_n\}$ skaits ir vienāds ar $n!$.*



Starp visiem šādiem attēlojumiem un visām permutācijām bez atkārtojumiem pamatkopā B var nodibināt savstarpēji viennozīmīgu atbilstību pēc likuma: attēlojumam f atbilst kortežs

$$\big(f(a_1); f(a_2); \ldots; f(a_n)\big)$$

ar garumu n (tā kā f ir bijekcija, tad visas šī korteža komponentes ir savstarpēji dažādas). *Tāpēc visu šādu attēlojumu skaits ir vienāds ar visu permutāciju bez atkārtojumiem pamatkopā B skaitu $P_n = n!$.*

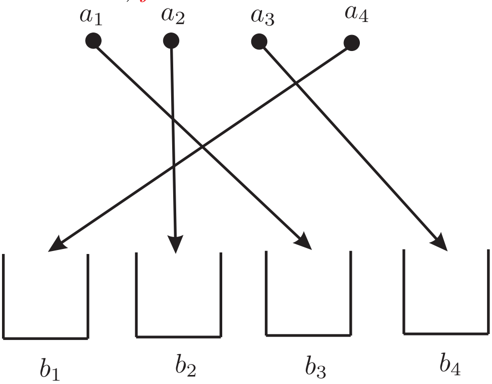
Mūsu konkrētajā piemērā attēlojumam f (skat. zīm.) atbilst kortežs

$$(b_3; b_2; b_4; b_1).$$

Visu attēlojumu $f : A \to B$, ja $|A| = |B| = n = 4$, skaits ir vienāds ar

$$P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

7.2. piemērs. *n sanumurētus priekšmetus var izvietot n sanumurētās urnās P_n dažādos veidos, ja katrā urnā izvietot tieši vienu priekšmetu.*



Šādu izvietojumu ir tik pat daudz, cik attēlojumu iepriekšējā piemērā, t.i., P_n. Mūsu konkrētajā gadījumā $P_4 = 4! = 24$.

7.3. piemērs. *Cik dažādos veidos 6 cilvēki var apsēsties 6 krēslos?* (Normāli cilvēki normāli sēž krēslos)

$$P_6 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

7.4. piemērs. *Cik dažādus vārdus var sastādīt no vārda "marts" burtiem, mainot tos vietām?*

$$P_5 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

7.5. piemērs. *Sapulcē jāuzstājas pieciem oratoriem A, B, C, D, E. Cik dažādos veidos var sastādīt oratoru sarakstu, ja*

a) B nedrīkst uzstāties pirms A,

b) B jāuzstājas uzreiz pēc A.

a) Ja nebūtu ierobežojuma (B nedrīkst uzstāties pirms A), tad varētu izveidot

$$5! = 120$$

sarakstus. Ir iespējami 5 varianti atkarībā no B uzstāšanās numura.

1. $B****$ Šāda situācija neatbilst ierobežojumam, un tāpēc ir jāizslēdz 4! iespējas.
2. $*B***$ Ja A atrodas 2., 3. vai 4. pozīcijā, tad tas neatbilst ierobežojumam, un tāpēc ir jāizslēdz 3!+3!+3! iespējas.
3. $**B**$ Ja A atrodas 4. vai 5. pozīcijā, tad tas neatbilst ierobežojumam, un tāpēc ir jāizslēdz 3!+3! iespējas.
4. $***B*$ Ja A atrodas 5. pozīcijā, tad tas neatbilst ierobežojumam, un tāpēc ir jāizslēdz 3! iespējas.
5. $****B$ Visas šādas iespējas atbilst ierobežojumam.

Tātad visu sarakstu, kuros B nedrīkst uzstāties pirms A, skaits ir vienāds ar

$$5! - 4! - (3! + 3! + 3!) - (3! + 3!) - 3! = 60.$$

b) "B jāuzstājas uzreiz pēc A" atbilst šādiem gadījumiem:

$$AB***, *AB**, **AB*, ***AB.$$

To skaits ir

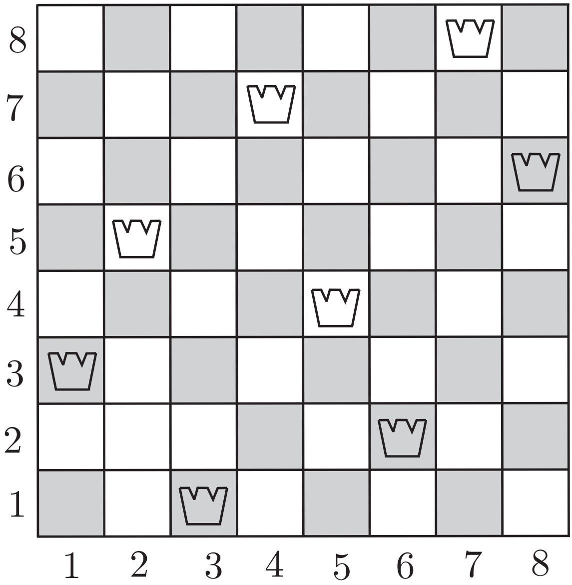
$$3! + 3! + 3! + 3! + = 4! = 24.$$

7.6. piemērs. *Cik dažādos veidos 8 šaha torņus var izvietot uz šaha dēļa tā, lai tie nesistu viens otru?*

Šādu izvietojumu skaits ir vienāds ar $P_8 = 8!$. Zīmējumā ir attēlots torņu izvietojums, kas atbilst permutācijai bez atkārtojumiem:

$$(3; 5; 1; 7; 4; 2; 8; 6);$$

kompononotes numurs norāda torņa horizontāli, bet pati komponente - vertikāli.


8
7
6
5
4
3
2
1
1 2 3 4 5 6 7 8

8. Kombinācijas bez atkārtojumiem

Par k**-kombināciju bez atkārtojumiem pamatkopā** X, $|X| = n > 0$, sauc patvaļīgu kopas X apakškopu, kas sastāv no k elementiem. Visu kombināciju bez atkārtojumiem pamatkopā X, $|X| = n$, skaitu apzīmē ar C_n^k vai $\binom{n}{k}$.

Tā kā kopai X, $|X| = n$, ir tikai viena apakškopa, kas sastāv no 0 elementiem (tā ir tukšā kopa $\emptyset$), tad

$$C_n^0 = 1.$$

Tā kā kopai X, $|X| = n$, ir tieši n apakškopas, kas sastāv no 1 elementa (tās ir vienelementa apakškopas $\{x\}$, kur $x \in X$), tad

$$C_n^1 = n.$$

Tā kā kopai X, $|X| = n$, ir tikai viena apakškopa, kas sastāv no n elementiem (tā ir pati kopa X), tad

$$C_n^n = 1.$$

Tā kā kopai X, $|X| = n$, nav nevienas apakškopas, kas sastāv no

$k > n$ elementiem, tad

$$C_n^k = 0 \ \ (k > n).$$

Lai atrastu C_n^k, apskatīsim piemēru.

Ja pamatkopa ir $X = \{a; b; c; d\}$, tad no tās var izveidot $C_4^3 = 4$ 3-kombinācijas bez atkārtojumiem:

$$\{b; c; d\}, \ \{a; c; d\}, \ \{a; b; d\}, \ \{a; b; c\}.$$

Ja katru no šīm apakškopām uzlūkot par pamatkopu, tad katrai šādai pamatkopai atbildīs $P_3 = 3! = 6$ permutācijas bez atkārtojumiem:

$\{b; c; d\}$	$\{a; c; d\}$	$\{a; b; d\}$	$\{a; b; c\}$
$(b; c; d)$	$(a; c; d)$	$(a; b; d)$	$(a; b; c)$
$(b; d; c)$	$(a; d; c)$	$(a; d; b)$	$(a; c; b)$
$(c; b; d)$	$(c; a; d)$	$(b; a; d)$	$(b; a; c)$
$(c; d; b)$	$(c; d; a)$	$(b; d; a)$	$(b; c; a)$
$(d; b; c)$	$(d; a; c)$	$(d; a; b)$	$(c; a; b)$
$(d; c; b)$	$(d; c; a)$	$(d; b; a)$	$(c; b; a)$

Ieguvām visas $A_4^3 = 24$ 3-variācijas bez atkārtojumiem pamatkopā X. Tātad ***visu 3-variāciju bez atkārtojumiem pamatkopā*** X ***skaits ir*** $P_3 = 3! = 6$ ***reizes lielāks par visu 3-kombināciju bez atkārtojumiem pamatkopā*** X ***skaitu:***

$$A_4^3 = C_4^3 \cdot P_3.$$

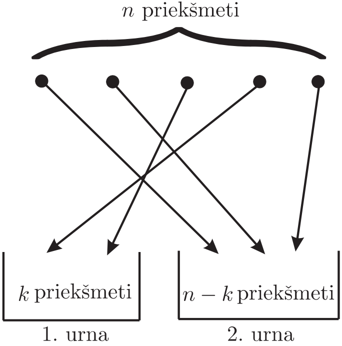
Vispārīgā gadījumā:

$$A_n^k = C_n^k \cdot P_k$$

jeb

$$\boxed{C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}.}$$

8.1. piemērs. *Cik dažādos veidos n priekšmetus var izvietot 2 urnās tā, lai 1. urnā būtu k priekšmeti, bet otrajā urnā $n-k$ priekšmeti?* Atbilde: C_n^k.



Acīmredzot, ir spēkā **simetrijas likums**:

$$\boxed{C_n^k = C_n^{n-k}.}$$

8.2. piemērs. *Šaha turnīrā piedalījās 20 šahisti, katrs ar katru izspēlēja 1 partiju (riņķa sistēma). Cik pavisam partiju tika izspēlēts?*

$$C_{20}^{2} = \frac{20 \cdot 19}{1 \cdot 2} = 190.$$

8.3. piemērs. *Kādreiz tika spēlēta spēle "Sportloto" 6 no 49. Cik dažādos veidos varēja aizpildīt kartiņas?*

$$C_{49}^{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = 13\,983\,816.$$

8.4. piemērs. *Cik dažādus kortežus no $n+k$ komponenetēm var izveidot, ja kortežs satur k komponenetes a un n komponentes x?*

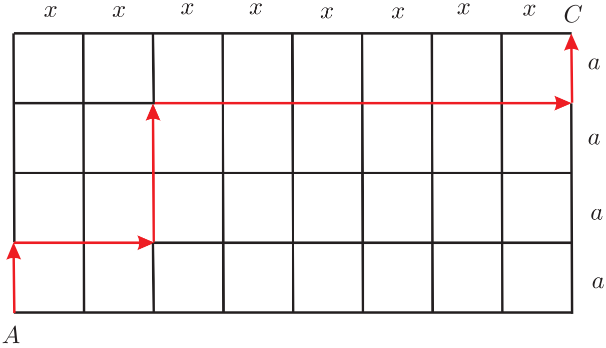
Piemēram, $k=2$ komponentes a un $n=3$ komponentes x.

$$(a;a;x;x;x),\quad (a;x;x;a;x),\ldots$$

Apskatīsim kopu $\{1;2;\ldots;n+k\}$. Jebkura šīs kopas k elementu apakškopa viennozīmīgi nosaka kortežu:
$\{1;2\}$ - 1. un 2. vietā atrodas a;
$\{1;4\}$ - 1. un 4. vietā atrodas a.
Tātad visu meklējamo kortežu skaits ir vienāds ar

$$C_{n+k}^{n}=C_{n+k}^{k}=C_5^2=\frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}=10.$$

8.5. piemērs. *Cik dažādos veidos var nokļūt no punkta A uz punktu C, ja drīkst pārvietoties tikai pa labi vai uz augšu?*



Katru šādu maršrutu var raksturot ar kortežu, piemēram, zīmējumā attēlotajam maršrutam atbilst kortežs

$$(a; x; x; a; a; x; x; x; x; x; x; a),$$

kurš satur 4 komponentes a un 8 komponentes x. No iepriekšējā piemēra izriet, ka visu šādu kortežu (un līdz ar to maršrutu) skaits ir vienāds ar

$$C_{4+8}^4 = C_{12}^4 = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 495.$$

8.6. piemērs. *Vienam kolekcionāram ir 11 maiņas grāmatas, bet otram - 15 grāmatas maiņai. Cik veidos viņi var samainīties ar 3 grāmatām?*

Ņemot vērā reizināšanas likumu, secinām, ka šādu veidu skaits ir

$$C_{11}^3 \cdot C_{15}^3 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 75\,075.$$

Atzīmēsim svarīgu kombināciju bez atkārtojumiem skaita īpašību - **Paskāla likumu**:

$$\boxed{C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1},}$$

ar kura palīdzību tiek izveidots **Paskāla trijstūris**:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \dots & & & &
\end{array}$$

Tieši no kombināciju bez atkārtojumiem definīcijas izriet, ka visu kopas X, kas sastāv no n elementiem, apakškopu skaitu 2^n var aprēķināt šādi:

$$\boxed{C_n^0 + C_1^0 + \cdots + C_n^n = 2^n.}$$

Skaitļus C_n^k sauc arī par **binomiālkoeficientiem**, jo tie ietilpst **binomiālajā formulā** jeb **Ņūtona binoma formulā**:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, x^{n-k} \, y^k, \tag{8.8}$$

kur $n \in \mathbb{N}$.

Ja $n = 1$, tad

$$x + y = x + y;$$

ja $n = 2$, tad

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2;$$

ja $n = 3$, tad

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

9. Permutācijas ar atkārtojumiem

Mēs jau zinām, ka no vārda "marts", mainot burtus vietām, var izveidot 5! vārdus. Bet vai no vārda "matemātika" varēs izveidot 10! jaunus vārdus? Nē, šādu vārdu būs mazāk, jo daži burti šajā vārdā atkārtojas.

Par permutāciju ar atkārtojumiem

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}, \tag{9.9}$$

kur $k_1, k_2, \ldots, k_n \geq 0$ un $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n > 0$, **pamatkopā** $X = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ sauc kortežu ar k komponentēm, kurā

elements x_1 ieiet k_1 reizes;

...

elements x_n ieiet k_n reizes.

Šādu kortežu sauc arī par k**-permutāciju ar atkārtojumiem** (9.9) **pamatkopā** X.

Visu šādu permutāciju skaitu apzīmē ar

$$P(k_1; k_2; \dots; k_n).$$

Matricu (9.9) sauc par attiecīgās **permutācijas** (t.i., permutācijas, kurā x_i ieiet k_i reizes) **sastāvu**. Ja visi $k_i > 0$, tad sastāvu sauc par **pozitīvu**. Ja vismaz viens $k_i = 0$, tad sastāvu sauc par **nenegatīvu**.

9.1. piemērs. $X = \{a; b; c\}$. Korteža

$$(a; b; a; a; c; b; b; b; c)$$

sastāvs ir

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Visu permutāciju ar atkārtojumiem (9.9) pamatkopā $X = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ skaitu aprēķina pēc formulas

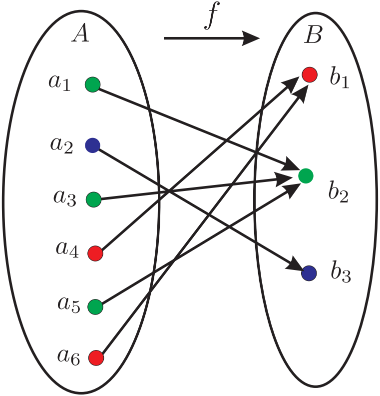
$$\boxed{P(k_1; k_2; \dots; k_n) = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_n)!}{k_1! k_2! \cdots k_n!};}$$

pierādījumu skat., piemēram, [14, 173. lpp.].

9.2. piemērs. *Visu attēlojumu* $f : A \longrightarrow B$*,*
$A = \{a_1; \ldots; a_k\}$, $|A| = k = k_1 + \cdots + k_n$, $B = \{b_1; \ldots; b_n\}$, $|B| = n$, *kuros elementa* b_i *pirmtēls satur* k_j *kopas* A *elementu, t.i.,*

$$\left|f^{-1}(b_i)\right| = k_j,$$

skaits ir vienāds ar $P(k_1; k_2; \ldots; k_n)$*.*



Starp visiem šādiem attēlojumiem un kopas B^k elementiem var nodibināt savstarpēji viennozīmīgu atbilstību pēc likuma: attēlojumam f atbilst kortežs

$$\big(f(a_1); f(a_2); \ldots; f(a_k)\big)$$

ar garumu k. *Tāpēc visu šādu attēlojumu skaits ir vienāds ar visu variāciju ar atkārtojumiem*

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

pamatkopā B skaitu $P(k_1; k_2; \ldots; k_n)$.

Mūsu konkrētajā piemērā attēlojumam f (skat. zīm.) atbilst kortežs

$$(b_2; b_3; b_2; b_1; b_2; b_1).$$

Visu attēlojumu $f : A \to B$, ja $|A| = k = 6$, $|B| = n = 3$ un tieši

$k_1 = 2$ kopas A elementi attēlojas elementā $b_1 \in B$,

$k_2 = 3$ kopas A elementi attēlojas elementā $b_2 \in B$,

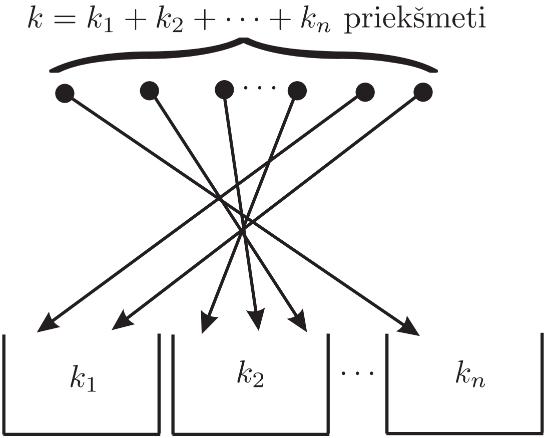
$k_3 = 1$ kopas A elementi attēlojas elementā $b_3 \in B$, skaits ir vienāds ar visu permutāciju ar atkārtojumiem

$$\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

pamatkopā B skaitu

$$P(2;3;1) = \frac{(2+3+1)!}{2!3!1!} = 60.$$

9.3. piemērs. *Cik dažādos veidos* $k = k_1 + \cdots + k_n$ *sanumurētus priekšmetus var izvietot* n *sanumurētās urnās tā, lai 1. urnā būtu* k_1 *priekšmets,..., n-tajā urnā būtu* k_n *priekšmets?*
Atbilde: $P(k_1; k_2; \ldots; k_n)$.



No permutāciju un variāciju ar atkārtojumiem definīcijām izriet šāda svarīga sakarība:

$$\boxed{\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_n=k\\k_1,\ldots,k_n\geq 0}} P(k_1;k_2;\ldots;k_n) = n^k = \overline{A}_n^k.} \tag{9.10}$$

Ja permutāciju ar atkārtojumiem skaitu sasummēt pa visiem iespējamiem (nenegatīviem) sastāviem, tad iegūsim visu k-variāciju ar atkārtojumiem dotajā n elementu pamatkopā X skaitu!!!

Skaitļus $P(k_1; k_2; \ldots; k_n)$ sauc arī par **polinomiālkoeficientiem**, jo tie ietilpst **polinomiālajā formulā**:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^k = \\ = \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_n=k \\ k_1,\ldots,k_n \geq 0}} P(k_1; k_2; \ldots; k_n) x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}, \quad (9.11)$$

kur $k \in \mathbb{N}$.

9.1. piezīme. Ja formulā (9.11) ņemt $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1$, tad iegūsim (9.10).

9.2. piezīme. Binomiālā formula (8.8) ir polinomiālās formulas (9.11) speciālgadījums, kad $n = 2$. Tiešām,

$$(x_1 + x_2)^k = = \sum_{\substack{k_1+k_2=k \\ k_1,k_2 \geq 0}} P(k_1; k_2) x_1^{k_1} x_2^{k_2},$$

kur

$$P(k_1; k_2) = \frac{k!}{k_1! k_2!} = \frac{k!}{(k - k_2)! k_2!} = C_k^{k_2}$$

un k_2 pieņem vērtības $0, 1, 2, \ldots, k$. Tātad

$$(x_1 + x_2)^k = \; = \sum_{k_2=0}^{k} C_k^{k_2} x_1^{k-k_2} x_2^{k_2}.$$

9.4. piemērs. *Māte dēlam nopirka 2 mandarīnus, 3 bumbierus un 4 apelsīnus. Deviņas dienas pēc kārtas tā deva dēlam pa 1 augli. Cik dažādos veidos māte var dot dēlam augļus?*

Viens no variantiem ir

$$(m; b; b; a; m; a; b; a; a), \tag{9.12}$$

kas nozīmē

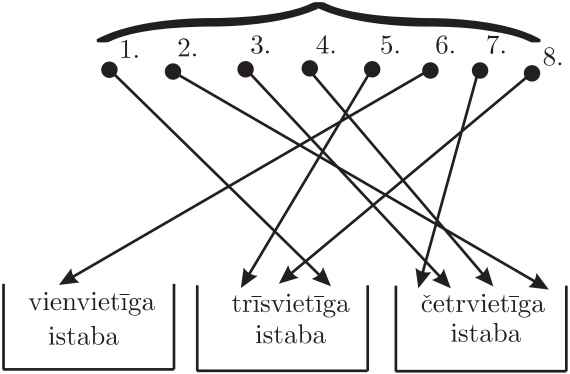
1. dienā **m**andarīns,
2. dienā **b**umbieris,
3. dienā **b**umbieris,
4. dienā **a**pelsīns,
5. dienā **m**andarīns,
6. dienā **a**pelsīns,
7. dienā **b**umbieris,
8. dienā **a**pelsīns,
9. dienā **a**pelsīns.

Visi pārējie varianti var tikt iegūti, mainot burtus vietām kortežā (9.12). Šādu iespēju ir

$$P(2;3;4) = \frac{(2+3+4)!}{2!3!4!} = 1260.$$

9.5. piemērs. *Cik dažādos veidos 8 studentus var izmitināt vienvietīgā, trīsvietīgā un četrvietīgā istabās?*

$$k = 1 + 3 + 4 = 8 \text{ studenti}$$



Zīmējumā attēlotajam izvietojam atbilst kortežs

$$(3v; 4v; 4v; 4v; 3v; 1v; 4v; 3v),$$

kas nozīmē, ka

1. students dzīvo trīsvietīgā istabā,
2. students dzīvo četrvietīgā istabā,
3. students dzīvo četrvietīgā istabā,
4. students dzīvo četrvietīgā istabā,
5. students dzīvo trīsvietīgā istabā,
6. students dzīvo vienvietīgā istabā,
7. students dzīvo četrvietīgā istabā,
8. students dzīvo trīsvietīgā istabā.

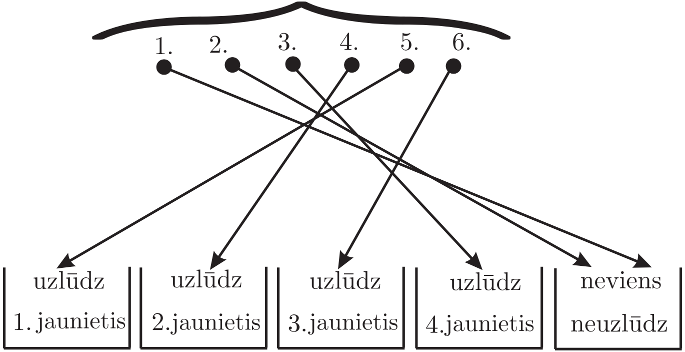
Visu šādu izvietojumu skaits ir vienāds ar

$$P(1;3;4) = \frac{8!}{1!3!4!} = 280.$$

9.6. piemērs. *Cik veidos 4 jaunieši var lūgt dejot (klasisku deju) 4 no 6 jaunietēm?*

1. paņēmiens. Lietosim priekšmetu un urnu interpretāciju.

$$k = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 2 = 6 \text{ jaunietes}$$



Zīmējumā attēlots gadījums, kad

1. jaunietis uzlūdz 5. meiteni,

2. jaunietis uzlūdz 4. meiteni,

3. jaunietis uzlūdz 6. meiteni,

4. jaunietis uzlūdz 3. meiteni,

1. un 2. meitene paliek neuzlūgtas.

Visu šādu variantu skaits ir vienāds ar

$$P(1;1;1;1;2) = \frac{(1+1+1+1+2)!}{1!1!1!1!2!} = 360.$$

2. paņēmiens. Divas meitenes, kuras paliks neuzlūgtas, var izvēlēties

$$C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$$

veidos. Katram šādam varintam pārējās meitenes var tikt uzlūgtas

$$P_4 = 4! = 24$$

veidos. Saskaņā ar reizināšanas likumu visu meklējamo variantu skaits ir vienāds ar

$$C_6^2 \cdot P_4 = 15 \cdot 24 = 360.$$

9.7. piemērs. *Atrast visu permutāciju bez atkārtojumiem pamatkopā*

$$X = \{a; b; c; d; e; f\}$$

skaitu, ja permutācijas nedrīkst saturēt "fragmentus" $\boldsymbol{\triangle = a; c; e}$ *un* $\boldsymbol{\bigcirc = f; d}$.

Vispirms atgādināsim ieslēgšanas un izslēgšanas likumu (sieta likumu) divām kopām:

$$\boxed{|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.}$$

Pieņemsim, ka kopas A_1 un A_2 ir universa U daļas. Tā kā

$$U = (A_1 \cup A_2) \cup \big(U \setminus (A_1 \cup A_2)\big)$$

un kopas $A_1 \cup A_2$ un $U \setminus (A_1 \cup A_2)$ nešķeļas, tad no summas likuma izriet, ka

$$|U| = |A_1 \cup A_2| + \big|U \setminus (A_1 \cup A_2)\big|.$$

Ņemot vērā dualitātes likumu, atrodam

$$U \setminus (A_1 \cup A_2) = (U \setminus A_1) \cap (U \setminus A_2).$$

Tātad

$$\big|(U \setminus A_1) \cap (U \setminus A_2)\big| = |U| - |A_1 \cup A_2| = |U| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|$$

jeb

$$\boxed{\big|(U \setminus A_1) \cap (U \setminus A_2)\big| = |U| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|.} \qquad (9.13)$$

Interpretēsim šo formulu. Pieņemsim, ka īpašība α_i $(i = 1, 2)$ izsaka kopas A_i raksturīgo īpašību, t.i., universa U elements ***pieder*** kopai A_i tad un tikai tad kad ***izpildās*** īpašība α_i. Tātad universa U elements ***nepieder*** kopai A_i (un līdz ar pieder kopai $U \setminus A_i$) tad un tikai tad kad ***neizpildās*** īpašība α_i.

Apzīmēsim:

N - visu universa U elementu skaits;

$N(\alpha_1)$ - visu to universa U elementu, kuriem izpildās īpašība α_1, skaits;

$N(\alpha_2)$ - visu to universa U elementu, kuriem izpildās īpašība α_2, skaits;

$N(\alpha_1\alpha_2)$ - visu to universa U elementu, kuriem vienlaicīgi izpildās īpašības α_1 un α_2, skaits;

$N(\alpha_1'\alpha_2')$ - visu to universa U elementu, kuriem vienlaicīgi neizpildās īpašības α_1 un α_2, skaits.

Tad formulu (9.13) var uzrakstīt šādi:

$$\boxed{N(\alpha_1'\alpha_2') = N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) + N(\alpha_1\alpha_2).} \tag{9.14}$$

Mūsu gadījumā:

N - permutāciju no burtiem a, b, c, d, e, f skaits;

$N(\alpha_1)$ - visu to permutāciju, kas satur "fragmentu" $\triangle = \boldsymbol{a; c; e},$ skaits;

$N(\alpha_2)$ - visu to permutāciju, kas satur "fragmentu" $\bigcirc = \boldsymbol{f; d},$ skaits;

$N(\alpha_1\alpha_2)$ - visu to permutāciju, kas vienlaicīgi satur "fragmentus" $\triangle = \boldsymbol{a; c; e}$ un $\bigcirc = \boldsymbol{f; d},$ skaits;

$N(\alpha_1'\alpha_2')$ - visu to permutāciju, kas vienlaicīgi nesatur "fragmentus" $\boldsymbol{\triangle = a; c; e}$ un $\boldsymbol{\bigcirc = f; d,}$ skaits.

1. Acīmredzot,

$$N = 6! = 720.$$

2. Skaitlis $N(\alpha_1)$ ir vienāds ar visu permutāciju bez atkārtojumiem skaitu pamatkopā

$$X = \{\triangle; b; d; f\},$$

t.i.,

$$N(\alpha_1) = 4! = 24.$$

3. Skaitlis $N(\alpha_2)$ ir vienāds ar visu permutāciju bez atkārtojumiem skaitu pamatkopā

$$X = \{\bigcirc; a; b; c; e\},$$

t.i.,

$$N(\alpha_2) = 5! = 120.$$

4. Skaitlis $N(\alpha_1\alpha_2)$ ir vienāds ar visu permutāciju bez atkārtojumiem skaitu pamatkopā

$$X = \{\triangle; \bigcirc; b\},$$

t.i.,

$$N(\alpha_1\alpha_2) = 3! = 6.$$

Tādējādi visu meklējamo permutāciju skaits ir vienāds ar

$$N(\alpha_1'\alpha_2') = N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) + N(\alpha_1\alpha_2) =$$
$$= 6! - 4! - 5! + 3! = 720 - 24 - 120 + 6 = 582.$$

9.8. piemērs. *Atrast visu 9-permutāciju ar atkārtojumiem*

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \tag{9.15}$$

skaitu pamatkopā

$$X = \{a; b; c\},$$

ja permutācijas nedrīkst vienlaicīgi saturēt "fragmentus"

$$\boldsymbol{A = a; a; a; a}$$

un

$$\boldsymbol{B = b; b; b}$$

un

$$\boldsymbol{C = c; c}$$

Spriežot līdzīgi kā iepriekšējā piemērā, varam secināt, ka

$$N(\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3') = N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - N(\alpha_3) + \\ + N(\alpha_1\alpha_2) + N(\alpha_1\alpha_3) + N(\alpha_2\alpha_3) - N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3),$$

kur

N - visu 9-permutāciju ar atkārtojumiem (9.15) skaits;

$N(\alpha_1)$ - visu 9-permutāciju ar atkārtojumiem (9.15), kas satur fragmentu" $\boldsymbol{A=a;a;a;a}$, skaits;

$N(\alpha_2)$ - visu 9-permutāciju ar atkārtojumiem (9.15), kas satur "fragmentu" $\boldsymbol{B=b;b;b}$, skaits;

$N(\alpha_3)$ - visu 9-permutāciju ar atkārtojumiem (9.15), kas satur "fragmentu" $\boldsymbol{C=c;c}$, skaits;

$N(\alpha_1\alpha_2)$ - visu 9-permutāciju ar atkārtojumiem (9.15), kas vienlaicīgi satur "fragmentus" $\boldsymbol{A=a;a;a;a}$ un $\boldsymbol{B=b;b;b}$, skaits;

$N(\alpha_1\alpha_3)$ - visu 9-permutāciju ar atkārtojumiem (9.15), kas vienlaicīgi satur "fragmentus" $\boldsymbol{A=a;a;a;a}$ un $\boldsymbol{C=c;c}$, skaits;

$N(\alpha_2\alpha_3)$ - visu 9-permutāciju ar atkārtojumiem (9.15), kas vienlaicīgi satur "fragmentus" $\boldsymbol{B=b;b;b}$ un $\boldsymbol{C=c;c}$, skaits;

$N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)$ - visu 9-permutāciju ar atkārtojumiem (9.15), kas vienlaicīgi satur "fragmentus" $\boldsymbol{A=a;a;a;a}$, $\boldsymbol{B=b;b;b}$ un $\boldsymbol{C=c;c}$, skaits;

$N(\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3')$ - visu 9-permutāciju ar atkārtojumiem (9.15), kas vienlaicīgi nesatur "fragmentus" ***A=a;a;a;a***, ***B=b;b;b*** un ***C=c;c***, skaits.

Iesakām lasītājam patstāvīgi pārliecināties, ka

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad N = P(4;3;2) = \frac{9!}{4!3!2!};$$

$$\begin{pmatrix} A & b & c \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad N(\alpha_1) = P(1;3;2) = \frac{6!}{1!3!2!};$$

$$\begin{pmatrix} a & B & c \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad N(\alpha_2) = P(4;1;2) = \frac{7!}{4!1!2!};$$

$$\begin{pmatrix} a & b & C \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad N(\alpha_3) = P(4;3;1) = \frac{8!}{4!3!1!};$$

$$\begin{pmatrix} A & B & c \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad N(\alpha_1\alpha_2) = P(1;1;2) = \frac{4!}{1!1!2!};$$

$$\begin{pmatrix} A & b & C \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad N(\alpha_1\alpha_3) = P(1;3;1) = \frac{5!}{1!3!1!};$$

$$\begin{pmatrix} a & B & C \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad N(\alpha_2\alpha_3) = P(4;1;1) = \frac{6!}{4!1!1!};$$

$$\begin{pmatrix} A & B & C \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3) = P(1;1;1) = \frac{3!}{1!1!1!}.$$

Tādējādi visu meklējamo permutāciju ar atkārtojumiem skaits ir vienāds ar

$$N(\alpha_1'\alpha_2'\alpha_3') = \frac{9!}{4!3!2!} - \frac{6!}{1!3!2!} - \frac{7!}{4!1!2!} - \frac{8!}{4!3!1!} + \\ + \frac{4!}{1!1!2!} + \frac{5!}{1!3!1!} + \frac{6!}{4!1!1!} - \frac{3!}{1!1!1!} = 871.$$

10. Kombinācijas ar atkārtojumiem

Par **k-kombināciju ar atkārtojumiem pamatkopā** $X = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ sauc patvaļīgu matricu

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix},$$

kur

$$k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n, \quad k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0.$$

Visu k-kombināciju ar atkārtojumiem pamatkopā $X = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ skaitu apzīmē ar $\overline{C}_n^k$.

10.1. piezīme. Tātad k-kombinācijas ar atkārtojumiem pamatkopā X ir nekas cits kā permutāciju ar atkārtojumiem pamatkopā X iespējamie sastāvi!

10.2. piezīme. k-kombināciju ar atkārtojumiem pamatkopā X

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix},$$

pieraksta arī šādi:

$$\langle \underbrace{x_1; \ldots; x_1}_{k_1}; \underbrace{x_2; \ldots; x_2}_{k_2}; \ldots; \underbrace{x_n; \ldots; x_n}_{k_n} \rangle, \tag{10.16}$$

pie tam elementu secība šajā pierakstā nav svarīga. Objektu (10.16) sauc par **multikopu** – "kopu ar atkārtojumiem".

Multikopa nav ne kortežs, ne kopa!

10.1. piemērs. 6-kombināciju ar atkārtojumiem pamatkopā $X = \{a; b; c\}$

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

var pierakstīt kā multikopu vairākos veidos:

$$\langle a; c; b; a; c; a \rangle = \langle a; a; a; b; c; c \rangle = \cdots$$

Lai atrastu $\overline{C}_n^k$, ir jāatrod visu kortežu

$$(k_1; k_2; \ldots; k_n),$$

ka

$$k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n, \quad k_1, k_2, \ldots, k_n \geq 0,$$

skaitu. Nodibināsim savstarpēji viennozīmīgu atbilstību starp visiem šādiem kortežiem un kortežiem ar garumu $n + k - 1$, kuru

k komponentes ir 1,

$n - 1$ komponentes ir 0,

šādi: *katru skaitli k_i aizstāsim ar k_i vieniniekiem (ja $k_i = 0$, tad neko nerakstām), bet semikolus ar nullēm.*

10.2. piemērs.

$$(4; 1; 0; 2) \mapsto (\underbrace{1; 1; 1; 1}_{4}; 0; \underbrace{\ \ 1\ \ }_{1}; 0; 0; \underbrace{1; 1}_{2}),$$

$$(4; 2; 1) \mapsto (\underbrace{1; 1; 1; 1}_{4}; 0; \underbrace{1; 1}_{2}; 0; \underbrace{\ \ 1\ \ }_{1}),$$

$$(0;1;1;1;0;0;1;1;0;1;1;0) \mapsto (0;3;0;2;2;0).$$

Šādu kortežu no 0 un 1 skaits ir vienāds ar

$$C_{n+k-1}^{k},$$

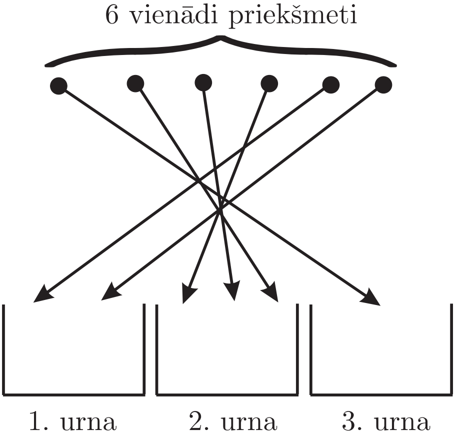
jo no $n+k-1$ izvēlamies k pozīcijas, kurās ierakstām 1, bet atlikušajās $n-1$ pozīcijās ierakstām 0. Tātad

$$\boxed{\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^{k} = C_{n+k-1}^{n-1}.}$$

Atzīmēsim, ka

$$\boxed{\overline{C}_n^k = \frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}.}$$

10.3. piemērs. *Cik dažādos veidos k vienādus priekšmetus var izvietot n sanumurētās urnās?*
Atbilde: $\overline{C}_n^k$.



Zīmējumā attēlotajam gadījumam atbilst 6-kombinācija ar atkārtojumiem

$$\begin{pmatrix} 1.\ \text{urna} & 2.\ \text{urna} & 3.\ \text{urna} \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

urnu pamatkopā $X = \{1.\ \text{urna}; 2.\ \text{urna}; 3.\ \text{urna}\}$. Šo kombināciju var pierakstīt arī šādi:

$$\langle 1.\ \text{urna}; 1.\ \text{urna}; 2.\ \text{urna}; 2.\ \text{urna}; 2.\ \text{urna}; 3.\ \text{urna}\rangle$$

Šādu izvietojumu skaits ir vienāds ar

$$\overline{C}_3^6 = C_{3+6-1}^6 = C_8^6 = C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28.$$

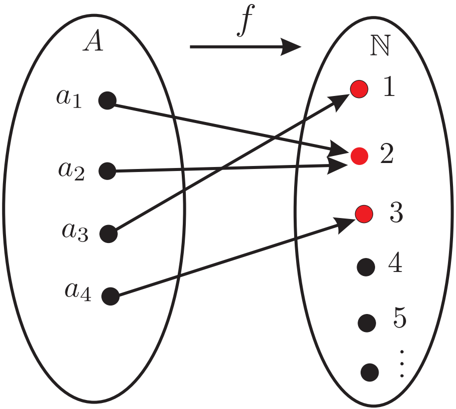
Visas 28 kombinācijas apraksta korteži:

$(6;0;0)$	$(0;6;0)$	$(0;0;6)$
$(5;1;0)$	$(1;5;0)$	$(1;0;5)$
$(5;0;1)$	$(0;5;1)$	$(0;1;5)$
$(4;1;1)$	$(1;4;1)$	$(1;1;4)$
$(0;3;3)$	$(3;0;3)$	$(3;3;0)$
$(3;2;1)$	$(2;3;1)$	$(2;1;3)$
$(3;1;2)$	$(1;3;2)$	$(1;2;3)$
$(2;0;4)$	$(0;2;4)$	$(0;4;2)$
$(2;4;0)$	$(4;2;0)$	$(4;0;2)$
	$(2;2;2)$	

10.4. piemērs. *Visu attēlojumu $f : A \longrightarrow \mathbb{N}$, $A = \{a_1; \ldots; a_n\}$, ka*

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_i) = k,$$

skaits ir vienāds ar $\overline{C}_n^k$.



Zīmējumā attēlotajam gadījumam atbilst 8-kombinācija ar atkārtojumiem

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

pamatkopā $A = \{a_1; a_2; a_3; a_4\}$. Visu 8-kombināciju ar atkārtojumiem pamatkopā A skaits ir vienāds ar

$$\overline{C}_4^8 = C_{4+8-1}^8 = C_{11}^8 = C_{11}^3 = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 165.$$

10.5. piemērs. *Visu vienādojuma*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$$

nenegatīvo veselo atrisinājumu skaits ir vienāds ar $\overline{C}_n^k$.

Skat. visus 28 vienādojuma

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

nenegatīvos veselos atrisinājumus ($n = 3$, $k = 6$).

10.6. piemērs. *Visu vienādojuma*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k \tag{10.17}$$

<u>pozitīvo veselo atrisinājumu</u> skaits ir vienāds ar C_{k-1}^{n-1}.

Var pierādīt, ka vienādojuma (10.17) visu pozitīvo atrisinājumu skaits ir vienāds ar visu vienādojuma

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_n = k - n$$

nenegatīvo veselo atrisinājumu skaitu:

$$\overline{C}_n^{k-n} = C_{n+(k-n)-1}^{k-n} = C_{k-1}^{k-n} = C_{k-1}^{k-1-(k-n)} = C_{k-1}^{n-1}.$$

Vienādojuma

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

pozitīvo veselo atrisinājumu skaits ($n = 3$, $k = 6$):

$$C_{k-1}^{n-1} = C_{6-1}^{3-1} = C_5^2 = \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 10.$$

Skat. šos atrisinājumus (sarkanā krāsā).

10.7. piemērs. *Cik dažādos veidos var izvēlēties 3 grāmatas, ja ir 3 vienāda tipa romāni un 3 vienāda tipa dzejoļu krājumi?*

Pamatkopa $X = \{$romāns; dzejoļu krājums$\}$, $n = 2$. Jāizvēlās 3 grāmatas, tāpēc $k = 3$.

$$\overline{C}_n^k = \overline{C}_2^3 = \overline{C}_{3+2-1}^3 = C_4^3 = C_4^1 = 4.$$

Šīs izvēles ir šādas:

3 romāni,

3 dzejoļu krājumi,

1 romāns un 2 dzejoļu krājumi,

2 romāni un 1 dzejoļu krājums.

10.8. piemērs. *Trīs bērni dārzā salasīja 63 ābolus. Cik dažādos veidos viņi var sadalīt ābolus savā starpā?*

Piemēram, bērni ābolus varēja sadalīt šādi:

$$\begin{pmatrix} 1.\ \text{bērns} & 2.\ \text{bērns} & 3.\ \text{bērns} \\ 10 & 37 & 16 \end{pmatrix}$$

Acīmredzot, ābolus varēja sadalīt

$$\overline{C}_3^{63} = C_{3+63-1}^{63} = C_{65}^{63} = C_{65}^{2} = \frac{65 \cdot 64}{1 \cdot 2} = 2080$$

veidos.

10.9. piemērs. Cik dažādos veidos var izvēlēties 3 burtus no 12 burtiem

$$a, a, a, b, b, b, c, c, c, d, d, d?$$

Pamatkopa $X = \{a; b; c; d\}$, $n = 4$. Jāizvēlās 3 burti, tāpēc $k = 3$.

$$\overline{C}_n^k = \overline{C}_4^3 = \overline{C}_{4+3-1}^3 = C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20.$$

Šīs izvēles ir šādas:

aaa	***bbb***	***ccc***	***ddd***
abb	***acc***	***add***	***abc***
abd	***acd***	***aab***	***aac***
aad	***bbc***	***bbd***	***ccb***
ccd	***ddb***	***ddc***	***bcd***

11. Visas k-variācijas ar atkārtojumiem n elementu pamatkopā

11.1. $k > n$

Atradīsim visas 5-variācijas ar atkārtojumiem pamatkopā $X = \{a; b\}$, lietojot formulu (9.10). Atzīmēsim, ka $n = 2$ un $k = 5$.

Visu 5-variāciju ar atkārtojumiem 2 elementu pamatkopā skaits ir vienāds ar

$$\overline{A}_n^k = \overline{A}_2^5 = 2^5 = 32.$$

a) Visu 5-kombināciju ar atkārtojumiem 2 elementu pamatkopā skaits ir vienāds ar

$$\overline{C}_n^k = \overline{C}_2^5 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 6.$$

Šīs 3-kombinācijas ar atkārtojumiem pamatkopā X ir

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Sastāvam $\begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$ atbilstošo permutāciju skaits ir

$$P(5;0) = \frac{(5+0)!}{5!0!} = 1.$$

Atbilstošā permutācija ir

$$(a;a;a;a;a)$$

2. Sastāvam $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ atbilstošo permutāciju skaits ir

$$P(0;5) = \frac{(0+5)!}{0!5!} = 1.$$

Atbilstošā permutācija ir

$$(b; b; b; b; b)$$

3. Sastāvam $\begin{pmatrix} a & b \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ atbilstošo permutāciju skaits ir

$$P(4;1) = \frac{(4+1)!}{4!1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 5.$$

Atbilstošās permutācijas ir

$$(b; a; a; a; a)$$
$$(a; b; a; a; a)$$
$$(a; a; b; a; a)$$
$$(a; a; a; b; a)$$
$$(a; a; a; a; b)$$

4. Sastāvam $\begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ atbilstošo permutāciju skaits ir

$$P(1;4) = \frac{(1+4)!}{1!4!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 5.$$

Atbilstošās permutācijas ir

$$(a;b;b;b;b)$$
$$(b;a;b;b;b)$$
$$(b;b;a;b;b)$$
$$(b;b;b;a;b)$$
$$(b;b;b;b;a)$$

5. Sastāvam $\begin{pmatrix} a & b \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ atbilstošo permutāciju skaits ir

$$P(3;2) = \frac{(3+2)!}{3!2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 10.$$

Atbilstošās permutācijas ir

$$\begin{array}{ll}
(b;b;a;a;a) & (a;b;a;b;a) \\
(b;a;b;a;a) & (a;b;a;a;b) \\
(b;a;a;b;a) & (a;a;b;b;a) \\
(b;a;a;a;b) & (a;a;b;a;b) \\
(a;b;b;a;a) & (a;a;a;b;b)
\end{array}$$

6. Sastāvam $\begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ atbilstošo permutāciju skaits ir

$$P(2;3) = \frac{(2+3)!}{2!3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$$

Atbilstošās permutācijas ir

$(a;a;b;b;b)$	$(b;a;b;a;b)$
$(a;b;a;b;b)$	$(b;a;b;b;a)$
$(a;b;b;a;b)$	$(b;b;a;a;b)$
$(a;b;b;b;a)$	$(b;b;a;b;a)$
$(b;a;a;b;b)$	$(b;b;b;a;a)$

Pavisam ieguvām

$$P(5;0)+P(0;5)+P(4;1)+P(1;4)+P(3;2)+P(2;3)=$$
$$=1+1+5+5+10+10=32$$

5-permutācijas ar visiem iespējamiem atkārtojumiem pamatkopā $X = \{a;b\}$, kuras kopumā veido visas 5-variācijas ar atkārtojumiem pamatkopā X.

Tā kā $k > n$, tad apskatāmajā gadījumā nav 5-variāciju bez atkārtojumiem pamatkopā X.

11.2. $k = n$

Atradīsim visas 3-variācijas ar atkārtojumiem pamatkopā $X = \{a; b; c\}$, lietojot formulu (9.10). Šajā gadījumā $n = 3$ un $k = 3$.

Visu 3-variāciju ar atkārtojumiem 3 elementu pamatkopā skaits ir vienāds ar

$$\overline{A}_n^k = \overline{A}_3^3 = 27.$$

a) Visu 3-kombināciju ar atkārtojumiem 3 elementu pamatkopā skaits ir vienāds ar

$$\overline{C}_n^k = \overline{C}_3^3 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 10.$$

Lai uzrakstītu visas 3-kombinācijas ar atkārtojumiem pamatkopā X, nosakām visus 10 vienādojuma

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

nenegatīvos veselos atrisinājumus:

1\. $(3;0;0)$ 2. $(0;3;0)$ 3. $(0;0;3)$ 4. $(1;1;1)$
5\. $(1;2;0)$ 6. $(1;0;2)$ 7. $(0;1;2)$ 8. $(2;1;0)$
9\. $(2;0;1)$ 10. $(0;2;1)$.

Katrai kombinācijai bez atkārtojumiem uzrakstīsim visas atbilstošās permutācijas ar atkārtojumiem.

1. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$P(3;0;0) = 1$$

$$(a;a;a)$$

2. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$P(0;3;0) = 1$$

$$(b;b;b)$$

3. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$P(0;0;3) = 1$$

$$(c;c;c)$$

4. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$P(1;1;1) = 6$$

$$\boxed{(c;c;c)\ (a;b;c)\ (a;c;b)\ (b;a;c)\ (b;c;a)\ (c;a;b)\ (c;b;a)}$$

5. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$P(1;2;0) = 3$$

$$(a;b;b)\ (b;a;b)\ (b;b;a)$$

6. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$P(1;0;1) = 3$$

$$(a;c;c)\ (c;a;c)\ (c;c;a)$$

7. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$P(0;1;2) = 3$$

$$(b;c;c)\ (c;b;c)\ (c;c;b)$$

8. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$P(2;1;0)=3$$

$$(b;a;a)\ (a;b;a)\ (a;a;b)$$

9. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$P(2;0;1)=3$$

$$(c;a;a)\ (a;c;a)\ (a;a;c)$$

10. $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$P(0;2;1) = 3$$

$$(c;b;b)\ (b;c;b)\ (b;b;c)$$

Tādējādi pavisam esam uzrakstījuši

$$1+1+1+6+3+3+3+3+3+3=27$$

3-variācijas ar visiem iespējamiem atkārtojumiem pamatkopā $X = \{a;b;c\}$, starp kurām ir

$$P_3 = 3! = 6$$

permutācijas bez atkārtojumiem pamatkopā X - skat. 4. gadījumu.

11.1. piezīme. Ja $k = n$, tad sastāvs

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

nosaka permutāciju bez atkārtojumiem pamatkopā

$$X = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$$

tad un tikai tad, kad

$$k_i = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

11.3. $k < n$

Atradīsim visas 3-variācijas ar atkārtojumiem pamatkopā $X = \{a; b; c; d\}$, lietojot formulu (9.10). Šajā gadījumā $n = 4$ un $k = 3$.

Visu 3-variāciju ar atkārtojumiem 4 elementu pamatkopā skaits ir vienāds ar

$$\overline{A}_n^k = \overline{A}_4^3 = 64.$$

a) Visu 3-kombināciju ar atkārtojumiem 4 elementu pamatkopā skaits ir vienāds ar

$$\overline{C}_n^k = \overline{C}_4^3 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20.$$

Lai uzrakstītu visas 3-kombinācijas ar atkārtojumiem pamatkopā X, nosakām visus 20 vienādojuma

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$$

nenegatīvos veselos atrisinājumus:

1. $(3;0;0;0)$	2. $(0;3;0;0)$	3. $(0;0;3;0)$	4. $(0;0;0;3)$
5. $(1;2;0;0)$	6. $(1;0;2;0)$	7. $(1;0;0;2)$	8. $(0;1;2;0)$
9. $(2;1;0;0)$	10. $(2;0;1;0)$	11. $(2;0;0;1)$	12. $(0;2;1;0)$
13. $(0;1;0;2)$	14. $(0;2;0;1)$	15. $(0;0;1;2)$	16. $(0;0;2;1)$
17. $(0;1;1;1)$	18. $(1;0;1;1)$	19. $(1;1;0;1)$	20. $(1;1;1;0)$

Katrai kombinācijai bez atkārtojumiem uzrakstīsim visas atbilstošās permutācijas ar atkārtojumiem.

1. $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$P(3;0;0;0) = 1$$

$$(a;a;a)$$

2. $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$P(0;3;0;0) = 1$$

$$(b;b;b)$$

3. $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

$$P(0;0;3;0) = 1$$

$$(c;c;c)$$

4. $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$P(0;0;0;3) = 1$$

$$(d;d;d)$$

5. $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$P(1;2;0;0) = 3$$

$$(a;b;b)\ (b;a;b)\ (b;b;a)$$

6. $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$$P(1;0;2;0) = 3$$

$$(a;c;c)\ (c;a;c)\ (c;c;a)$$

7. $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$P(1;0;0;2) = 3$$

$$(a;d;d)\ (d;a;d)\ (d;d;a)$$

8. $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$P(0;1;0;2) = 3$$

$$(b;d;d)\ (d;b;d)\ (d;d;b)$$

9. $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$P(2;1;0;0) = 3$$

$$(b;a;a)\ (a;b;a)\ (a;a;b)$$

10. $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$P(2;0;1;0) = 3$$

$$(c;a;a)\ (a;c;a)\ (a;a;c)$$

11. $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$P(2;0;0;1) = 3$$

$$(d;a;a)\ (a;d;a)\ (a;a;d)$$

12. $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$P(0;2;1;0) = 3$$

$$(c;b;b)\ (b;c;b)\ (b;b;c)$$

13. $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$P(0;1;0;2) = 3$$

$$(b;d;d)\ (d;b;d)\ (d;d;b)$$

14. $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$P(0;2;0;1) = 3$$

$$(d;b;b)\ (b;d;b)\ (b;b;d)$$

15. $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$P(0;0;1;2) = 3$$

$$(c;b;b)\ (b;c;b)\ (b;b;c)$$

16. $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$P(0;0;2;1) = 3$$

$$(d;c;c)\ (c;d;c)\ (c;c;d)$$

17. $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$P(0;1;1;1) = 6$$

$$\boxed{(b;c;d)\ (c;b;d)\ (d;b;c)(b;d;c)\ (c;d;b)\ (d;c;b)}$$

18. $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$P(1;0;1;1) = 6$$

$$\boxed{(a;c;d)\ (c;a;d)\ (d;a;c)(a;d;c)\ (c;d;a)\ (d;c;a)}$$

19. $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$P(1;0;1;1) = 6$$

$$\boxed{(a;b;d)\ (b;a;d)\ (d;a;b)(a;d;b)\ (b;d;a)\ (d;b;a)}$$

20. $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$P(1;0;1;1) = 6$$

$$\boxed{(a;b;c)\ (b;a;c)\ (c;a;b)(a;c;b)\ (b;c;a)\ (c;b;a)}$$

Tādējādi pavisam esam uzrakstījuši

$$4 \cdot 1 + 12 \cdot 3 + 4 \cdot 6 = 64$$

3-variācijas ar visiem iespējamiem atkārtojumiem pamatkopā $X = \{a; b; c; d\}$, starp kurām ir

$$A_4^3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$$

3-variācijas bez atkārtojumiem pamatkopā X - skat. 17., 18., 19. un 20. gadījumu.

11.2. piezīme. Ja $k < n$, tad sastāvs

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

nosaka k-variāciju bez atkārtojumiem pamatkopā $X = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ tad un tikai tad, kad

$$0 \leq k_i \leq 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

12. Kopas sakārtoti sadalījumi apakškopās

Par **kopas $\boldsymbol{A = \{a_1; a_2; \ldots; a_k\}}$ sakārtotu sadalījumu $\boldsymbol{n}$ apakškopās** sauc kopas A apakškopu virkni

$$(A_1; A_2; \ldots; A_n), \quad |A_i| = k_i \quad (i = 1, 2 \ldots, n),$$

ka

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j;\ i, j = 1, 2 \ldots, n).$$

Tad

$$k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n.$$

Kortežu $(k_1; k_2; \ldots; k_n)$ sauc par **$\boldsymbol{A}$ apakškopu virknes**

$$\boldsymbol{(A_1; A_2; \ldots; A_n)}$$

apjoma raksturojumu.

Piemēram, kopas $A = \{a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6\}$, $k = 6$, sakārtots sadalījums $n = 3$ apakškopās ir $(A_1; A_2; A_3)$, kur

$$A_1 = \{a_2; a_5\},\ A_2 = \{a_1; a_4; a_6\},\ A_3 = \{a_3\}.$$

Šī sadalījuma apjoma raksturojums ir $(2; 3; 1)$.

Starp visiem kopas $A = \{a_1; a_2; \ldots; a_k\}$ sakārtotiem sadalījumiem n apakškopās un visām k-permutācijām ar atkārtojumiem pamatkopā

$$X = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$$

nodibināsim *savstarpēji viennozīmīgu atbilstību* pēc likuma: kopas A sakārtotam sadalījumam n apakškopās $(A_1; A_2; \ldots; A_n)$ ar apjoma raksturojumu $(k_1; k_2; \ldots; k_n)$ atbilst kopas X k-permutācija ar atkārtojumiem

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix},$$

kurā (t.i., permutācijā) elements x_i atrodas tajās pozīcijās, kādi ir apakškopas A_i elementu indeksi.

Piemēram, iepriekš minētajam kopas $A = \{a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6\}$, $k = 6$, sakārtotam sadalījumam $n = 3$ apakškopās $(A_1; A_2; A_3)$,

$$A_1 = \{a_2; a_5\},\ A_2 = \{a_1; a_4; a_6\},\ A_3 = \{a_3\},$$

ar apjoma raksturojumu $(2; 3; 1)$ atbilst 6-permutācija

$$(x_2; x_1; x_3; x_2; x_1; x_2)$$

ar sastāvu

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad 2 = |A_1|,\ 3 = |A_2|,\ 1 = |A_3|.$$

- Tā kā kopas $A_1 = \{a_2; a_5\}$ elementu indeksi ir 2 un 5, tad x_1 atrodas 2. un 5. pozīcijā.
- Tā kā kopas $A_2 = \{a_1; a_4; a_6\}$ elementu indeksi ir 1,4 un 6, tad x_2 atrodas 1., 4. un 6. pozīcijā.
- Tā kā kopas $A_3 = \{a_3\}$ elementa indekss ir 3, tad x_3 atrodas 3. pozīcijā.

Tātad *visu kopas* $A = \{a_1; a_2; \ldots; a_k\}$ *sakārtotu sadalījumu* n *apakškopās ar apjoma raksturojumu* $(k_1; k_2; \ldots; k_n)$ *skaits ir vienāds ar* $P(k_1; k_2; \ldots; k_n)$*, kur* $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$*.*

No (9.10) izriet, ka *visu kopas* $A = \{a_1; a_2; \ldots; a_k\}$ *sakārtotu sadalījumu* n *apakškopās skaits ir vienāds ar*

$$\overline{A}_n^k = \sum_{\substack{k_1+\cdots+k_n=k \\ k_1,\ldots,k_n \geq 0}} P(k_1; k_2; \ldots; k_n).$$

Šeit summēšana notiek pa visiem iespējamajiem k permutāciju ar atkārtojumiem

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

nenegatīviem sastāviem, t.i., k-kombinācijām ar atkārtojumiem pamatkopā $X = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$, kuru skaits ir vienāds ar $\overline{C}_n^k$.

Savukārt, visu kopas $A = \{a_1; a_2; \ldots; a_k\}$ sakārtotu sadalījumu n netukšās apakškopās skaits ir vienāds ar

$$\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_n=k \\ k_1,\ldots,k_n>0}} P(k_1; k_2; \ldots; k_n).$$

Šeit summēšana notiek pa visiem iespējamajiem k permutāciju ar atkārtojumiem

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \end{pmatrix}$$

pozitīviem sastāviem, kuru skaits, ņemot vērā 10.6. piemēru, ir vienāds ar C_{k-1}^{n-1}.

12.1. piemērs. Noskaidrosim visus kopas $A = \{a_1; a_2; a_3\}$, $k = 3$, sakārtotus sadalījumus $n = 2$ apakškopās. Pavisam šādu sakārtotu sadalījumu skaits ir vienāds ar

$$\overline{A}_n^k = n^k = 2^3 = 8.$$

a) Visu 3-kombinācijas ar atkārtojumiem pamatkopā $X = \{x_1; x_2\}$, $n = 2$, skaits ir vienāds ar

$$\overline{C}_n^k = \overline{C}_2^3 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4.$$

Šīs 3-kombinācijas ar atkārtojumiem pamatkopā X ir

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tām atbilst kopas $A = \{a_1; a_2; a_3\}$ sakārtoti sadalījumi $n = 2$ apakškopās ar apjoma raksturojumiem

$$(0; 3), \quad (3; 0), \quad (2; 1), \quad (1; 2).$$

1. Sadalījumu ar apjoma raksturojumu $(0;3)$ skaits ir vienāds ar

$$P(0;3) = \frac{(0+3)!}{0!3!} = 1.$$

Atbilstošā 3-permutācija ar atkārtojumiem

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

pamatkopā X ir

$$(x_2; x_2; x_2),$$

bet atbilstošais sakārtotais sadalījums ir

$$(\emptyset; A).$$

2. Sadalījumu ar apjoma raksturojumu $(3;0)$ skaits ir vienāds ar

$$P(3;0) = \frac{(3+0)!}{3!0!} = 1.$$

Atbilstošā 3-permutācija ar atkārtojumiem

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

pamatkopā X ir

$$(x_1; x_1; x_1),$$

bet atbilstošais sakārtotais sadalījums ir

$$(A; \emptyset).$$

3. Sadalījumu ar apjoma raksturojumu $(2;1)$ skaits ir vienāds ar

$$P(2;1) = \frac{(2+1)!}{2!1!} = 3.$$

Atbilstošās 3-permutācijas ar atkārtojumiem

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

pamatkopā X ir

$$(x_2; x_1; x_1),\ (x_1; x_2; x_1),\ (x_1; x_1; x_2),$$

bet atbilstošie sakārtotie sadalījumi ir

$$\big(\{a_2; a_3\}; \{a_1\}\big),\ \big(\{a_1; a_3\}; \{a_2\}\big),\ \big(\{a_1; a_2\}; \{a_3\}\big).$$

4. Sadalījumu ar apjoma raksturojumu $(1;2)$ skaits ir vienāds ar

$$P(1;2) = \frac{(1+2)!}{1!2!} = 3.$$

Atbilstošās 3-permutācijas ar atkārtojumiem

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

pamatkopā X ir

$$(x_1;x_2;x_2),\ (x_2;x_1;x_2),\ (x_2;x_2;x_1),$$

bet atbilstošie sakārtotie sadalījumi ir

$$\big(\{a_1\};\{a_2;a_2\}\big),\ \big(\{a_2\};\{a_1;a_3\}\big),\ \big(\{a_3\};\{a_1;a_2\}\big).$$

Tātad kopai $A = \{a_1; a_2; a_3\}$, $k = 3$, pavisam ir

$$2^3 = 8 = 1 + 1 + 3 + 3$$

sakārtoti sadalījumi $n = 2$ apakškopās:

$$\big(\emptyset; A\big),$$

$$\big(A; \emptyset\big),$$

$$\big(\{a_2; a_3\}; \{a_1\}\big),\ \big(\{a_1; a_3\}; \{a_2\}\big),\ \big(\{a_1; a_2\}; \{a_3\}\big),$$

$$\big(\{a_1\}; \{a_2; a_2\}\big),\ \big(\{a_2\}; \{a_1; a_3\}\big),\ \big(\{a_3\}; \{a_1; a_2\}\big).$$

Visu kopas $A = \{a_1; a_2; \ldots; a_k\}$ sakārtotu sadalījumu $n = 2$ netukšās apakškopās skaits ir vienāds ar

$$P(2; 1) + P(1; 2) = 3 + 3 = 6;$$

skat. 3. un 4. gadījumu.

13. Partīcijas

Par **skaitļa** k **partīciju** sauc šī skaitļa nesakārtotu sadalījumu (pozitīvos) saskaitāmajos. Visu skaitļa $k \in \mathbb{N}$ **partīciju**[1] skaitu apzīmē ar $p(k)$.

1. $p(1) = 1$, jo $\mathbf{1 = 1}$;
2. $p(2) = 2$, jo
$$\mathbf{2 = 2,}$$
$$\mathbf{2 = 1 + 1}$$
3. $p(3) = 3$, jo
$$\mathbf{3 = 3,}$$
$$\mathbf{3 = 2 + 1,}$$
$$\mathbf{3 = 1 + 1 + 1.}$$

[1] Angļu v. - *partition*, krievu val. - разбиение.

4. $p(4) = 5$, jo

$$\begin{aligned}
\mathbf{4} &= \mathbf{4},\\
\mathbf{4} &= \mathbf{3+1},\\
\mathbf{4} &= \mathbf{2+2},\\
\mathbf{4} &= \mathbf{2+1+1},\\
\mathbf{4} &= \mathbf{1+1+1+1.}
\end{aligned}$$

5. $p(5) = 7$, jo

$$\begin{aligned}
\mathbf{5} &= \mathbf{5},\\
\mathbf{5} &= \mathbf{4+1},\\
\mathbf{5} &= \mathbf{3+2},\\
\mathbf{5} &= \mathbf{3+1+1},\\
\mathbf{5} &= \mathbf{2+2+1},\\
\mathbf{5} &= \mathbf{2+1+1+1},\\
\mathbf{5} &= \mathbf{1+1+1+1+1.}
\end{aligned}$$

k	$p(k)$	k	$p(k)$
1	1	11	56
2	2	12	77
3	3	13	101
4	5	14	135
5	7	15	176
6	11	16	231
7	15	17	297
8	22	18	385
9	30	19	490
10	42	20	627

Skaitļu $p(k)$ izteiksmes atklātā veidā nav zināmas [14, 174. lpp.].

Skaitļa k partīcijas atrodas savstarpēji viennozīmīgā atbilstībā ar vienādojuma

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = k \tag{13.18}$$

atrisinājumiem veselos nenegatīvos skaitļos, ka

$$x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_k.$$

Tāpēc visu šādu vienādojuma (13.18) atrisinājumu skaits ir vienāds ar $p(k)$.

Līdzīgi, skaitļa k partīcijas atrodas savstarpēji viennozīmīgā atbilstībā ar vienādojuma (13.18) atrisinājumiem veselos nenegatīvos skaitļos, ka

$$x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq x_k.$$

Tāpēc visu šādu vienādojuma (13.18) atrisinājumu skaits ir vienāds ar $p(k)$.

Partīcijas apzīmē arī šādi:

- skaitļa 6 partīciju $6 = 1 + 2 + 3$ apzīmē ar $1^1 2^1 3^1$,
- skaitļa 5 partīciju $5 = 1 + 1 + 1 + 2$ apzīmē ar $1^3 2^1$.

Viegli redzēt, ka skaitļa k partīcijas atrodas savstarpēji viennozīmīgā atbilstībā ar vienādojuma

$$1\beta_1 + 2\beta_2 + \cdots + k\beta_k = k$$

veseliem nenegatīviem atrisinājumiem.

13.1. piemērs. Ja $k = 5$, tad

β_1	β_2	β_3	β_4	β_5		$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq x_5$
5	0	0	0	0	1^5	$\mathbf{5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1}$
3	1	0	0	0	$1^3 2^1$	$\mathbf{5 = 1 + 1 + 1 + 2}$
2	0	1	0	0	$1^2 3^1$	$\mathbf{5 = 1 + 1 + 3}$
1	0	0	1	0	$1^1 4^1$	$\mathbf{5 = 1 + 4}$
0	1	1	0	0	$2^1 3^1$	$\mathbf{5 = 2 + 3}$
0	0	0	0	1	5^1	$\mathbf{5 = 5}$
1	2	0	0	0	$1^1 2^2$	$\mathbf{5 = 1 + 2 + 2}$

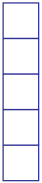
β_1	β_2	β_3	β_4	β_5		$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4 \geq x_5$
5	0	0	0	0	1^5	$\mathbf{5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1}$
3	1	0	0	0	$2^1 1^3$	$\mathbf{5 = 2 + 1 + 1 + 1}$
2	0	1	0	0	$3^1 1^2$	$\mathbf{5 = 3 + 1 + 1}$
1	0	0	1	0	$4^1 1^1$	$\mathbf{5 = 4 + 1}$
0	1	1	0	0	$3^1 2^1$	$\mathbf{5 = 3 + 2}$
0	0	0	0	1	5^1	$\mathbf{5 = 5}$
1	2	0	0	0	$2^2 1^1$	$\mathbf{5 = 2 + 2 + 1}$

Partīcijas attēlo ar **Ferera** un **Junga** **diagrammām**.

13.2. piemērs. Apskatīsim skaitļa $k = 5$ visu $p(5) = 7$ partīciju diagrammas.

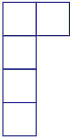
1. Partīcijas 1^5 $\mathbf{(5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1)}$ Ferera diagramma

un Junga diagramma

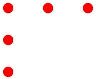


2. Partīcijas $2^1 1^3$ $(\mathbf{5} = \mathbf{2} + \mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{1})$ Ferera diagramma

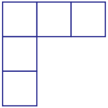
un Junga diagramma



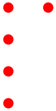
3. Partīcijas $3^1 1^2$ $(\mathbf{5} = \mathbf{3} + \mathbf{1} + \mathbf{1})$ Ferera diagramma



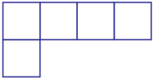
un Junga diagramma



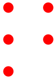
4. Partīcijas $4^1 1^1$ $(\mathbf{5 = 4 + 1})$ Ferera diagramma



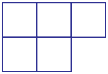
un Junga diagramma



5. Partīcijas $3^1 2^1$ $(\mathbf{5 = 3 + 2})$ Ferera diagramma



un Junga diagramma

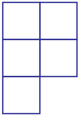


6. Partīcijas 5^1 $(\mathbf{5 = 5})$ Ferera diagramma

un Junga diagramma

7. Partīcijas $2^2 1^1$ $(\mathbf{5 = 2 + 2 + 1})$ Ferera diagramma

un Junga diagramma



Skaitļa k partīciju n (pozitīvos) saskaitāmajos skaitu apzīmē ar $p(k;n)$. Tad

$$p(k) = \sum_{n=1}^{k} p(k;n).$$

Jautājums par $p(k;n)$ noteikšanu ir diezgan sarežģīts. Ir zināms [22], ka $p(k;n)$ vērtības var izteikt atklātā veidā pēc moduļa $n!$:

$$p(k;1) = 1;$$

$$p(k;2) = \begin{cases} \frac{k}{2}, & \text{ja} \quad k \equiv 0 \pmod 2, \\ \frac{k-1}{2}, & \text{ja} \quad k \equiv 1 \pmod 2; \end{cases}$$

$$p(k;3) = \begin{cases} \frac{k^2}{12}, & \text{ja} \quad k \equiv 0 \pmod 6, \\ \frac{k^2}{12} - \frac{1}{12}, & \text{ja} \quad k \equiv 1 \pmod 6, \\ \frac{k^2}{12} - \frac{1}{3}, & \text{ja} \quad k \equiv 2 \pmod 6, \\ \frac{k^2}{12} + \frac{1}{4}, & \text{ja} \quad k \equiv 3 \pmod 6, \\ \frac{k^2}{12} - \frac{1}{3}, & \text{ja} \quad k \equiv 4 \pmod 6, \\ \frac{k^2}{12} - \frac{1}{12}, & \text{ja} \quad k \equiv 5 \pmod 6. \end{cases}$$

Tabulā ir uzrādīti skaitļi

$$p(k;n) \quad (k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;\ n \leq k),$$

kā arī $p(k) = \sum_{n=1}^{k} p(k;n)$.

k/n	1	2	3	4	5	6	7	$p(k)$
1	1							1
2	1	1						2
3	1	1	1					3
4	1	2	1	1				5
5	1	2	2	1	1			7
6	1	3	3	2	1	1		11
7	1	3	4	3	2	1	1	15

13.3. piemērs.

1. Skaitļa $k = 5$ partīcijas $n = 1$ saskaitāmajā:

$$\mathbf{5 = 5}$$

to skaits $p(5; 1) = 1$.

2. Skaitļa $k = 5$ partīcijas $n = 2$ saskaitāmajos:

$$\mathbf{5 = 4 + 1}$$
$$\mathbf{5 = 3 + 2}$$

to skaits $p(5; 2) = 2$.

3. Skaitļa $k = 5$ partīcijas $n = 3$ saskaitāmajos:

$$\mathbf{5 = 3 + 1 + 1}$$
$$\mathbf{5 = 2 + 2 + 1}$$

to skaits $p(5; 3) = 2$.

4. Skaitļa $k = 5$ partīcijas $n = 4$ saskaitāmajos:

$$\mathbf{5 = 2 + 1 + 1 + 1}$$

to skaits $p(5;4) = 1$.

5. Skaitļa $k = 5$ partīcijas $n = 5$ saskaitāmajos:

$$\mathbf{5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1}$$

to skaits $p(5;5) = 1$.

Kopējais skaitļa $k = 5$ partīciju skaits ir vienāds ar

$$p(5) = p(5;1) + p(5;2) + p(5;3) + p(5;4) + p(5;5) =$$
$$= 1 + 2 + 2 + 1 + 1 = 7.$$

14. Kopas nesakārtoti sadalījumi netukšās apakškopās

12. paragrāfā atradām kopas $A = \{a_1; a_2; \ldots; a_k\}$ sakārtotu sadalījumu n apakškopās skaitu. Tagad noskaidrosim, kāds ir kopas nesakārtotu sadalījumu n apakškopās skaits.

Par **kopas $\boldsymbol{A = \{a_1; a_2; \ldots; a_k\}}$ nesakārtotu sadalījumu $\boldsymbol{n}$ netukšās apakškopās** sauc kopas A apakškopu kopu

$$\{A_1; A_2; \ldots; A_n\}, \quad |A_i| = k_i > 0 \quad (i = 1, 2 \ldots, n),$$

ka

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j;\ i, j = 1, 2 \ldots, n).$$

Tad

$$k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n.$$

Piemēram, kopas $A = \{a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6\}$, $k = 6$, nesakārtots sadalījums $n = 3$ netukšās apakškopās ir $\{A_1; A_2; A_3\}$, kur

$$A_1 = \{a_2; a_5\},\ A_2 = \{a_1; a_4; a_6\},\ A_3 = \{a_3\}.$$

"Nesakārtots sadalījums" nozīmē, ka

$$\{A_1; A_2; A_3\} = \{A_2; A_1; A_3\} = \{A_3; A_1; A_2\} = \cdots$$

Pieņemsim, ka kopas A nesakārtotajā sadalījumā ietilpst

1) β_1 apakškopas, katra no kurām sastāv no 1 elementa,

2) β_2 apakškopas, katra no kurām sastāv no 2 elementa,

...

k) β_k apakškopas, katra no kurām sastāv no k elementa.

Tad ir jāizpildās vienādībai

$$1 \cdot \beta_1 + 2 \cdot \beta_2 + \cdots + k \cdot \beta_k = k$$

jeb

$$\sum_{i=1}^{k} i \cdot \beta_i = k.$$

Mūsu piemērā

$$\beta_1 = 1,\ \beta_2 = 1,\ \beta_3 = 1,$$

$$1 \cdot \beta_1 + 2 \cdot \beta_2 + 3 \cdot \beta_3 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 6 = k.$$

Var pierādīt, ka visu kopas A nesakārtotu sadalījumu netukšās apakškopās pie nosacījumiem 1) – k) skaits ir vienāds ar

$$\boxed{N(\beta_1; \beta_2; \ldots; \beta_k) = \frac{k!}{(1!)^{\beta_1}(2!)^{\beta_2}\cdots(k!)^{\beta_k}\beta_1!\beta_2!\cdots\beta_k!}.}$$

14.1. piemērs. *Cik koalīciju var izveidot $k = 28$ cilvēku grupā, ja ir jāizveido $\beta_2 = 2$ koalīcijas pa 2 cilvēkiem, $\beta_3 = 4$ koalīcijas pa 3 cilvēkiem, $\beta_{12} = 1$ koalīciju no 12 cilvēkiem?*

Tā kā

$$1 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 7 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 9 \cdot 0 + 10 \cdot 0 +$$
$$+ 11 \cdot 0 + 12 \cdot 1 + 13 \cdot 0 + 14 \cdot 0 + 15 \cdot 0 + 16 \cdot 0 + 17 \cdot 0 + 18 \cdot 0 + 19 \cdot 0 + 20 \cdot 0 +$$
$$+ 21 \cdot 0 + 21 \cdot 0 + 22 \cdot 0 + 23 \cdot 0 + 24 \cdot 0 + 25 \cdot 0 + 26 \cdot 0 + 27 \cdot 0 + 28 \cdot 0 = 28,$$

tad

$$N(0;2;4;0;0;0;0;0;0;0;0;1;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0;0) = \\ = \frac{28!}{(2!)^2(3!)^4(12!)^1 2!4!1!}.$$

14.2. piemērs. Apskatīsim kopu $A = \{1;2;3;4\}$. Kopas A nesakārtotu sadalījumu 1 apakškopā no 1 elementa un 1 apakškopā no 3 elementiem skaits ir vienāds ar

$$N(1;0;1;0) = \frac{4!}{(1!)^1(3!)^1 1!1!} = 4.$$

Šie sadalījumi ir

$$\{1\},\ \{2;3;4\};$$
$$\{2\},\ \{1;3;4\};$$
$$\{3\},\ \{1;2;4\};$$
$$\{4\},\ \{1;2;3\}.$$

Visu kopas A, $|A| = k$, nesakārtotu sadalījumu netukšās apakškopās skaitu izsaka **Bella skaitļi**:

$$\boxed{B_k = \sum_{1\cdot\beta_1+2\cdot\beta_2+\cdots+k\cdot\beta_k=k} \frac{k!}{(1!)^{\beta_1}(2!)^{\beta_2}\cdots(k!)^{\beta_k}\beta_1!\beta_2!\cdots\beta_k!}.}$$

Atzīmēsim, ka summēšana faktiski notiek pa visām skaitļa k partīcijām.

Pirmie 6 Bella skaitļi ir uzrādīti tabulā.

k	1	2	3	4	5	6
B_k	1	2	5	15	52	203

14.3. piemērs. Atradīsim B_4 un visus kopas $A = \{1; 2; 3; 4\}$ nesakārtotus sadalījumus netukšās apakškopās. Vienādojuma

$$1\beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3 + 4\beta_4 = 4$$

visi atrisinājumi:

β_1	β_2	β_3	β_4
0	0	0	1
1	0	1	0
0	2	0	0
2	1	0	0
4	0	0	0

1.

$$N(0; 0; 0; 1) = \frac{4!}{(4!)^1 1!} = 1.$$

$$\{1; 2; 3; 4\}.$$

2.

$$N(1;0;1;1) = \frac{4!}{(1!)^1(3!)^1 1!1!} = 4.$$

$$\{1\},\ \{2;3;4\};$$
$$\{2\},\ \{1;3;4\};$$
$$\{3\},\ \{1;2;4\};$$
$$\{4\},\ \{1;2;3\}.$$

3.

$$N(0;2;0;0) = \frac{4!}{(2!)^2 2!} = 3.$$

$$\{1;2\},\ \{3;4\};$$
$$\{1;3\},\ \{2;4\};$$
$$\{1;4\},\ \{2;3\}.$$

4.

$$N(2;1;0;0) = \frac{4!}{(1!)^2(2!)^1 2!1!} = 6.$$

$$\{1\},\ \{2\},\ \{3;4\};$$
$$\{1\},\ \{3\},\ \{2;4\};$$
$$\{1\},\ \{4\},\ \{2;3\};$$
$$\{2\},\ \{3\},\ \{1;4\};$$
$$\{2\},\ \{4\},\ \{1;3\};$$
$$\{3\},\ \{4\},\ \{1;2\}.$$

5.

$$N(4;0;0;0) = \frac{4!}{(1!)^4 4!} = 1.$$

$$\{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{4\}.$$

Tādējādi pavisam ieguvām

$$B_4 = 1 + 4 + 3 + 6 + 1 = 15$$

kopas $A = \{1;2;3;4\}$ nesakārtotus sadalījumus netukšās apakškopās.

Kopas A, $|A| = k$, *nesakārtotu* sadalījumu n $(n \leq k)$ netukšās apakškopās skaitu izsaka **otrā veida Stirlinga skaitļi**:

$$\boxed{S(k;n) = \frac{1}{n!}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}C_n^j j^k.}$$

k/n	1	2	3	4	5	6	B_k
1	1						1
2	1	1					2
3	1	3	1				5
4	1	7	6	1			15
5	1	15	25	10	1		52
6	1	31	90	65	15	1	203

Tabulā ir uzrādīti otrā veida Stirlinga skaitļi

$$S(k;n) \;\; (k = 1, 2, 3, 4, 5, 6;\; n \leq k),$$

kā arī Bella skaitļi B_k, kuri ir vienādi ar attiecīgo Stirlinga skaitļu summu:

$$B_k = \sum_{n=1}^{k} S(k;n) = \sum_{n=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n!}(-1)^{n-j} C_n^j j^k.$$

14.4. piemērs.

1.

$$S(4;1) = 1.$$

$$\{1;2;3;4\}.$$

2.

$$S(4;2) = 7.$$

$$\{1\},\ \{2;3;4\};$$
$$\{2\},\ \{1;3;4\};$$
$$\{3\},\ \{1;2;4\};$$
$$\{4\},\ \{1;2;3\};$$
$$\{1;2\},\ \{3;4\};$$
$$\{1;3\},\ \{2;4\};$$
$$\{1;4\},\ \{2;3\}.$$

3.

$$S(4;3) = 6.$$

$$\{1\},\ \{2\},\ \{3;4\};$$
$$\{1\},\ \{3\},\ \{2;4\};$$
$$\{1\},\ \{4\},\ \{2;3\};$$
$$\{2\},\ \{3\},\ \{1;4\};$$
$$\{2\},\ \{4\},\ \{1;3\};$$
$$\{3\},\ \{4\},\ \{1;2\}.$$

4.

$$S(4;3) = 1.$$

$$\{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{4\}.$$

Pavisam ieguvām

$$S(4;1) + S(4;2) + S(4;3) + S(4;4) = 1 + 7 + 6 + 1 = 15 = B_4$$

kopas $A = \{1;2;3;4\}$ nesakārtotus sadalījumus netukšās apakškopās.

15. Kompozīcijas

Par **skaitļa** k **kompozīciju** (pozitīvos) saskaitāmajos sauc šī skaitļa sakārtotu sadalījumu saskaitāmajos. Visu skaitļa k kompozīciju (pozitīvos) saskaitāmajos skaitu apzīmē ar $t(k)$.

Skaitļa k kompozīciju n (pozitīvos) saskaitāmajos skaits ir vienāds ar $t(k;n) = C_{k-1}^{n-1}$. Tā kā

$$t(k) = \sum_{n=1}^{k} t(k;n) = \sum_{n=1}^{k} C_{k-1}^{n-1} = C_{k-1}^{0} + C_{k-1}^{1} + \cdots + C_{k-1}^{k-1} = 2^{k-1},$$

tad

$$\boxed{t(k) = 2^{k-1}.}$$

15.1. piemērs. Skaitļa $k = 4$ kompozīciju $n = 1$ (pozitīvos) saskaitāmajos skaits ir vienāds ar

$$t(4;1) = C_{4-1}^{1-1} = C_3^0 = 1;$$

$$4 = 4.$$

Skaitļa $k = 4$ kompozīciju $n = 2$ (pozitīvos) saskaitāmajos skaits ir vienāds ar

$$t(4;2) = C_{4-1}^{2-1} = C_3^1 = 3;$$

$$4 = 1 + 3,$$

$$4 = 3 + 1,$$

$$4 = 2 + 2.$$

Skaitļa $k = 4$ kompozīciju $n = 3$ (pozitīvos) saskaitāmajos skaits ir vienāds ar

$$t(4;3) = C_{4-1}^{3-1} = C_3^2 = 3;$$

$$4 = 2 + 1 + 1,$$

$$4 = 1 + 2 + 1,$$

$$4 = 1 + 1 + 2.$$

Skaitļa $k = 4$ kompozīciju $n = 4$ (pozitīvos) saskaitāmajos skaits ir vienāds ar

$$t(4;4) = C_{4-1}^{4-1} = C_3^3 = 1;$$

$$4 = 1 + 1 + 1 + 1.$$

Pavisam ieguvām

$$t(4) = \sum_{k=1}^{n} t(4;k) = C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 2^3 = 8$$

skaitļa $k = 4$ kompozīcijas (pozitīvos) saskaitāmajos:

$$4 = 4,$$

$$4 = 1 + 3,$$

$$4 = 3 + 1,$$

$$4 = 2 + 2,$$

$$4 = 2 + 1 + 1,$$

$$4 = 1 + 2 + 1,$$

$$4 = 1 + 1 + 2,$$

$$4 = 1 + 1 + 1 + 1.$$

Tabulā ir uzrādīti skaitļi

$$t(k;n) \ \ (k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; \ n \leq k),$$

kā arī $t(k) = \sum_{n=1}^{k} t(k;n) = 2^{k-1}$.

k/n	1	2	3	4	5	6	7	$t(k)$
1	1							1
2	1	1						2
3	1	2	1					4
4	1	3	3	1				8
5	1	4	6	4	1			16
6	1	5	10	10	5	1		32
7	1	6	15	20	15	6	1	64

16. Katalāna skaitļi

Par **Katalāna skaitli $g(k)$** sauc visu to iespēju skaitu, kā sareizināt k ($k \in \mathbb{N};\ k \geq 2$) elementus, ja reizināšana nav asociatīva.

Ja $k = 2$, tad $g(2) = 1$:

$$(ab).$$

Ja $k = 3$, tad $g(2) = 2$:

$$\big((ab)c\big),\ \big(a(bc)\big).$$

Ja $k = 4$, tad $g(2) = 5$:

$$\Big(\Big(\big(ab\big)c\Big)d\Big)\ \Big(\Big(a\big(bc\big)\Big)d\Big)\ \Big(\big(ab\big)\big(cd\big)\Big)\ \Big(a\Big(\big(bc\big)d\Big)\Big)\ \Big(a\Big(b\big(cd\big)\Big)\Big)$$

Var pierādīt, ka

$$\boxed{g(k) = \frac{1}{k} C_{2k-2}^{k-1}.}$$

Literatūra

[1] A. Andžāns, P. Zariņš. Matemātiskās indukcijas metode un varbūtību teorijas elementi, Rīga, Zvaigzne, 2003.

[2] J. A. Anderson. discrete mathematics with combinatorics, Prentice Hall, 2003.

[3] T. Andreescu, Z. Feng. A path to combinatorics for undergraduates counting strategies, Springer, 2004.

[4] T. Andreescu, Z. Feng. 102 combinatorial problems, Birkhäuser Boston, 2002.

[5] M. Bona. Combinatorics of permutations, CRC, 2004.

[6] R.A. Brualdi. Introductory combinatorics, Prentice Hall, 2004.

[7] V. Bryant. Aspects of combinatorics: A wide-ranging introduction, CUP, 1993.

[8] A. Gricāns. Kopu teorijas elementi, Daugavpils, Saule, 1997.

[9] J.M. Harris, J.L. Hirst, M.J. Mossinghoff. Combinatorics and graph theory, Springer, 2000.

[10] J. Lee. A first course in combinatorial optimization, CUP, 2004.

[11] J.H. van Lint, R.M. Wilson A course in combinatorics, CUP, 2001.

[12] G.E. Martin. Counting: The art of enumerative combinatorics, Springer, 2001.

[13] F. Roberts, B. Tesman. Applied combinatorics, Prentice Hall, 2003.

[14] I. Strazdiņš. Diskrētās matemātikas pamati, Rīga, Zvaigzne, 1980. 68, 143

[15] I. Strazdiņš. Diskrētā matemātika, Rīga, Zvaigzne ABC, 2001.

[16] G. Vasiļevskis. Mācību līdzeklis vidusskolām kombinatorikā. https://www.mykoob.lv

[17] И.Я. Виленкин, О.С. Ивашев-Мусатов, С.И. Шварцбург. Алгебра и начала анализа для 11 класса, Москва, Просвещение, 1993.

[18] Б.Н. Иванов. Дискретная математика. Алгоритмы и программы, Москва, Лаборатория Базовых Знаний, 2002.

[19] Ф.А. Новиков. Дискретная математика для программистов, Санкт-Петербург, Питер, 2001.

[20] Н.П. Редькин. Дискретная математика, Санкт-Петербург, Лань, 2003.

[21] В. Н. Сачков. Введение в комбинаторные методы дискретной математики, Москва, Наука, 1982.

[22] М. Холл. Комбинаторика, Москва, Мир, 1970. 150